Stricte convexité des domaines bornés

et unicité des géodésiques complexes

par

Jean-Pierre VIGUÉ

UMR CNRS 6086 Groupes de Lie et Géométrie ; Université de Poitiers ; SP2MI, Mathématiques ; BP 30179 ; F-86962 FUTUROSCOPE CEDEX ; FRANCE.
e-mail : vigue@mathlabo.univ-poitiers.fr

Résumé. Pour un domaine convexe borné D d'un espace de Banach réflexif E, j'étudie les relations entre les propositions suivantes :

a) D est un domaine borné strictement convexe ;

b) pour tout $a \in D$, pour tout $r > 0$, la boule $B_c(a, r)$ pour la distance de Carathéodory c_D est strictement convexe ;

c) pour tout $a \in D$, pour tout $b \in D$, les géodésiques complexes passant par a et b sont uniques (à composition par un automorphisme analytique de Δ près).

Je montre en particulier dans cet article que a) implique b) et que b) implique c). Je montre aussi que les réciproques sont fausses.

Abstract. In this paper, for a bounded convex domain D in a complex reflexive Banach space, I study the relationship between the following propositions :

a) D is a bounded strictly convex domain ;

b) for every $a \in D$, for every $r > 0$, the ball $B_c(a, r)$ for the Carathéodory distance c_D is strictly convex ;

c) for every a and b in D, the complex geodesics $\varphi{:}\Delta \longrightarrow D$ such that a and b belong to $\varphi(\Delta)$ are unique.

I prove that a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). I also prove that the converses are wrong.

Mots-clés : distance de Carathéodory et de Kobayashi, unicité des géodésiques complexes, domaines strictement convexes.

Keywords : Carathéodory and Kobayashi distance, Unicity of complex geodesics, strictly convex domains.

2000 *Mathematics Subject Classification :* 32F45.

1. Introduction

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. D'après un résultat de L. Lempert [10] et de H. Royden et P. Wong [12] (voir aussi les livres de M. Jarnicki et P. Pflug [8] et de S. Kobayashi [9]), on sait que les distances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident sur D. Ce résultat montre en particulier qu'étant donnés deux points a et b de D, il existe au moins une géodésique complexe φ du disque-unité Δ à valeurs dans D telle que a et b appartiennent à l'image $\varphi(\Delta)$ de φ. L'existence de géodésiques complexes dans un domaine borné s'est montré très utile dans un certain nombre de problèmes : caractérisation des isomorphismes analytiques d'un domaine borné (J.-P. Vigué [15], S. Dineen, R. Timoney et J.-P. Vigué [3]), étude des points fixes d'une application holomorphe (J.-P. Vigué [16]).

D'autre part, si on considère une géodésique complexe φ de D, il est clair que la composée de φ avec un automorphisme analytique du disque-unité Δ est encore une géodésique complexe de D. On peut alors se poser la question de l'unicité (à automorphisme de Δ près) des géodésiques complexes de D dont l'image contient deux points donnés. Cette unicité a été utilisée par exemple dans l'article de I. Graham [7] sur la caractérisation des isomorphismes analytiques sur un domaine borné strictement convexe. Cette unicité qui a d'abord été démontrée dans le cas d'un domaine borné strictement convexe à frontière suffisamment régulière (L. Lempert [10]) est aussi vraie dans le cas d'un domaine borné strictement convexe de $\mathbb{C}^n$ ou même d'un espace de Banach réflexif (voir S. Dineen [2], p. 93). Le but de notre travail est d'étudier, pour un domaine convexe borné D d'un espace de Banach réflexif E, les relations entre les propositions suivantes :

a) D est un domaine borné strictement convexe ;

b) pour tout $a \in D$, pour tout $r > 0$, la boule $B_c(a, r)$ pour la distance de Carathéodory c_D est strictement convexe ;

c) pour tout $a \in D$, pour tout $b \in D$, les géodésiques complexes passant par a et b sont uniques (à composition par un automorphisme analytique de Δ près).

