Ensembles d'unicité pour les automorphismes et les endomorphismes analytiques d'un domaine borné

Jean-Pierre Vigué

A Henri Cartan,
à l'occasion de son centième anniversaire

Résumé. Dans cet article, nous étudions les ensembles d'unicité pour le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ (resp. pour l'ensemble $H(D,D)$ des fonctions holomorphes de D dans lui-même). Dans les deux cas, nous montrons qu'il existe des ensembles d'unicité contenus dans D^{n+1} ; pour $\mathrm{Aut}(D)$, nous montrons que ces ensembles d'unicité forment un ensemble dense de D^{n+1}, et pour $H(D,D)$, que ce n'est pas le cas en général.

Abstract. In this paper, we study determination sets for the group $\mathrm{Aut}(D)$ of biholomorphic automorphisms of D (resp. for the set $H(D,D)$ of holomorphic maps of D into itself). In the two cases, we prove the existence of determination sets contained in D^{n+1} ; in the first case, we prove that these determination sets form a dense subset in D^{n+1}, and, for $H(D,D)$, it is not the case in general.

1. Introduction

Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ a fait l'objet de nombreuses études depuis les premiers travaux de H. Cartan [3 et 4]. Sur ce sujet, on peut consulter par exemple T. Franzoni et E. Vesentini [6], R. Narasimhan [10] et J.-P. Vigué [14]. En particulier, il faut citer le théorème d'unicité de H. Cartan qui s'énonce de la façon suivante.

Théorème 1.1. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit a un point de D et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$ et que $f'(a) = \mathrm{id}$. Alors, $f = \mathrm{id}$.*

Ce théorème montre en particulier que, si $f \in \mathrm{Aut}(D)$ et $g \in H(D,D)$ sont tels que $f(a) = g(a)$ et que $f'(a) = g'(a)$, alors $f = g$ [$H(D,D)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans D].

On peut se demander si, au lieu de considérer $f(a)$ et $f'(a)$, on peut caractériser f par sa valeur en un nombre fini de points bien choisis dans D. Plus précisément, on définit un ensemble d'unicité de la façon suivante.

Définition 1.2. On dit qu'un ensemble $(z_1, ..., z_d)$ de points de D est un ensemble d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$ (resp. $H(D,D)$) si, pour tout $f \in \mathrm{Aut}(D)$ (resp. $H(D,D)$), $f(z_i) = z_i, i = 1, ..., d$ entraîne que $f = \mathrm{id}$.

Par des méthodes de géométrie différentielle, B. Fridman, K. Tim, S. Krantz et D. Ma [7] ont montré le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Soit M une variété complexe connexe hermitienne complète de dimension n telle que tout automorphisme analytique de M soit une isométrie pour la métrique hermitienne considérée. Alors il existe un ouvert dense W de M^{n+1} formé d'ensembles d'unicité pour* $\mathrm{Aut}(M)$.

De plus, des exemples montrent qu'il existe des familles de $(n+1)$ points distincts de M^{n+1} qui ne sont pas des ensembles d'unicité pour $\mathrm{Aut}(M)$. Maintenant, si on considère un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$, il n'est pas toujours possible de le munir d'une telle métrique. Cependant, nous allons montrer que le théorème précédent demeure exact pour n'importe quel domaine borné D de $\mathbb{C}^n$. Notre démonstration est basée sur des propriétés du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$.

Il est naturel ensuite de se poser la question de l'existence d'ensembles d'unicité pour $H(D,D)$. Nous commencerons par étudier deux exemples : celui de la boule-unité B_2 de $\mathbb{C}^2$ (pour la norme hermitienne). Dans cet exemple, l'ensemble des points (z_1,z_2,z_3) de B_2^3 qui est un ensemble d'unicité pour $H(D,D)$ forme un ouvert dense de B_2^3. Ensuite, nous étudierons le cas du bidisque Δ^2. Dans ce cas, il existe des ensembles d'unicité mais l'ensemble $X(3) \subset (\Delta^2)^3$ des ensembles d'unicité n'est pas dense dans $(\Delta^2)^3$.

