Géométrie analytique (Analyse complexe)/*Analytic Geometry (Complex Analysis)*

Sur les ensembles d'unicité pour les automorphismes analytiques d'un domaine borné

Jean-Pierre Vigué

Université de Poitiers, Département de Mathématiques, UMR-CNRS 6086, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE CEDEX.

e-mail : vigue@mathlabo.univ-poitiers.fr

Résumé. - Dans cette Note, nous étudions les ensembles d'unicité pour le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$.

Determination Sets for Holomorphic Automorphisms of a Bounded Domain

Abstract. - In this Note, we study the determination sets for the group $\mathrm{Aut}(D)$ of holomorphic automorphisms of a bounded domain D in $\mathbb{C}^n$.

1. Introduction

Le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ (ou plus généralement d'un espace de Banach complexe) a fait l'objet de nombreuses études depuis les premiers papiers de H. Cartan [3 et 4]. Sur ce sujet, on peut consulter par exemple T. Franzoni et E. Vesentini [5], L. Harris [7], R. Narasimhan [8], J.-P. Vigué [9]. En particulier, il faut citer le théorème d'unicité de H. Cartan qui s'énonce de la façon suivante.

Théorème 1.1. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit a un point de D, et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$ et que $f'(a) = \mathrm{id}$. Alors $f = \mathrm{id}$.*

Ce théorème entraîne en particulier que, si $f \in \mathrm{Aut}(D)$ et $g \in H(D, D)$ sont tels que $f(a) = g(a)$ et $f'(a) = g'(a)$, alors $f = g$ [$H(D, D)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans D].

Il est naturel de définir alors un ensemble d'unicité de la façon suivante.

Définition 1.2. - On dit qu'un ensemble $(z_1, ..., z_d)$ de points de D est un ensemble d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$ si, pour tout $f \in \mathrm{Aut}(D)$, $f(z_i) = z_i$, $i = 1, ..., d$ entraîne $f = \mathrm{id}$.

Par des méthodes de géométrie différentielle, B. Fridman, K. Tim, S. Krantz et D. Ma [6] ont montré le théorème suivant.

Théorème 1.3. - *Soit M une variété complexe connexe hermitienne complète de dimension n telle que tout automorphisme analytique de M soit une isométrie pour la métrique hermitienne considérée. Alors il existe un ouvert dense W de M^{n+1} formé d'ensembles d'unicité pour* $\mathrm{Aut}(D)$.

De plus, des exemples montrent qu'il existe des familles de $(n + 1)$ points distincts de M^{n+1} qui ne sont pas des ensembles d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$. Si on considère un domaine borné D, il n'est pas toujours vrai qu'on puisse le munir d'une telle métrique hermitienne. Cependant, nous allons montrer que le théorème précédent demeure exact pour n'importe quel domaine borné D de $\mathbb{C}^n$. Notre démonstration est basée sur des propriétés du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné et donne des résultats plus précis que ceux de [6]. Nous montrerons enfin que le théorème donné est vrai aussi topologiquement : ainsi, si $K \subset D^{n+1}$ est un ensemble d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$, l'application de $\mathrm{Aut}(D)$ dans D^{n+1} définie par $f \mapsto f(K)$ est un homéomorphisme sur son image.

Commençons par rappeler quelques résultats sur les automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$.

2. Rappels et premiers résultats

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. L'ensemble $H(D, D)$ des applications holomorphes de D dans D est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D. Bien sûr, le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ qui est contenu dans $H(D, D)$, est muni de la topologie induite, et on vérifie que $\mathrm{Aut}(D)$, muni de cette topologie, est un groupe topologique. Rappelons le théorème suivant dû à H. Cartan [4] (voir aussi E. Bedford [1]).

Théorème 2.1. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et soit $a \in D$. Soit $f_n \in \mathrm{Aut}(D)$ une suite convergeant uniformément sur tout compact de D vers g. Supposons que $g(a)$ appartienne à D. Alors $g \in \mathrm{Aut}(D)$.*

On déduit de ce résultat la proposition suivante.