Nous allons montrer en particulier dans cet article que a) implique b) et que b) implique c). Nous montrerons aussi que les réciproques sont fausses.

D'autre part, dans le cas d'une boule-unité B ouverte d'un espace de Banach complexe, on connaît (d'après E. Vesentini [13 et 14] et G. Gentili [5 et 6]) des résultats d'existence et d'unicité des géodésiques complexes passant par l'origine et un autre point de la boule sous la condition que les points de la frontière de B soient des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$. Dans le cas d'un domaine convexe borné d'un espace de Banach, nous généraliserons, dans une certaine mesure, ces résultats.

Nous allons commencer par un certain nombre de définitions et rappels concernant les métriques et distances invariantes et les géodésiques complexes.

2. Définitions et rappels

La distance de Carathéodory c_D sur un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E est définie par la formule

$$c_D(x, y) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} \omega(f(x), f(y)),$$

où $H(D, \Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans le disque-unité Δ, et ω est la distance de Poincaré sur Δ.

De manière duale, on définit la fonction de Kobayashi δ_D par la formule

$$\delta_D(x, y) = \inf_{f \in H(\Delta, D)} \omega(\alpha, \beta) ,$$

où α et $\beta \in \Delta$ sont tels que $f(\alpha) = x$ et $f(\beta) = y$. On définit alors la distance de Kobayashi k_D comme la plus grande distance inférieure ou égale à δ_D.

Il nous faut aussi définir les pseudométriques infinitésimales associées. La pseudométrique infinitésimale de Carathéodory E_D est définie par

$$E_D(x, v) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} |Df(x).v| \quad (x \in D, v \in E).$$

La pseudométrique infinitésimale de Kobayashi F_D est définie de manière duale:

$$F_D(x,v) = \inf \{|\lambda| \mid \exists \varphi \in H(\Delta, D) \text{ tel que } \varphi(0) = x \text{ et } \lambda D\varphi(0) = v\}.$$

Sur toutes ces notions, le lecteur intéressé pourra consulter S. Dineen [2], T. Franzoni and E. Vesentini [4], M. Jarnicki and P. Pflug [8], S. Kobayashi [9].

Rappelons maintenant la définition des géodésiques complexes (voir par exemple E. Vesentini [13 et 14]).

Définition 2.1. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E et soit $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ une application holomorphe. On dit que φ est une géodésique complexe de D si φ est une isométrie pour $c_\Delta = \omega$ et c_D, c'est-à-dire, si pour tous ζ, $\eta \in \Delta$,

$$c_D(\varphi(\zeta), \varphi(\eta)) = c_\Delta(\zeta, \eta) = \omega(\zeta, \eta).$$

En particulier, si φ est une géodésique complexe de D, φ est une application holomorphe propre de Δ dans D, et son image $\varphi(\Delta)$ est une sous-variété complexe fermée de D, analytiquement isomorphe au disque-unité Δ.

E. Vesentini [13 et 14] a donné la caractérisation suivante des géodésiques complexes de D.

Théorème 2.2. - *Soit $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ une application holomorphe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *φ est une géodésique complexe de D ;*
(ii) *il existe deux points distincts ζ et η de Δ tels que*

$$c_D(\varphi(\zeta), \varphi(\eta)) = c_\Delta(\zeta, \eta) = \omega(\zeta, \eta) \ ;$$

(iii) *il existe $\zeta \in \Delta$ et $v \in \mathbb{C}$ $(v \neq 0)$ tels que*

$$E_D(\varphi(\zeta), D\varphi(\zeta).v) = E_\Delta(\zeta, v) = \frac{|v|}{1 - |\zeta|^2} \ .$$

Idée de la démonstration. Il est clair que (i) entraîne (ii). Montrons que (ii) entraîne (i) et (iii).