Le reste de l'article sera consacré à l'existence d'ensembles d'unicité pour $H(D,D)$. Nous montrerons d'abord, en utilisant un résultat de M. Abate [1] qu'étant donné un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ et un point a de D, il existe n points $(z_1,...,z_n)$ de D tels que $(a,z_1,...,z_n)$ soit un ensemble d'unicité pour $H(D,D)$. Ensuite, nous étudierons en détails le cas des dimensions 1 et 2. Nous montrerons en particulier que, pour un domaine borné convexe D de $\mathbb{C}^2$, étant donnés deux points distincts (z_1,z_2) de D, il existe toujours au moins un point $z \in D$ tel que (z,z_1,z_2) soit un ensemble d'unicité pour $H(D,D)$.

Nous allons commencer par un certain nombre de rappels sur le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ et sur l'ensemble des applications holomorphes de D dans D.

2. Rappels

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble $H(D,D)$ et le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D. Rappelons le théorème suivant dû à H. Cartan [4] (voir aussi E. Bedford [2]).

Théorème 2.1. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et soit $a \in D$. Soit $f_n \in \mathrm{Aut}(D)$ une suite d'automorphismes convergeant uniformément sur tout compact de D vers g. Supposons que $g(a) \in D$. Alors $g \in \mathrm{Aut}(D)$.*

Etant donné un point a de D, on définit le groupe d'isotropie du point a comme

$$\mathrm{Aut}_a(D) = \{f \in \mathrm{Aut}(D) | f(a) = a\}.$$

Concernant ce groupe, on a le théorème suivant, dû à H. Cartan [3] (voir aussi une démonstration de ce résultat dans J.-P. Vigué [16 et 17]).

Théorème 2.2. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$ et soit $\mathrm{Aut}_a(D)$ le groupe d'isotropie du point a. Alors il existe une application holomophe $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
- $\varphi(a) = 0$, et φ est une carte locale au voisinage de a ;
- pour tout $f \in \mathrm{Aut}_a(D)$, on a : $\varphi \circ f = f'(a) \circ \varphi$.

Ce résultat exprime que f est linéaire dans la carte locale φ.

Enfin, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$ et soit $f \in \mathrm{Aut}_a(D)$. Alors toutes les valeurs propres de $f'(a)$ sont de module 1 et l'application linéaire $f'(a)$ est diagonalisable.*

Ce lemme est une conséquence des inégalités de Cauchy pour les itérées f^n de f.

On déduit de H. Cartan [5] le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et soit $p : D \longrightarrow D$ une rétraction holomorphe (c'est-à-dire une application holomorphe telle que $p^2 = p$). Soit $a \in p(D)$. Alors il existe une constante M qui ne dépend que de D et de a et une application holomorphe $u : D \longrightarrow B(0, M)$ de D dans la boule $B(0, M)$ de centre 0 et de rayon M qui vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $u(a) = 0$, $u'(a) = \mathrm{id}$ et u est une carte locale au voisinage de a ;
(ii) $u \circ p = p'(a) \circ u$, ce qui signifie que, dans la carte locale u, p est un projecteur linéaire.

La démonstration de H. Cartan consiste d'abord à se ramener au cas où $a = 0$ et à définir u par la formule suivante :

$$u = (id - p'(a)) \circ (id - p) + p'(a) \circ p,$$

et il est facile de vérifier les propriétés annoncées. L'existence de M se déduit des inégalités de Cauchy.

3. Ensembles d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$

Soit d un entier positif et soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Rappelons qu'un ensemble $(z_1, ..., z_d) \in D^d$ est un ensemble d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$ si, pour tout $f \in \mathrm{Aut}(D)$, $f(z_i) = z_i, i = 1, ..., d$ entraîne que $f = \mathrm{id}$. On définit alors $W(d) \subset D^d$ comme l'ensemble des $(z_1, ..., z_d) \in D^d$ tels que $(z_1, ..., z_d)$ soit un ensemble d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$. Le premier résultat concernant $W(d)$ est le suivant.

Théorème 3.1. *Supposons que D soit un domaine borné taut de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble $W(d)$ est un ouvert (éventuellement vide) de D^d.*

