La distance de Carathéodory sur un produit continu de domaines bornés

Jean-Pierre Vigué

1. Introduction

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. On peut définir sur D un certain nombre de distances, par exemple, la distance de Carathéodory c_D et la distance de Kobayashi k_D. Ce sont toutes les deux des distances invariantes, en ce sens que, si $f : D \longrightarrow D'$ est une application holomorphe, on a, pour tous x et y appartenant à D,

$$c_{D'}(f(x), f(y)) \leq c_D(x, y).$$

De même,

$$k_{D'}(f(x), f(y)) \leq k_D(x, y).$$

Ceci entraîne en particulier que les automorphismes biholomorphes de D sont isométries. Il est à peu près évident que k_D vérifie la formule du produit : si D_1 et D_2 sont deux domaines bornés de $\mathbb{C}^{n_1}$ et $\mathbb{C}^{n_2}$ respectivement, alors,

$$k_{D_1 \times D_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(k_{D_1}(x_1, y_1), k_{D_2}(x_2, y_2)).$$

Le fait que la même égalité est vraie pour $c_{D_1 \times D_2}$, à savoir que

$$c_{D_1 \times D_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(c_{D_1}(x_1, y_1), c_{D_2}(x_2, y_2))$$

est beaucoup plus difficile. Elle a été démontrée par M. Jarnicki et P. Pflug [5] (voir aussi leur livre [6]).

On peut, bien sûr se poser la même question pour le produit de deux domaines bornés d'espaces de Banach complexe. Le résultat demeure exact dans ce cas d'après un résultat de J. Isidro et J.-P. Vigué [4]. La démonstration s'appuie sur le résultat de dimension finie de M. Jarnicki et P. Pflug en utilisant un résultat de S. Dineen, R. Timoney et J.-P. Vigué [1] sur l'approximation de la distance de Carathéodory sur un domaine D d'un espace de Banach complexe par la distance de Carathéodory sur des intersections de D avec des sous-espaces de dimension finie.

Cependant, en dimension infinie, il est naturel de considérer des produits infinis et, ce qui est sans doute plus intéressant, des produits continus au sens de J.-P. Vigué [12]. Nous ne serons pas capables ici de traiter le cas des produits infinis dans toute leur généralité mais nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit E un espace de Banach complexe et soit B sa boule-unité ouverte. Supposons que B est homogène. Soit S un espace topologique compact, et soit $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement strictement positive et bornée. Soit*

$$B_\varphi = \{f \in \mathcal{C}(S, E) \Big| \|f(s)\| < \varphi(s), \text{ pour tout } s \in S\}.$$

Alors, pour tous f et g appartenant à B_φ, on a :

$$c_{B_\varphi}(f,g) = \max_{s\in S} c_{B_{\varphi(s)}}(f(s), g(s)),$$

où $B_{\varphi(s)}$ est la boule de centre 0 et de rayon $\varphi(s)$ dans E. De même, pour la métrique infinitésimale de Reiffen-Carathéodory E_{B_φ}, on a, pour tout $f \in B_\varphi$, pour tout $v \in \mathcal{C}(S,E)$:

$$E_{B_\varphi}(f,v) = \max_{s\in S} E_{B_{\varphi(s)}}(f(s), v(s)).$$

Il faut remarquer que B_φ n'est pas homogène en général (voir J.-P. Vigué [13], où je démontre dans le cas $E = \mathbb{C}$, que B_φ est homogène si et seulement si φ est continue).

2. Rappels sur les domaines bornés homogènes

Rappelons d'abord qu'un domaine D d'un espace de Banach complexe E est dit homogène si le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ des automorphismes biholomorphes de D agit transitivement sur D. Un domaine D est dit symétrique si, pour tout $x \in D$, il existe un automorphisme biholomorphe σ_x de D tel que x soit un point invariant isolé de σ_x. On démontre dans [10] que, si D est un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe, alors D est homogène. Réciproquement, si la boule-unité ouverte B d'un espace de Banach complexe est homogène, alors B qui est visiblement symétrique par rapport à l'origine 0, est symétrique.

Si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe, on munit le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ de la topologie de la convergence uniforme locale [10]. Dans le cas où D est un domaine borné symétrique, le groupe $\mathrm{Aut}(D)$ a, de façon naturelle, une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie telle que l'application $\mathrm{Aut}(D) \times D \longrightarrow D$ définie par $(f,x) \mapsto f(x)$ soit analytique par rapport à l'ensemble des variables (voir [10]). Supposons de plus que l'origine 0 appartienne à D. On montre alors ([7] et [11]) qu'il existe une application analytique réelle $\theta : D \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)$ telle que, pour tout $a \in D$, $(\theta(a))(0) = a$. Par suite, l'application $(a,z) \longrightarrow (\theta(a))(z)$ est analytique réelle par rapport à l'ensemble des variables. [Par exemple, dans le cas où D est le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$, on peut prendre $(\theta(a))(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$].