Deux points a et b de D étant donnés, on commence par montrer, en utilisant le théorème de Montel, qu'il existe une fonction holomorphe $f : D \longrightarrow \Delta$ telle que

$$c_D(a,b) = \omega(f(a), f(b)) \ .$$

Appliquons ce résultat aux points $\varphi(\zeta)$ et $\varphi(\eta)$, où ζ et η sont deux points de Δ tels que $c_D(\varphi(\zeta), \varphi(\eta)) = c_\Delta(\zeta, \eta) = \omega(\zeta, \eta)$. Il existe donc $f : \Delta \longrightarrow D$ telle que

$$c_\Delta(f(\varphi(\zeta)), f(\varphi(\eta))) = c_\Delta(\zeta, \eta) \ .$$

Quitte à composer f avec un automorphisme analytique de Δ, on peut supposer que

$$f(\varphi(\zeta)) = \zeta, \ f(\varphi(\eta)) = \eta \ .$$

Le lemme de Schwarz-Pick (voir par exemple S. Dineen [2]) montre que

$$f \circ \varphi = \text{ id } .$$

On a alors, pour tous ξ_1, $\xi_2 \in \Delta$,

$$c_\Delta(\xi_1, \xi_2) = c_\Delta(f(\varphi(\xi_1)), f(\varphi(\xi_2))) \leq c_D(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2)) \leq c_\Delta(\xi_1, \xi_2) \ ,$$

ce qui montre que toutes ces inégalités sont bien des égalités. Ainsi, φ est une géodésique complexe de D. Le même raisonnement appliqué aux métriques infinitésimales de Carathéodory E_Δ et E_D montre que (ii) entraîne (iii). La démonstration que (iii) entraîne (i) est similaire et laissée en exercice au lecteur.

D'autre part, on déduit des résultats de L. Lempert [10] et de H. Royden et P. Wong [12] sur l'égalité de c_D et δ_D et de E_D et F_D dans un domaine convexe borné l'existence de géodésiques complexes dans un tel domaine. Précisément (voir [3]), étant donné un domaine convexe borné D d'un espace de Banach réflexif E et étant donnés deux points a et b de D (resp. un point a de D et un vecteur v de E), il existe au moins une géodésique complexe φ telle que a et b appartiennent à l'image $\varphi(\Delta)$ de φ (resp. $a = \varphi(0)$ et que v soit colinéaire à $\varphi'(0)$).

Enfin, je dirai que φ est (à un automorphisme analytique de Δ près) l'unique géodésique complexe passant par a et b (resp. passant par a et telle que v soit tangent à $\varphi(\Delta)$) si, pour toute géodésique complexe ψ vérifiant la même propriété, il existe un automorphisme analytique f de Δ tel que $\varphi = \psi \circ f$.

3. Enoncé des principaux résultats et lemme fondamental

Soit D un domaine convexe borné d'un espace de Banach réflexif E et soit a un point de D. Rappelons qu'un domaine D est dit strictement convexe si tout point de la frontière de D est un point extrémal de $\overline{D}$. Il revient au même de dire que la frontière ∂D de D ne contient aucun segment $[a, b]$ avec $a \neq b$.

Considérons les différentes propriétés suivantes :

(i) D est un domaine borné strictement convexe ;

(ii) pour tout $r > 0$, la boule $B_c(a, r)$ pour la distance de Carathéodory c_D est strictement convexe ;

(iii) il existe $r > 0$ tel que la boule $B_c(a, r)$ soit strictement convexe ;

(iv) l'indicatrice $I_a = \{v \in E \mid E_D(a, v) < 1\}$ est strictement convexe ;

(v) les géodésiques complexes passant par a et un autre point b (resp. passant par a et tangentes à un vecteur v non nul) sont uniques (à un changement de paramètre près) au sens de la définition donnée au paragraphe 2.

Nous avons alors les résultats suivants.

Théorème 3.1. - *Soit D un domaine borné d'un espace de Banach réflexif E.*
a) *La proposition* (i) *entraîne, pour tout $a \in D$,* (ii), (iii), (iv) *et* (v).
b) *Etant un point a de D, les propositions* (ii) *et* (iii) *sont équivalentes.*
c) *Etant donné un point a de D, les propositions* (ii) *ou* (iii) *entraînent* (iv) *et* (v).