Démonstration. Montrons que le complémentaire $S(d)$ est fermé. Soit Z^n une suite de points de $S(d)$ convergeant vers Z^0. Il nous faut montrer que $Z^0 \in S(d)$, c'est-à-dire qu'il existe $f \in \mathrm{Aut}(D)$ tel que $f|_{Z^0} = \mathrm{id}|_{Z^0}$ et que f soit différent de l'identité. Comme Z^n appartient à $S(d)$, il existe un automorphisme f_n de D tel que $f_n|_{Z^n} = \mathrm{id}|_{Z^n}$ et que f_n soit différent de l'identité. Soit $Z^n = (z_1^n, ..., z_d^n)$. Comme f_n est différent de l'identité, on sait d'après le théorème d'unicité de H. Cartan (théorème 1.1) que $f_n'(z_1^n)$ est différent de l'identité. Comme $f_n'(z_1^n)$ est une application linéaire diagonalisable, ceci entraîne que $f_n'(z_1^n)$ admet une valeur propre de module 1, différente de 1. Quitte à remplacer f_n par une puissance convenable de f_n on peut supposer que cette valeur propre est de partie réelle ≤ 0. En utilisant le théorème de Montel, on peut extraire de la suite f_n une sous-suite f_{n_k} convergeant uniformément sur tout compact de D vers une application holomorphe g. Il est clair que $g(z_1^0) = z_1^0$. D'après le théorème 2.1, g est un automorphisme analytique de D et nous avons bien sûr $g|_{Z^0} = \mathrm{id}|_{Z^0}$. Par passage à la limite, $g'(z_1^0)$ admet une valeur propre de partie réelle ≤ 0. Ainsi g n'est pas égal à l'identité et Z^0 appartient à $S(d)$. Le théorème est démontré.

Bien sûr, si d est petit, l'ensemble $W(d)$ peut être vide. Ainsi, pour la boule-unité ouverte B_n de $\mathbb{C}^n$, on peut vérifier que, pour tout $d \leq n$, l'ensemble $W(d)$ est vide. En revanche, dès que $d \geq n+1$, nous allons montrer maintenant que $W(d)$ est un ouvert dense de D^d. Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$ et soit $d \geq n+1$. L'ensemble $S_a(d)$ des points $(z_1, ..., z_{d-1}) \in D^{d-1}$ tels que $(a, z_1, ..., z_{d-1})$ n'appartienne pas à $W(d)$ est contenu dans un sous-ensemble analytique strict de D^{d-1}. Par suite, $W(d)$ est un ouvert dense de D^d.*

Démonstration. Soit $a \in D$. D'après le théorème 2.2, il existe une application holomorphe $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- $\varphi(a) = 0$, et φ est une carte locale au voisinage de a;
- pour tout $f \in \mathrm{Aut}_a(D)$, pour tout $z \in D$, on a :

$$\varphi(f(z)) = f'(a).\varphi(z).$$

Soit $f \in \mathrm{Aut}(D)$ tel que $f(a) = a, f(z_i) = z_i, i = 1, ..., d-1$. Nous allons montrer que, si les $(\varphi(z_i))_{i=1,...,d-1}$ forment un système générateur de $\mathbb{C}^n$, alors $f = \mathrm{id}$. En effet, si cela est le cas, on a, pour $i = 1, ..., d-1$

$$\varphi(z_i) = \varphi(f(z_i)) = f'(a).\varphi(z_i).$$

On en déduit que $f'(a).v = v$, pour tous les vecteurs d'un système générateur de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, $f'(a) = \mathrm{id}$, et le théorème d'unicité de H. Cartan (théorème 1.1) montre que $f = \mathrm{id}$.

Ensuite, on vérifie facilement que l'ensemble des $(z_1, ..., z_{d-1}) \in D^{d-1}$ tels que $(\varphi(z_1), ..., \varphi(z_{d-1}))$ ne soit pas un système générateur de $\mathbb{C}^n$ est caractérisé par la nullité de certains mineurs de la matrice des $(\varphi(z_1), ..., \varphi(z_{d-1}))$ et que les fonctions holomorphes obtenues ne sont pas identiquement nulles, car φ est une carte locale au voisinage de a.

A titre d'exemple, il est très facile, pour un domaine cerclé borné de $\mathbb{C}^n$ de dire quels sont les ensembles d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$ dont le premier élément est l'origine.

Proposition 3.3. *Soit D un domaine cerclé borné de $\mathbb{C}^n$ et soit $(z_1, ..., z_{d-1}) \in D^{d-1}$ un système générateur de $\mathbb{C}^n$. Alors $(0, z_1, ..., z_{d-1})$ est un ensemble d'unicité pour* $\mathrm{Aut}(D)$.

Démonstration. On sait d'après H. Cartan [3] que tout automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(D)$ laissant l'origine fixe est linéaire. Le résultat s'en déduit facilement.