Proposition 2.2. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$ et soit K un compact de D. Soit $\mathrm{Aut}_{a,K}(D)$ l'ensemble des automorphismes analytiques f de D tels que $f(a) \in K$. Alors $\mathrm{Aut}_{a,K}(D)$ est compact.*

La démonstration consiste seulement à remarquer que, d'après le théorème de Montel, on peut extraire de toute suite d'éléments de $\mathrm{Aut}_{a,K}(D)$ une sous-suite convergente et que sa limite, d'après le théorème 2.1, appartient à $\mathrm{Aut}_{a,K}(D)$.

Comme nous l'avons déjà dit, étant donné $a \in D$, un élément $f \in \mathrm{Aut}(D)$ est caractérisé par $(f(a), f'(a))$. En fait, nous avons, pour le groupe d'isotropie d'un point, un résultat plus précis que nous allons maintenant démontrer (voir H. Cartan [3], p. 80]).

Théorème 2.3. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$ et soit $\mathrm{Aut}_a(D)$ le groupe d'isotropie du point $a \in D$. Alors, il existe une application holomorphe $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\varphi(a) = 0$, que φ soit une carte locale au voisinage de a et que, pour tout $f \in \mathrm{Aut}_a(D)$, on ait :*

$$\varphi \circ f = f'(a) \circ \varphi.$$

Ce résultat exprime que f est linéaire dans la carte locale φ.

Démonstration. - Le groupe $\mathrm{Aut}_a(D)$ qui est compact peut être muni d'une mesure de Haar μ invariante à droite et à gauche (voir par exemple N. Bourbaki [2]). On définit φ par la formule :

$$\varphi(z) = \int_{\mathrm{Aut}_a(D)} g'(a)^{-1}.(g(z) - a) d\mu(g) \ .$$

Il est clair que $\varphi(a) = 0$ et que $\varphi'(a) = \mathrm{id}$. Ainsi, φ est une carte locale. Soit $f \in \mathrm{Aut}_a(D)$. On a :

$$\varphi(f(z)) = \int_{\mathrm{Aut}_a(D)} g'(a)^{-1}.(g(f(z)) - a) d\mu(g)$$

$$= f'(a). \int_{\mathrm{Aut}_a(D)} [(g \circ f)'(a)]^{-1}.((g \circ f)(z) - a) d\mu(g) \ ,$$

et, comme μ est invariante par translation à droite,

$$\varphi(f(z)) = f'(a).\varphi(z),$$

et le théorème est démontré.

Signalons enfin le résultat suivant.

Proposition 2.4. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$ et soit $f \in \mathrm{Aut}(D)$ tel que $f(a) = a$. Alors toutes les valeurs propres de $f'(a)$ sont de module 1 et l'application linéaire $f'(a)$ est diagonalisable.*

Ce résultat se montre facilement en considérant les itérées de f et de f^{-1} et en utilisant les inégalités de Cauchy.

3. Ensembles d'unicité

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Pour tout entier d, on note $W(d) \subset D^d$ l'ensemble $(z_1, ..., z_d) \in D^d$ tels que $(z_1, ..., z_d)$ soit un élément d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$. Le premier résultat est le suivant.

Théorème 3.1. - *L'ensemble $W(d)$ est un ouvert (éventuellement vide) de D^d.*

Démonstration. - Faisons la démonstration par l'absurde et supposons que $W(d)$ n'est pas ouvert. Si c'est le cas, on peut trouver $Z^0 \in W(d) \subset D^d$ et une suite Z^n convergeant vers Z^0 et tels que $Z^n \notin W(d)$. Il existe donc $f_n \in \mathrm{Aut}(D)$ tel que $f_n|_{Z^n} = \mathrm{id}$ et que f_n ne soit pas égal à l'identité. Soit z_1^n le premier élément de Z^n. Comme $f_n(z_1^n) = z_1^n$ et que $f_n'(z_1^n)$ est diagonalisable et distinct de l'identité, et quitte à remplacer f_n par une puissance bien choisie, on peut supposer que $f_n'(z_1^n)$ a une valeur propre de partie réelle ≤ 0. En utilisant le théorème de Montel, on peut extraite une sous-suite f_{n_k} convergeant vers un automorphisme g. Il est clair que $g|_{Z^0}$ est égal à l'identité mais $g'(z_1^0)$ a une valeur propre de partie réelle ≤ 0. C'est une contradiction avec le fait que Z^0 est un ensemble d'unicité.