Si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe, on note c_D la distance de Carathéodory sur D et E_D la métrique infinitésimale de Reiffen-Carathéodory sur D. Pour les définitions et les propriétés, nous renvoyons le lecteur à [3], [6], [8] et [9].

Soit B la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E. Il est facile de calculer la distance de Carathéodory de l'origine 0 à un point x de B et la métrique de Reiffen-Carathéodory à l'origine. On a le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soit B la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E. On a :*

$$c_B(0,x) = \omega(0, \|x\|) = \mathrm{th}^{-1}(\|x\|),$$

où ω désigne la distance de Poincaré sur le disque-unité Δ. De même,

$$E_B(0,x) = \|x\|.$$

Idée de la démonstration. Faisons la pour la distance de Carathéodory. Pour $x \neq 0$, l'application holomorphe $\varphi : \Delta \longrightarrow B$ définie par $\varphi(\zeta) = \zeta x/\|x\|$ est contractante pour c_Δ et c_B. Comme $c_\Delta = \omega$, on trouve que $c_B(0,x) \leq \omega(0, \|x\|)$. Réciproquement, considérons la forme linéaire définie sur $\mathbb{C}x$ par $\psi(x) = \|x\|$. D'après le théorème de Hahn-Banach, ψ se prolonge en une forme linéaire Ψ de norme 1 sur E. Le théorème de l'application ouverte montre que la restriction de Ψ à B est telle que $\Psi(B) \subset \Delta$ et le résultat s'en déduit facilement.

On peut alors remarquer que, si on suppose de plus que B est homogène, et si on connaît les automorphismes analytiques de B, on peut facilement calculer c_B et E_B.

3. Premiers résultats

Soit E un espace de Banach complexe, soit B sa boule-unité ouverte que nous supposerons homogène et soit S un espace topologique compact. L'espace $\mathcal{C}(S, E)$ des applications continues de S dans E est muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\| = \sup_{s \in S} \|f(s)\|.$$

Soit B_1 la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S, E)$. Alors, nous avons, dans ce cas, la formule du produit.

Proposition 3.1. *Pour tout $f \in B_1$, pour tout $g \in B_1$,*

$$c_{B_1}(f, g) = \sup_{s \in S} c_B(f(s), g(s))$$

De même, pour tout $f \in B_1$, pour tout $v \in \mathcal{C}(S, E)$,

$$E_{B_1}(f, v) = \sup_{s \in S} E_B(f(s), v(s)).$$

Démonstration. Si f=0, et comme B_1 est la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S, E)$, on sait que

$$c_{B_1}(0, g) = \text{th}^{-1}(\|g\|) = \sup_{s \in S}(\text{th}^{-1}(\|g(s)\|)).$$

Ainsi donc, dans ce cas, on a la formule du produit :

$$c_{B_1}(0, g) = \sup_{s \in S} c_B(0, g(s)).$$

Maintenant, si $f \neq 0$, l'application

$$\eta : g \mapsto \{s \mapsto \theta(f(s))^{-1}(g(s))\}$$

est un automorphisme analytique de B_1. Comme η est une isométrie pour la distance de Carathéodory, on en déduit que

$$c_{B_1}(f, g) = c_{B_1}(\eta(f), \eta(g)) = c_{B_1}(0, \eta(g)) = \sup_{s \in S} c_B(0, \theta(f(s))^{-1}(g(s))),$$

et, en utilisant le fait que $\theta(f(s))$ est une isométrie pour la distance de Carathéodory, on trouve que

$$c_{B_1}(f, g) = \sup_{s \in S} c_B(f(s), g(s)).$$

Le résultat est démontré. La démonstration pour E_D est tout à fait semblable et laissée en exercice au lecteur.

Remarquons également que, si ψ est une fonction continue bornée strictement positive, alors la formule du produit est vraie. En effet, B_ψ est analytiquement isomorphe à B_1. Il suffit pour cela de considérer l'application de B_ψ dans B_1 définie par

$$f \mapsto \{s \mapsto f(s)/\psi(s)\}.$$

On a donc :

$$c_{B_\psi}(f,g) = c_{B_1}(f/\psi, g/\psi) = \sup_{s\in S} c_B(f(s)/\psi(s), g(s)/\psi(s)) = \sup_{s\in S} c_{B_{\psi(s)}}(f(s), g(s)).$$

Le théorème 1.1 est donc démontrée quand φ est continue.