4. Quelques exemples d'ensembles d'unicité pour $H(D, D)$

Considérons maintenant l'ensemble $H(D, D)$ des fonctions holomorphes de D dans D. Nous avons déjà défini ce qu'est un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$. Bien sûr, un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$ est aussi un ensemble d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$. Avant d'étudier le problème général, nous allons considérer deux exemples.

1) la boule-unité ouverte B_2 de $\mathbb{C}^2$ (pour la norme hermitienne)

Soit $Z = (z_1, z_2, z_3)$ trois points de B_2. On veut étudier si Z est un ensemble d'unicité pour $H(B_2, B_2)$. Comme B_2 est homogène sous l'action du groupe $\mathrm{Aut}(B_2)$, et quitte à remplacer f par $g^{-1}\circ f\circ g$, où g est un automorphisme analytique de B_2 convenablement choisi, il suffit de connaître les ensembles d'unicité dont le premier élément est l'origine 0.

Soit donc $f \in H(B_2, B_2)$ tel que $f(0) = 0, f(z_2) = z_2, f(z_3) = z_3$. Si $z_2 \neq 0$, l'application du disque-unité ouvert Δ dans B_2

$$\zeta \mapsto \varphi(\zeta) = \zeta z_2/\|z_2\|$$

est une géodésique complexe, au sens de E. Vesentini [12 et 13] passant par 0 et z_2, et comme la frontière de la boule-unité B_2 de $\mathbb{C}^2$ est strictement convexe, c'est, à un changement de paramètre près, la seule géodésique complexe passant par 0 et z_2. On peut exprimer ce résultat autrement en disant que φ est la seule application holomorphe de Δ dans D telle que $\varphi(0) = 0, \varphi(\|z_2\|) = z_2$. Mais $f\circ\varphi$ vérifie la même propriété, ce qui entraîne que $f\circ\varphi = \varphi$. On a donc : $f(\zeta z_2) = \zeta z_2$. Par suite, $f'(0).z_2 = z_2$. Le même raisonnement montre que $f'(0).z_3 = z_3$. On en déduit que, si (z_2, z_3) forment une base de $\mathbb{C}^2$, $f'(0) = \text{id}$ et, d'après le théorème d'unicité de H. Cartan, $f = \text{id}$. Ainsi, les ensembles d'unicité pour $H(B_2, B_2)$ forment un ensemble dense dans B_2^3. Connaissant les automorphismes linéaires de la boule B_2, il est facile de vérifier que $Z = (0, z_2, z_3)$ est un ensemble d'unicité pour $\text{Aut}(B_2)$ si et seulement si (z_2, z_3) est une base de $\mathbb{C}^2$. Ainsi, les ensembles d'unicité pour $H(B_2, B_2)$ et pour $\text{Aut}(B_2)$ sont les mêmes.

2) le bidisque $\Delta^2 \subset \mathbb{C}^2$

Considérons par exemple l'ensemble $Z^0 = ((0,0), (1/2, 0), (-1/2, 0))$ de $(\Delta^2)^3$. Il est clair que Z^0 n'est un ensemble d'unicité ni pour $\text{Aut}(\Delta^2)$ ni pour $H(\Delta^2, \Delta^2)$. Mais, de plus, on a le résultat suivant.

Il existe un voisinage V de Z^0 dans $(\Delta^2)^3$ tel que tout point Z de V n'est pas un ensemble d'unicité pour $H(\Delta^2, \Delta^2)$.

En effet, soit $Z = ((z_1^1, z_2^1), (z_1^2, z_2^2), (z_1^3, z_2^3))$ et supposons que z_1^1, z_1^2, z_1^3 soient deux à deux distincts. Considérons le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que $P(z_1^i) = z_2^i$, $i = 1, 2, 3$. [P est l'unique polynôme de degré au plus deux vérifiant cette propriété]. Un calcul élémentaire montre qu'une condition suffisante pour que P envoie Δ dans Δ est que

$$\sum_{i=1}^{3} [|z_2^i| \prod_{j\neq i} \frac{1 + |z_1^j|}{\left|z_1^i - z_1^j\right|}] < 1 ,$$

et il est clair que l'ensemble ainsi défini contient un voisinage V de Z^0 dans $(\Delta^2)^3$. Alors l'application holomorphe $f : \Delta^2 \longrightarrow \Delta^2$ définie par $f(u, v) = (u, P(u))$ est une rétraction holomorphe, distincte de l'identité dont l'image contient Z. Le résultat est démontré.