La démonstration de ce théorème utilise de façon fondamentale le lemme suivant.

Lemme 3.2. - *Soit D un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif E. Soit $a \in D$, soit $r > 0$ et soit*

$$B_c(a, r) = \{z \in D \mid c_D(a, z) < r\}$$

la boule de centre a et de rayon r pour la distance de Carathéodory c_D. Soit $\rho = \operatorname{th} r$ et soit $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ une géodésique complexe de D telle que $\varphi(0) = a$. Alors, l'application holomorphe $\psi : \Delta \longrightarrow B_c(a, r)$ définie par $\psi(\zeta) = \varphi(\rho\zeta)$ est une géodésique complexe de $B_c(a, r)$. On en déduit que, pour tout $z \in B_c(a, r)$,

$$c_{B_c(a,r)}(a, z) = \operatorname{th}^{-1}((1/\rho) \operatorname{th} c_D(a, z)).$$

De plus, $B_c(a, r)$ est convexe.

Démonstration. En utilisant le théorème de Montel, on montre facilement que, si $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ est une géodésique complexe de D, il existe une application holomorphe $s : D \longrightarrow \Delta$ telle que $s \circ \varphi(z) = z$, pour tout $z \in \Delta$. D'autre part, comme φ est une isométrie pour c_D et c_Δ, il est clair que $\psi(\Delta)$ est contenu dans $B_c(a, r)$. Si on définit $t : B_c(a, r) \longrightarrow \Delta$ par la formule $t(z) = (1/\rho) s(\rho z)$, on vérifie que $t(B_c(a, r))$ est contenu dans Δ et on a :

$$t \circ \psi(\zeta) = (1/\rho)(\varphi(\rho\zeta)) = (1/\rho)\rho\zeta = \zeta \ .$$

Ainsi donc, ψ est une géodésique complexe de $B_c(a,r)$, et on en déduit les formules annoncées.

Montrons maintenant que $B_c(a,r)$ est convexe. Soient b et c deux points de $B_c(a,r)$. Soit $t \in [0,1]$. Montrons que $d = tb + (1-t)c$ appartient à $B_c(a,r)$. Soit $\varphi_1 : \Delta \longrightarrow D$ une géodésique complexe telle que $\varphi_1(0) = a$, $\varphi_1(\zeta_1) = b$ avec $|\zeta_1| < \rho$. De même, soit $\varphi_2 : \Delta \longrightarrow D$ une géodésique complexe telle que $\varphi_2(0) = a$, $\varphi_2(\zeta_2) = c$ avec $|\zeta_2| < \rho$. Par un choix convenable de φ_1 et φ_2, et quitte à échanger b et c, on peut supposer que $0 \leq \zeta_1 \leq \zeta_2 < \rho$. Considérons l'application holomorphe φ définie sur Δ par

$$\varphi(\zeta) = t\varphi_1(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\zeta) + (1-t)\varphi_2(\zeta)$$

Comme D est convexe, φ est une application holomorphe de Δ dans D, et $\varphi(\zeta_2) = tb + (1-t)c$. Comme $|\zeta_2| < \rho$ et que φ est contractante pour la distance de Carathéodory, on en déduit que $tb + (1-t)c \in B_c(a,r)$ et $B_c(a,r)$ est convexe.

4. Démonstration du théorème 3.1

Pour montrer le théorème 3.1, il suffit de montrer les propositions suivantes :