4. Démonstration du théorème 1.1

Comme précédemment, nous donnerons la démonstration pour la distance de Carathéodory, celle pour la métrique infinitésimale de Reiffen-Carathéodory qui est très semblable est laissée en exercice au lecteur. Nous avons le premier résultat suivant. Pour tout $s \in S$, l'application de B_φ dans $B_{\varphi(s)}$ définie par $f \mapsto f(s)$ est holomorphe. Par suite,

$$c_{B_{\varphi(s)}}(f(s), g(s)) \leq c_{B_\varphi}(f,g).$$

En considérant ce résultat pour tout $s \in S$, on en déduit :

$$\sup_{s\in S} c_{B_{\varphi(s)}}(f(s), g(s)) \leq c_{B_\varphi}(f,g).$$

Maintenant, pour toute fonction ψ continue inférieure ou égale à φ, l'injection $B_\psi \longrightarrow B_\varphi$ est holomorphe. Par suite, si on suppose que f et g appartiennent à B_ψ, on a :

$$\sup_{s\in S} c_{B_{\varphi(s)}}(f(s), g(s)) \leq c_{B_\varphi}(f,g) \leq c_{B_\psi}(f,g) = \sup_{s\in S} c_{B_{\psi(s)}}(f(s), g(s)).$$

La deuxième inégalité vient du fait que $B_\psi \longrightarrow B_\varphi$ est contractante, l'égalité finale provient de la remarque précédente.

On a le lemme suivant.

Lemme 4.1. *L'application*

$$s \mapsto c_{B_{\varphi(s)}}(f(s), g(s))$$

est semi-continue supérieurement.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $c_{B_{\varphi(s_0)}}(f(s_0), g(s_0)) < m$. Il faut montrer qu'on a la même inégalité pour tous les points s appartenant à un voisinage U de s_0. Le fait que, pour $r < r'$, B_r soit contenu dans $B_{r'}$ montre que $r \mapsto c_{B_r}(a,b)$ est une fonction décroissante et continue de r. Il existe donc $c_0 < \varphi(s_0)$ tel que,

$$\forall c > c_0,\ c_{B_c}(f(s_0), g(s_0)) < m.$$

On trouve donc un voisinage $U(s_0)$, tel que, pour tout $s \in U(s_0)$,

$$c_{B_{\varphi(s)}}(f(s_0), g(s_0)) < m.$$

D'autre part, on a :

$$c_{B_{\varphi(s)}}(f(s),g(s)) \leq c_{B_{\varphi(s)}}(f(s),f(s_0)) + c_{B_{\varphi(s)}}(f(s_0),g(s_0)) + c_{B_{\varphi(s)}}(g(s_0),g(s)).$$

Ceci montre qu'on peut trouver un voisinage $W(s_0) \subset U(s_0)$ tel que, pour tout $s \in W(s_0)$, la quantité considérée soit inférieure à m. Le lemme est démontré.

On a le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soit φ semi-continue inférieurement, soient f et g continues telles que $f(s) < \varphi(s)$ et $g(s) < \varphi(s)$, pour tout $s \in S$. Soit $s_0 \in S$. Alors il existe ψ continue telle que $f < \psi \leq \varphi$, $g < \psi \leq \varphi$ et $\psi(s_0) = \varphi(s_0)$.*

Idée de la démonstration. On peut construire une suite de voisinages $(U_n)_{n>1}$ de s_0 tels que $U_{n+1} \subset\subset U_n$ et que, pour tout $s \in \overline{U_n}$,

$$\varphi(s) \geq \varphi(s_0)(1 - \frac{1}{n}).$$

On définit alors une fonction continue ψ_0 de la façon suivante :
- sur le complémentaire de U_2, $\psi_0 = 0$;
- sur $\overline{U_n} \backslash U_{n+1}$, on définit ψ_0 comme une fonction continue à valeurs dans le segment $[\varphi(s_0)(1 - \frac{1}{n-1}), \varphi(s_0)(1 - \frac{1}{n})]$, égale à $\varphi(s_0)(1 - \frac{1}{n-1})$ sur ∂U_n et à $\varphi(s_0)(1 - \frac{1}{n})$ sur ∂U_{n+1} (une telle fonction existe car S est normal);
- enfin, $\psi_0(s) = \varphi(s_0)$sur $\cap \overline{U_n}$.