On peut quand même remarquer (et nous reviendrons sur cette question dans la suite) qu'il existe des ensembles d'unicité pour $H(\Delta^2, \Delta^2)$. Ainsi, $Z = ((0,0), (a, 0), (0, b))$ avec a et b non nuls, est un ensemble d'unicité. En effet, soit $f = (f_1, f_2)$ tel que $f|_Z = \text{id}$. On a : $f_1(0,0) = 0, f_1(a, 0) = a$. Le lemme de Schwarz montre que $f_1(., 0)$ est un automorphisme analytique de Δ, égal à l'identité. Mais d'après T. Franzoni et E. Vesentini [6], si on considère une famille d'applications holomorphes $\varphi : M \times D \longrightarrow D$ (avec M connexe et D borné) telle que, pour un certain m_0 dans M, $\varphi(m_0, z) = z$, alors, pour tout $m \in M, \varphi(m, z) = z$. On en déduit que $f_1(z_1, z_2) = z_1$. Le même raisonnement appliqué à f_2 montre que $f_2(z_1, z_2) = z_2$, et Z est bien un ensemble d'unicité.

Ainsi, les deux exemples que nous avons donnés montrent que, pour $H(D,D)$, les choses peuvent être plus compliquées. Dans certains cas, les ensembles d'unicité forment un ouvert dense de D^{n+1} ; dans d'autres cas, on peut trouver des ensembles d'unicité mais ils ne forment pas un ensemble dense.

Nous allons maintenant montrer, dans le cas général et dès que $d \geq n+1$, qu'il existe des ensembles d'unicité dans D^d.

5. Existence d'ensembles d'unicité pour $H(D,D)$

Nous allons d'abord montrer, comme précédemment, le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Soit D un domaine borné taut de $\mathbb{C}^n$, et soit $f \in H(D,D)$. Soit d un entier. L'ensemble $X(d)$ des éléments $(z_1,...,z_d)$ qui forme un ensemble d'unicité pour $H(D,D)$ est un ouvert de D^d.*

Démonstration. Il nous faut montrer que son complémentaire est fermé. Soit Z^n une suite d'éléments de D^d qui n'appartiennent pas à $X(d)$, convergente vers $Z^0 = (z_1,...,z_n)$. On peut donc trouver $f_n \in H(D,D)$ tel que $f_n|_{Z^n} = \mathrm{id}|_{Z^n}$ et que f_n ne soit pas l'identité. Soit z_1^n le premier élément de Z^n. Comme f_n est différent de l'identité, $f_n'(z_1^n)$ admet une valeur propre λ de module ≤ 1, différente de 1. Soit $r, 0 < r < 1$. En distinguant le cas $|\lambda| = 1$ et $|\lambda| < 1$, et quitte à remplacer par une puissance convenable de f_n, on peut supposer que $f_n'(z_1^n)$ admet une valeur propre λ qui n'appartient pas au disque $\Delta(1,r)$ de centre 1 et de rayon r. D'après le théorème de Montel, on peut extraire de la suite f_n une sous-suite f_{n_k} convergeant uniformément sur tout compact vers f. On déduit du fait que D est taut que f appartient à $H(D,D)$. Il est clair d'une part que $f(z_i) = z_i, i = 1,...,d$ et que, d'autre part, $f'(z_1)$ admet une valeur propre différente de 1. Ainsi Z n'est pas un ensemble d'unicité et le théorème est démontré.

Comme dans le cas des automorphismes analytiques, pour d petit, il n'existe pas d'ensembles d'unicité pour $H(D,D)$. Cependant, nous pouvons montrer le théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, et soit $a \in D$. Alors il existe un ouvert U de D^n tel que $(a,...,a) \in \overline{U}$ et que, pour tout $(z_1,...,z_n) \in U$, $(a, z_1,...,z_n)$ soit un ensemble d'unicité pour $H(D,D)$.*