a) (i) entraîne (ii). Montrons que, si D est un domaine strictement convexe borné, $B_c(a,r)$ est strictement convexe. Soit donc $[x,y]$ un segment contenu dans la frontière de $B_c(a,r)$ et nous voulons montrer que $x = y$. Soit $\rho = \text{th } r$, et soit $\varphi_1 : \Delta \longrightarrow D$ une géodésique complexe telle que $\varphi_1(0) = a$, $\varphi_1(\rho) = x$. De même, soit $\varphi_2 : \Delta \longrightarrow D$ une géodésique complexe telle que $\varphi_2(0) = a$, $\varphi_2(\rho) = y$. Pour tout $t \in [0,1]$, l'application $\psi_t = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$ est telle que $\psi_t(0) = a$, $\psi_t(\rho) = tx + (1-t)y$. Ainsi donc, $c_D(\psi_t(0), \psi_t(\rho)) = c_\Delta(0,\rho)$, et ψ_t est une géodésique complexe de D. Comme φ_1 et φ_2 sont des fonctions holomorphes bornées et que E est un espace de Banach réflexif, on sait (voir par exemple S. Dineen [3]) qu'elles admettent presque partout des valeurs au bord $\varphi_1^*(e^{i\theta})$ et $\varphi_2^*(e^{i\theta})$ qui appartiennent à la frontière ∂D de D. Comme ψ_t est une géodésique complexe, c'est une application holomorphe propre et ses valeurs au bord $\psi_t^*(e^{i\theta}) = t\varphi_1^*(e^{i\theta}) + (1-t)\varphi_2^*(e^{i\theta})$ appartiennent à la frontière de D. Comme D est strictement convexe, on a, presque partout $\varphi_1^*(e^{i\theta}) = \varphi_2^*(e^{i\theta})$. On en déduit que $\varphi_1 = \varphi_2$, ce qui entraîne que $x = y$. Le résultat est démontré.

b) (i) entraîne (v) est démontré par S. Dineen [2], proposition 6.16, p. 93.

c) (ii) entraîne (iii) est clair.

d) (iii) entraîne (ii). On suppose que, pour un certain $r > 0$, la boule $B_c(a,r)$ est strictement convexe, et il nous faut montrer que, pour tout r', la boule $B_c(a,r')$ est strictement convexe. Distinguons deux cas :

- $r' < r$. D'après le lemme 3.2, il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que $B_c(a,r')$ soit égal à

$$\left\{z \in B_c(a,r) \;\middle|\; c_{B_c(a,r)}(a,z) < \rho\right\} .$$

Comme $B_c(a,r)$ est strictement convexe, on déduit de (i)$\Rightarrow$(ii) que $B_c(a,r')$ est strictement convexe.

- $r' > r$. Soit $[x,y]$ un segment contenu dans la frontière de $B_c(a,r')$. On peut choisir deux géodésiques complexes φ_1 et φ_2 de D telles qu'il existe un nombre réel $\zeta > 0$ tel que

$$\varphi_1(0) = a,\ \varphi_1(\zeta) = x\ ;$$

$$\varphi_2(0) = a,\ \varphi_2(\zeta) = y\ .$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $t\varphi_1(\zeta) + (1-t)\varphi_2(\zeta)$ appartient à la frontière $\partial B_c(a,r')$ de $B_c(a,r')$, ce qui entraîne que $t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$ est une géodésique complexe de D. On remarque alors que, pour tout η tel que $\omega(0,\eta) = r$, $c_D(a, t\varphi_1(\eta) + (1-t)\varphi_2(\eta)) = r$, ce qui montre que $t\varphi_1(\eta) + (1-t)\varphi_2(\eta)$ est contenu dans la frontière $\partial B_c(a,r)$ de $B_c(a,r)$. Comme $B_c(a,r)$ est strictement convexe, ceci entraîne que, pour tout η tel que $\omega(0,\eta) = r$, on a : $\varphi_1(\eta) = \varphi_2(\eta)$. D'après le théorème des zéros isolés, $\varphi_1 = \varphi_2$, et le résultat est démontré.

e) (ii) ou (iii) entraînent (iv). Pour cela, montrons que, si l'indicatrice I_a n'est pas strictement convexe, alors la boule $B_c(a,r)$ n'est pas strictement convexe.