Il est facile de vérifier que ψ_0 est continue et inférieure ou égale à φ.
D'autre part, $\varphi - f$ et $\varphi - g$ sont semi-continues inférieuremnt et strictement positives. Ces fonctions atteignent leur minimum qui est supérieur ou égal à 2ε pour un certain $\varepsilon > 0$. La fonction

$$\psi(s) = \sup(\psi_0(s), f(s) + \varepsilon, g(s) + \varepsilon)$$

répond à la question.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.1. Pour cela, f, g et $\varepsilon > 0$ étant donnés, nous allons construire une fonction continue ψ telle que

$$c_{B_\psi}(f,g) = \sup_{s \in S} c_{B_{\psi(s)}}(f(s),g(s)) \leq \sup_{s \in S} c_{B_{\varphi(s)}}(f(s),g(s)) + \varepsilon.$$

D'après le lemme 4.2, pour tout $s \in S$, il existe une fonction continue ψ_s telle que $\psi_s(s) = \varphi(s)$ et $\|f(t)\| < \psi(t)$, $\|g(t)\| < \psi(t)$, pour tout $t \in S$. On a donc :

$$c_{B_{\psi_s(s)}}(f(s),g(s)) = c_{B_{\varphi(s)}}(f(s),g(s)).$$

Pour tout t, $B_{\psi_s(t)}$ est contenu dans $B_{\varphi(t)}$ ce qui entraîne que

$$c_{B_{\psi_s(t)}}(f(t),g(t)) \geq c_{B_{\varphi(t)}}(f(t),g(t)).$$

D'autre part, $t \mapsto c_{B_{\psi_s(t)}}(f(t),g(t))$ est continue. Il existe donc un voisinage $U(s)$ de s tel que, pour tout $t \in U(s)$, on ait :

$$c_{B_{\varphi(s)}}(f(s),g(s)) + \varepsilon \geq c_{B_{\psi_s(t)}}(f(t),g(t)) \geq c_{B_{\varphi(t)}}(f(t),g(t)).$$

Les $(U(s))_{s\in S}$ forment un recouvrement ouvert de S. On peut en extraire un recouvrement fini $U(s_1),...,U(s_n)$. On considère $\psi = \sup \psi_{s_1},...,\psi_{s_n}$. On a, pour tout t :

$$c_{B_{\psi(t)}}(f(t),g(t)) \geq c_{B_{\varphi(t)}}(f(t),g(t)).$$

Soit $t \in U(s_i)$. Il est clair que

$$c_{B_{\psi(t)}}(f(t),g(t)) \leq c_{B_{\psi_{s_i}(t)}}(f(t),g(t)) \leq c_{B_{\varphi(s_i)}}(f(s_i),g(s_i)) + \varepsilon.$$

On en déduit que

$$c_{B_\psi}(f,g) \leq \sup_{i=1,...,n} c_{B_{\varphi(s_i)}}(f(s_i),g(s_i)) + \varepsilon \leq \sup_{s\in S} c_{B_{\varphi(s)}}(f(s),g(s)) + \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, on en déduit l'égalité annoncée avec des bornes supérieures. Comme la fonction considérée est semi-continue supérieurement, il est clair que la borne supérieure est en fait un maximum. Le théorème est démontré.

Bibliographie

[1] S. Dineen, R. Timoney, J.-P. Vigué. Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **12** (1985), 515-529.(1986).

[2] S. Dineen. The Schwarz lemma. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1989.

[3] T. Franzoni, E. Vesentini. Holomorphic maps and invariant distances. Notas de Matemtica [Mathematical Notes], 69. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[4] J. Isidro, J.-P. Vigué. On the product property of the Caratéodory pseudodistance. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **11** (2000), 21-26.

[5] M. Jarnicki, P. Pflug. The Carathéodory pseudodistance has the product property. Math. Ann. **285** (1989), 161-164.

[6] M. Jarnicki, P. Pflug. Invariant distances and metrics in complex analysis. de Gruyter Expositions in Mathematics, 9. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[7] W. Kaup. Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds. Math. Ann. **228** (1977), 39-64.

[8] S. Kobayashi. Intrinsic distances, measures and geometric function theory. Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357-416.

[9] S. Kobayashi. Hyperbolic complex spaces. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 318. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[10] J.-P. Vigué. Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **9** (1976), 203-281.

[11] J.-P. Vigué. Les domaines bornés symétriques d'un espace de Banach complexe et les systèmes triples de Jordan. Math. Ann. **229** (1977), 223-231.

[12] J.-P. Vigué. Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **11** (1978), 229-246.

[13] J.-P. Vigué. Automorphismes analytiques des domaines produits. Ark. Mat. **36** (1998), 177-190.

Jean-Pierre Vigué
UMR CNRS 6086
Université de Poitiers
Mathématiques
SP2MI, BP 30179
86962 FUTUROSCOPE
e-mail : vigue@math.univ-poitiers.fr