Démonstration. Soit donc $f \in H(D,D)$ telle que $f(a) = a, f(z_i) = z_i, i = 1,...,n$. On veut montrer que, si $(z_1,...,z_n)$ sont bien choisis, f est égal à l'identité. Choisissons $r > 0$ tel que la boule $B_k(a,r)$ de centre a et de rayon r pour la distance de Kobayashi k_D soit relativement compacte dans D. On peut supposer que tous les points z_i appartiennent à $B_k(a,r)$ et on sait d'autre part que $B_k(a,r)$ est stable par f. Toute application g adhérente à la suite des itérées $(f|_{B_k(a,r)})^n$ envoie a priori $B_k(a,r)$ dans $\overline{B_k(a,r)}$, mais si $z \in B_k(a,r)$ est tel que $k_D(a,z) = r_0 < r$, alors $k_D(a, g(z)) \leq r_0$ et $g(z) \in B_k(a,r)$. Par suite, toute application g adhérente à la suite des itérées $(f|_{B_k(a,r)})^n$ envoie $B_k(a,r)$ dans $B_k(a,r)$. En reprenant la construction de M. Abate [1], on montre qu'il existe une rétraction holomorphe ρ adhérente à la suite des itérées $(f|_{B_k(a,r)})^n$ et ρ est une rétraction holomorphe de $B_k(a,r)$ dans $B_k(a,r)$. D'après M. Abate [1], H. Cartan [4] et E. Bedford [2], dire que f est un automorphisme analytique de D est équivalent à dire que la dimension de l'image de ρ est n, c'est-à-dire que ρ est l'application identique.

Pour simplifier, supposons que $a = 0$. La carte locale u définie au théorème 2.4 qui linéarise ρ est telle que $u'(0) = \mathrm{id}$. C'est une application holomorphe de $B_k(a,r)$ dans $\mathbb{C}^n$

bornée par une constante M qui ne dépend que de D. Comme $B_k(a,r)$ contient une boule $B(0,r')$ pour la norme, on peut utiliser les inégalités de Cauchy, et on a, pour tout $z \in B(0,r'/2)$,

$$\|(1/n!)u^{(n)}(z)\| \leq \frac{M}{(r'/2)^n},$$

où $\|(1/n!)u^{(n)}(z)\|$ désigne la norme du polynôme homogène $x \longrightarrow (1/n!)u^{(n)}(z).(x,...,x)$. De la formule de Taylor à l'ordre 2, on déduit

$$\|u(z) - u'(0).z\| \leq \frac{\|u^{(2)}\|_{[0,z]}}{2!}\,\|z\|^2$$
$$\|u(z) - z\| \leq \frac{M}{(r'/2)^2}\,\|z\|^2.$$

Maintenant, si on considère n points $(z_1,...,z_n)$ contenus dans la boule $B(0,r'/2)$ de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$u(z_i) = z_i + \varepsilon(z_i), \text{ avec } \|\varepsilon(z_i)\| \leq \frac{M}{(r'/2)^2}\,\|z_i\|^2.$$

Soit $d = \det(u(z_1),...,u(z_n))$. En écrivant $u(z_i) = z_i + \varepsilon(z_i)$, et en utilisant la n-linéarité du déterminant, on trouve que

$$d = \sum \det(a_{f(1)},...,a_{f(n)}),$$

la somme étant étendue à toutes les applications $f : \{1,...,n\} \longrightarrow \{1,2\}$, où $a_{f(i)}$ vaut z_i si $f(i)=1$, $\varepsilon(z_i)$ si $f(i)=2$.

Par suite,

$$|d - \det(z_1,...,z_n)| \leq \sum |\det(a_{f(1)},...,a_{f(n)})|,$$

la somme étant étendue à toutes les applications f où f est différente de l'application constante égale à 1. On a alors :

$$|d - \det(z_1,...,z_n)| \leq (\|z_1\| + \|\varepsilon(z_1)\|)\ ...\ (\|z_n\| + \|\varepsilon(z_n)\|)\ - \|z_1\|...\|z_n\|.$$

En posant $K = M/(r'/2)^2$, on trouve :

$$|d - \det(z_1,...,z_n)| \leq (\|z_1\| + K\|z_1\|^2)\ ...\ (\|z_n\| + K\|z_n\|^2)\ - \|z_1\|...\|z_n\|.$$

On peut facilement trouver un ouvert V étoilé par rapport à l'origine de $(\mathbb{C}^n)^n$ tel que, pour tout $z = (z_1,...,z_n)$ appartenant à V, on ait

$$|\det(z_1,...,z_n)| \geq 1/2\|z_1\|...\|z_n\|.$$

Alors, dès que $(z_1,...,z_n)$ appartenant à V est assez proche de 0, d est différent de 0, et $(u(z_1),...,u(z_n))$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Comme ρ est égal à $\rho'(0)$ dans la carte u, ceci montre que ρ est égal à l'identité et f est un automorphisme analytique de D. Comme les ensembles des points $(z_1,...,z_n)$ de D tels que $(a,z_1,...,z_n)$ soit un ensemble d'unicité pour Aut(D) est dense dans D^n, on en déduit qu'il existe un ouvert U de D^n tel que $(a,...,a) \in \overline{U}$ et que, pour tout $(z_1, ..., z_n) \in U$, $(a, z_1, ..., z_n)$ soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$. Le théorème est démontré.