Bien sûr, si d est petit, l'ensemble $W(d)$ peut être vide. En revanche, dès que $d \geq n+1$, nous allons montrer que $W(d)$ est un ouvert dense de D^d. Plus précisement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2. - *Soit $a \in D$ et soit $d \geq n+1$. L'ensemble $W_a(D)$ des $(z_1, ..., z_{d-1}) \in D^{d-1}$ tels que $(a, z_1, ..., z_{d-1})$ n'appartienne pas à $W(d)$ est contenu dans un sous-ensemble analytique strict de D^{d-1}. Par suite, $W(d)$ est dense dans D^d.*

Démonstration. - Soit $a \in D$. D'après le théorème 2.3, il existe une application holomorphe $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ telle que $\varphi(a) = 0$, que φ soit une carte locale au voisinage de a et que, pour tout $f \in \mathrm{Aut}_a(D)$, on ait, pour tout $z \in D$,

$$\varphi(f(z)) = f'(a).\varphi(z) \ .$$

D'après le théorème d'unicité de H. Cartan, pour que f soit égale à l'identité, il faut et il suffit que $f'(a) = \mathrm{id}$. Si $(\varphi(z_1), ..., \varphi(z_{d-1}))$ forme un système générateur de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, et si l'on a $f(z_i) = z_i$, $i = 1, ..., d-1$, alors $f'(a) = \mathrm{id}$ et $f = \mathrm{id}$. Il est facile de voir que l'ensemble des $(z_1, ..., z_{d-1})$ tels que $(\varphi(z_1), ..., \varphi(z_{d-1}))$ ne soit pas un système générateur de $\mathbb{C}^n$ est un sous-ensemble analytique strict de D^{d-1}.

Pour terminer, je voudrais remarquer une propriété topologique de ces ensembles d'unicité.

Proposition 3.3. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, et soit $(z_1, ..., z_d) \in D^d$ un ensemble d'unicité. Alors l'application $\varphi : \mathrm{Aut}(D) \longrightarrow D^d$ définie par $f \mapsto (f(z_1), ..., f(z_d))$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Aut}(D)$ sur son image.*

Démonstration. - Le fait que $(z_1, ..., z_d)$ est un ensemble d'unicité signifie que φ est injective. Il est clair que φ est continue. Il reste à montrer que, si une suite (f_n) d'automorphismes analytiques de D et $f \in \mathrm{Aut}(D)$ sont tels que $f_n(z_i) \longrightarrow f(z_i)$, pour $i = 1, ..., d$, alors $f_n \longrightarrow f$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D.

Soit $g \in H(D, D)$ adhérent à la suite f_n. D'après le théorème 2.3, $g \in \mathrm{Aut}(D)$, et on a : $g(z_i) = f(z_i)$, $i = 1, ..., d$. Comme $(z_1, ..., z_d)$ est un élément d'unicité, $f = g$. Ainsi, f est le seul élément adhérent à la suite f_n, qui est contenue dans un compact. Alors $f_n \longrightarrow f$, et la proposition est démontrée.

Références bibliographiques

[1] E. Bedford, On the Automorphism Group of a Stein Manifold, Math. Ann. 266 (1983) 215-227.

[2] N. Bourbaki, Intégration, chapitre 7, Hermann, Paris, 1963.

[3] H. Cartan, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, J. Math. pures et appl., 9^{e} série, 11 (1931) 1-114.

[4] H. Cartan, Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, Math. Z. 35 (1932) 760-773.

[5] T. Franzoni, E. Vesentini, Holomorphic Maps and Invariant Distances, North-Holland Mathematics Studies 40, Amsterdam, 1980.

[6] B. Fridman, K. Kim, S. Krantz, D. Ma, On fixed Points and Determining Sets for Holomorphic Automorphisms, Michigan Math. J. 50 (2002) 507-515.

[7] L. Harris, Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, in Advances in Holomorphy, North-Holland Mathematical Studies 34, Amsterdam, 1979, 345-406.

[8] R. Narasimhan, Several Complex Variables, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago, 1971.

[9] J.-P. Vigué, Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^{e} série, 9 (1976) 203-282.