Soit $[v,w]$ un segment contenu dans la frontière de I_a. On sait qu'il existe une géodésique complexe φ_1 (resp. φ_2) telle que $\varphi_1(0) = a$, $\varphi_1'(0) = v$ (resp. $\varphi_2(0) = a$, $\varphi_2'(0) = w$). On déduit du théorème 2.2 que, pour tout $t \in [0,1]$, $t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$ est une géodésique complexe de D. Comme précedemment, on déduit du principe des zéros isolés qu'il existe $\zeta \in \Delta$ tel que $\omega(0,\zeta) = r$ et que $\varphi_1(\zeta) \neq \varphi_2(\zeta)$. Alors l'ensemble des $t\varphi_1(\zeta) + (1-t)\varphi_2(\zeta)$ est contenu dans $\partial B_c(a,r)$. Ainsi, $B_c(a,r)$ n'est pas strictement convexe et le résultat est démontré.

f) (ii) entraîne (v).

Soit b un point distinct de a, et soit $\rho = c_D(a,b)$. Choisissons $r > \rho$. Comme $B_c(a,r)$ est strictement convexe, on sait d'après le point b) que les géodésiques complexes dans $B_c(a,r)$ sont uniques au sens que nous avons dit. D'autre part, nous avons vu que les géodésiques complexes de D passant par a fournissent par restriction et reparamétrisation des géodésiques complexes de $B_c(a,r)$. L'unicité s'en déduit.

Dans le cas où on considère un vecteur v tel que $E_D(a,v) = 1$, le même raisonnement montre qu'il existe une géodésique complexe unique $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = v$.

5. Remarques et questions

Rappelons la définition suivante. Soit D un domaine borné d'un espace de Banach E. On dit qu'un point x appartenant à la frontière ∂D de D est un point complexe-extrémal de $\overline{D}$ si 0 est le seul vecteur y tel que $x + \zeta y$ appartienne à $\overline{D}$, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta| < 1$. On a alors le résultat suivant (voir E. Vesentini [13 et 14] pour la proposition directe et G. Gentili [5 et 6] pour la réciproque).

Théorème 5.1. - *Soit B la boule-unité d'un espace de Banach complexe E. Soit $x \neq 0$ dans E et soit $\varphi : \Delta \longrightarrow B$ l'application holomorphe définie par*

$$\varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|} \ .$$

Alors φ est une géodésique complexe de D. De plus, étant donné un point a différent de l'origine appartenant à $\varphi(\Delta)$, φ est, à un changement de paramètre près, l'unique géodésique complexe passant par a et 0 si et seulement si $\frac{x}{\|x\|}$ est un point complexe-extrémal de $\overline{B}$.

Dans le cas de la boule-unité ouverte B d'un espace de Banach complexe E, on sait que $c_B(0,x) = \omega(0,\|x\|)$ et que $E_B(0,v) = \|v\|$. D'autre part, il est possible que tous les points de la frontière de B soient complexe-extrémaux sans que B soit strictement convexe. On a cependant un résultat d'unicité des géodésiques complexes passant par l'origine. Ceci prouve que (v) n'entraîne aucune des propositions (i), (ii), (iii) ou (iv) lorsque l'on prend pour a l'origine 0 de E.

Considérons maintenant un domaine convexe borné D de $\mathbb{C}$. Il est clair que D est simplement connexe ; il existe donc un isomorphisme analytique φ du disque-unité Δ sur D. Supposons que la frontière de D contienne un segment de droite. Alors D n'est pas strictement convexe. Cependant, l'indicatrice I_a est strictement convexe. On peut montrer aussi que, pour tout $a \in D$, la boule $B_c(a,r)$ est strictement convexe. En effet, c'est l'image par φ d'un disque contenu dans Δ. En particulier, sa frontière est l'image par φ (qui est analytique) d'un sous-ensemble analytique réel de Δ. C'est donc un sous-ensemble analytique réel de D, et il est clair qu'un sous-ensemble analytique réel de D ne peut pas contenir de segment de droite. Ceci prouve qu'aucune des conditions (ii), (iii) ou (iv) n'entraîne (i). Signalons qu'il est également possible de construire, à partir de cet exemple, des exemples en dimension strictement supérieure à 1.