6. Le cas de la dimension 1 et 2

Nous allons maintenant voir ce que deviennent ces conditions en dimension 1 et 2. Commençons par le cas de la dimension 1.

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}$. D'après H. Cartan [4], toute application holomorphe $f : D \longrightarrow D$ ayant 2 points fixes distincts est un automorphisme analytique de D. [En effet, étant donné une telle application, on peut trouver une suite f^{n_k} extraite de la suite des itérées qui converge vers une une application g non dégénérée, ce qui, en dimension 1, signifie seulement que la dérivée g' n'est pas identiquement nulle. C'est bien sûr le cas puisque g n'est pas constante].

Les ensembles d'unicité pour $H(D, D)$ et pour $\mathrm{Aut}(D)$ sont donc les mêmes. Génériquement, il suffit de considérer deux points distincts de D pour avoir un ensemble d'unicité. En général, deux points distincts quelconques ne suffisent pas, comme le montre l'exemple suivant : $D = \{z \in \mathbb{C} | r < |z| < 1/r\}$, avec $0 < r < 1$. Alors, l'application $f(z) = 1/z$ laisse fixes les points 1 et -1.

En revanche, on sait d'après un résultat de E. Peschl et M. Lehtinen [11] que, si D est un domaine borné de $\mathbb{C}$ et si $f : D \longrightarrow D$ a 3 points fixes distincts, alors f est l'identité.

Etudions maintenant le cas de la dimension 2. Nous allons considérer un domaine borné convexe D de $\mathbb{C}^2$, et nous allons montrer qu'étant donnés deux points distincts (z_1, z_2) de D, on peut toujours trouver un troisième point z de D tel que (z, z_1, z_2) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$.

Théorème 6.1. *Soit D un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^2$ et soient (z_1, z_2) deux points distincts de D. Alors il existe un ouvert non vide U de D tel que, pour tout $z \in U$, (z, z_1, z_2) soit un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$.*

Bien sûr, comme le montrent les calculs faits dans le cas du bidisque Δ^2, U n'est pas dense dans D en général.

Démonstration. Soit D un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^2$ et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe. On sait d'après [15] que, si l'ensemble $\mathrm{Fix} f$ des points fixes de f est non vide, il existe une rétraction holomorphe $\rho : D \longrightarrow \mathrm{Fix} f$. Pour montrer que f est égal à l'identité, il suffit de montrer que l'image de ρ est de dimension 2. Si l'ensemble des points fixes de f contient au moins 2 points distincts, il est clair que l'image de la rétraction ρ ne peut pas être de dimension 0 ; elle est donc de dimension au moins 1.

Considérons une rétraction holomorphe $\rho : D \longrightarrow D$ telle que $\rho(D)$ soit de dimension 1. On a alors

$$\rho(D) \longrightarrow D \longrightarrow \rho(D)$$

où la première application est l'injection canonique de $\rho(D)$ dans D. On en déduit une suite d'applications en homotopie

$$\pi_1(\rho(D), a) \longrightarrow \pi_1(D, a) \longrightarrow \pi_1(\rho(D), a).$$

La composée de ces applications est l'identité sur $\pi_1(\rho(D), a)$, et comme $\pi_1(D, a) = 0$, on en déduit que $\pi_1(\rho(D), a) = 0$. Ainsi, la variété $\rho(D)$ est simplement connexe ; comme elle est hyperbolique, elle est isomorphe au disque-unité Δ. On déduit de E. Vesentini [12] et [13] que $\rho(D)$ est l'image d'une géodésique complexe $\varphi : \Delta \longrightarrow D$.

Pour montrer le théorème et compte-tenu du fait que, si (z, z_1, z_2) sont des points fixes de f, il existe une rétraction holomorphe dont l'image contient les points (z, z_1, z_2), il nous suffit de montrer qu'il existe un ouvert non vide U tel que, pour tout $z \in U$, il n'existe pas de géodésique complexe $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ telle que son image contienne (z, z_1, z_2).