D'autre part, je ne sais pas si (iv) entraîne (ii) et (iii). En effet, si on suppose que $B_c(a,r)$ n'est pas strictement convexe, on peut trouver un segment $[x,y]$ contenu dans la frontière de $B_c(a,r)$. On peut choisir deux géodésiques complexes φ_1 et φ_2 de D telles qu'il existe un nombre réel $\zeta > 0$ tel que $\varphi_1(0) = a$, $\varphi_1(\zeta) = x$ et que $\varphi_2(0) = a$, $\varphi_2(\zeta) = y$. Pour tout $t \in [0,1]$, $t\varphi_1(\zeta) + (1-t)\varphi_2(\zeta)$ appartient à la frontière $\partial B_c(a,r)$ de $B_c(a,r)$, ce qui entraîne que $t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$ est une géodésique complexe de D. Cependant, il demeure possible que $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$, et on ne peut pas en déduire que I_a n'est pas strictement convexe.

De même, je ne sais pas si (iv) entraîne (v).

6. Unicité des géodésiques complexes et points complexe-extrémaux

A partir des idées introduites par E. Vesentini [13 et 14] et G. Gentili [5 et 6], il semble raisonnable d'examiner aussi les rapports entre l'unicité des géodésiques complexes dans un domaine D et les points complexe-extrémaux sur la frontière de D. Rappelons d'abord qu'une partie A d'un espace vectoriel complexe est dite disquée si, pour tout $x \in A$, pour tout nombre complexe λ de module ≤ 1, λx appartient à A. Comme G. Gentili, on donne la définition suivante.

Proposition et définition 6.1. - *Soit D un domaine convexe borné d'un espace de Banach complexe E. Pour tout $y \in \partial D$, il existe un plus grand sous-ensemble convexe disqué $\mathcal{P}(y)$ contenu dans E tel que $y + \mathcal{P}(y)$ soit contenu dans $\overline{D}$.*

Démonstration. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles convexes disqués de E tels que, pour tout $i \in I$, $y + K_i$ soit contenu dans $\overline{D}$. Il suffit de montrer que l'enveloppe convexe $co(\cup K_i)$ de la réunion des K_i est encore un sous-ensemble convexe disqué tel que $y + co(\cup K_i)$ soit contenu dans $\overline{D}$.

Soit $z \in co(\cup K_i)$. Il existe alors une famille de nombres réels positifs λ_i, avec $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices telle que $\sum \lambda_i = 1$ et $z = \sum \lambda_i x_i$, avec $x_i \in K_i$.

On a alors : $y+z = \sum \lambda_i (y + x_i)$, et comme $y + x_i \in \overline{D}$ et que $\overline{D}$ est convexe, on en déduit que $y+z \in \overline{D}$.

Il reste à montrer que $co(\cup K_i)$ est disqué. C'est une conséquence immédiate du fait que chacun des K_i l'est.

On peut alors montrer le théorème suivant qui donne une condition nécessaire d'unicité des géodésiques complexes.

Théorème 6.2. - *Soit D un domaine borné convexe d'un espace de Banach complexe E. Soit $\varphi : \overline{\Delta} \longrightarrow \overline{D}$ une application continue, holomorphe dans Δ. Supposons que $\varphi|_\Delta$ soit une géodésique complexe de D et vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(i) *φ est l'unique géodésique complexe de D telle que $\varphi(0) = a, \varphi'(0) = v$;*

(ii) *Etant donnés deux points distincts a et b appartenant à $\varphi(\Delta)$, il existe (à un changement de paramètre près) une unique géodésique complexe passant par a et par b.*

Alors, $\cap_{\zeta \in \partial\Delta} \mathcal{P}(\varphi(\zeta)) = \{0\}$.

Démonstration. Faisons la démonstration par l'absurde. Supposons donc que

$$\cap_{\zeta \in \partial\Delta} \mathcal{P}(\varphi(\zeta)) \neq \{0\}.$$

On peut trouver un vecteur $w (\neq 0)$ tel que Δw soit contenu dans cette intersection. Soit $h : \overline{\Delta} \longrightarrow \Delta w$ une application continue dans $\overline{\Delta}$, holomorphe dans Δ, et supposons que h ait au moins deux zéros (comptés avec multiplicités) dans Δ. Considérons l'application holomorphe $\varphi + h$.

Montrons d'abord que $(\varphi + h)(\Delta)$ est contenu dans D. Comme $\overline{D}$ est convexe, on déduit facilement du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une famille de formes $\mathbb{C}$-linéaires continues σ_i et un point c de D tels que

$$\overline{D} = \{z \in E \mid \text{Re } \sigma_i(z - c) \leq 1, \forall i \in I\} \ .$$

On déduit alors du principe du maximum que

$$D = \{z \in E \mid \text{Re } \sigma_i(z - c) < 1, \forall i \in I\} \ .$$

Pour tout ζ de module 1, l'hypothèse entraîne que $(\varphi + h)(\zeta)$ appartient à $\overline{D}$. Ainsi donc, on a :

$$\text{Re } \sigma_i((\varphi + h)(\zeta) - c) \leq 1, \forall i \in I.$$

Si on considère $\zeta \in \Delta$, le principe du maximum montre que l'on a la même inégalité. Comme h s'annule, on sait qu'il existe au moins un $\zeta_0 \in \Delta$ tel que

$$\text{Re } \sigma_i((\varphi + h)(\zeta_0) - c) < 1, \forall i \in I.$$

Le principe du maximum entraîne que, pour tout $\zeta \in \Delta$, pour tout $i \in I$,

$$\text{Re } \sigma_i((\varphi + h)(\zeta) - c) < 1 \ .$$

Par suite, $\varphi + h$ envoie Δ dans D.

On déduit immédiatement du fait que h a deux zéros (ou un zéro double) que $\varphi + h$ est une géodésique complexe de D. La non-unicité des géodésiques complexes s'en déduit.

Contrairement au cas des domaines convexes disqués bornés traité par G. Gentili, je ne sais pas montrer que la condition donnée dans le théorème précédent est aussi suffisante. Peut-être, faudrait-il étudier des exemples.

Bibliographie

1. L. Belkhchicha, *Caractérisation des isomorphismes analytiques sur la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme.* Math. Z., **215** (1994), p. 129-141.

2. S. Dineen, The Schwarz Lemma. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1989.

3. S. Dineen, R. Timoney et J.-P. Vigué, *Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) **12** (1985), no. 4, p. 515-529.

4. T. Franzoni and E. Vesentini, Holomorphic maps and invariant distances. Math. Studies **40**, North-Holland, Amsterdam, 1980.

5. G. Gentili, *On nonuniqueness of complex geodesics in convex bounded domains.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) **79** (1985), no. 5, p. 90-97.

6. G. Gentili, *On complex geodesics of balanced convex domains*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **144** (1986), p. 113-130.

7. I. Graham, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at a point.* Proc. Amer. Math. Soc., **105** (1989), p. 917- 921.

8. M. Jarnicki and P. Pflug, Invariant distances and metrics in complex analysis. De Gruyter Expositions in Mathematics **9**, De Gruyter, Berlin, 1993.

9. S. Kobayashi, Hyperbolic complex spaces. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 318. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

10. L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains.* Anal. Math., **8** (1982), p. 257-261.

11. P. Mazet, *Principe du maximum et lemme de Schwarz à valeurs vectorielles.* Canad. Math. Bull. **40** (1997), no. 3, p. 356-363.

12. H. Royden and P. Wong. *Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains.* Preprint (1983).

13. E. Vesentini, *Complex geodesics.* Compositio Math. **44** (1981), no. 1-3, p. 375-394.

14. E. Vesentini, *Complex geodesics and holomorphic maps.* Symposia Mathematica, Vol. XXVI (Rome, 1980), p. 211-230, Academic Press, London-New York, 1982.

15. J.-P. Vigué. *Caractérisation des automorphismes analytiques d'un domaine convexe borné.* C. R. Acad. Sc. Paris Série I Math., **299** (1984), p. 101-104.

16. J.-P. Vigué. *Géodésiques complexes et points fixes d'applications holomorphes.* Adv. in Math. **52** (1984), no. 3, p. 241-247.