Soient donc deux points distincts z_1 et z_2 de D. On sait qu'il existe une application holomorphe $g : D \longrightarrow \Delta$ telle que

$$c_D(z_1, z_2) = c_\Delta(g(z_1), g(z_2)) = \omega(g(z_1), g(z_2)),$$

où c_D désigne la distance de Carathéodory sur D, et ω la distance de Poincaré. (voir [8] et [9]). Supposons que $z \in \varphi(\Delta)$, où φ est une géodésique complexe passant par z_1 et z_2. Alors, g est une isométrie pour la distance de Carathéodory c_D sur $\varphi(\Delta)$. On a donc :

$$c_D(z, z_1) = c_\Delta(g(z), g(z_1)) \ (1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Définissons l'ouvert

$$U_\varepsilon = \{z \in D | c_D(z, z_1) > \varepsilon \text{ et } c_\Delta(g(z), g(z_1)) < \varepsilon\}.$$

Soit $z \in U_\varepsilon$. Il est clair d'après (1) que, quelle que soit la géodésique complexe $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ passant par z_1 et z_2, z n'appartient pas à $\varphi(\Delta)$.

Quitte à changer la paramétrisation de φ, on peut supposer que $g(\varphi(\zeta)) = \zeta$, pour tout $\zeta \in \Delta$. Soit $\zeta_1 \in \Delta$ tel que $\varphi(\zeta_1) = z_1$. On a :

$$g'(z_1).\varphi'(\zeta_1) = 1.$$

Le théorème des fonctions implicites montre que l'ensemble

$$\{z \in D | g(z) = g(z_1)\}$$

est, au voisinage de z_1, une sous-variété analytique complexe de dimension 1. Il existe donc $z \neq z_1$ dans D tel que $g(z) = g(z_1)$. On a :

$$0 \neq c_D(z, z_1) > c_D(g(z), g(z_1)) = 0,$$

et $z \in U_\varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, U_ε n'est pas vide.

On en déduit que, pour tout $z \in U_\varepsilon$, pour tout $f \in H(D, D)$, $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2, f(z) = z$ entraîne que f est égal à l'identité. Le théorème est démontré.

Bibliographie

1. M. Abate. *Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **18** (1991), 167-191.

2. E. Bedford. *On the automorphism group of a Stein manifold*. Math. Ann., **266** (1983), 215-227.

3. H. Cartan. *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique.* J. Math. pures et appl., 9^e série, **11** (1931) 1-114.

4. H. Cartan. *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné.* Math. Z. **35** (1932), 760-773.

5. H. Cartan. *Sur les rétractions d'une variété.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **303** (1986), 715.

6. T. Franzoni and E. Vesentini. Holomorphic maps and invariant distances. Notas de Matematica [Mathematical Notes], **69**. North-Holland Publishing Co, Amsterdam, 1980.

7. B. Fridman, K. Kim, S. Krantz, D. Ma. *On fixed points and determining sets for holomorphic automorphisms.* Michigan Math. J., **50** (2002), 507-515.

8. L. Harris. *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces.* Advances in holomorphy (Proc. Sem. Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977). North-Holland Math. Stud., **34**, 345-406. North-Holland, Amsterdam 1979.

9. M. Jarnicki and P. Pflug. Invariant distances and metrics in complex analysis. de Gruyter Expositions in Mathematics, **9**, Walter de Gruyter Co, Berlin, 1993.

10. R. Narasimhan. Several complex variables, The University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1971.

11. E. Peschl and M. Lehtinen. *A conformal self-map which fixes 3 points is the identity.* Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. A I Math., **4** (1979), 85-86.

12. E. Vesentini. *Complex geodesics.* Compositio Math, **44** (1981), 375-394.

13. E. Vesentini. *Complex geodesics and holomorphic maps.* Symposia Mathematica, Vol. XXVI (Rome, 1980), 211-230.

14. J.-P. Vigué. *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornes symétriques.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **9** (1976), 203-281.

15. J.-P. Vigué. *Points fixes d'applications holomorphes dans un domaine borné convexe de* $\mathbb{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 345-353.

16. J.-P. Vigué. *Sur les points fixes d'applications holomorphes.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **303** (1986), 927-930.

17. J.-P. Vigué. *Sur les ensembles d'unicité pour les automorphismes analytiques d'un domaine borné.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **336** (2003), 589-592.

Jean-Pierre Vigué
UMR CNRS 6086
Université de Poitiers
Mathématiques
SP2MI, BP 30179
86962 FUTUROSCOPE
e-mail : vigue@math.univ-poitiers.fr