TRAVAUX DE RECHERCHE
de Jean-Pierre Vigué

Mes travaux ont porté essentiellement sur des problèmes de géométrie analytique et j'ai étudié principalement les sujets suivants.

Mes premiers travaux ont porté sur les opérateurs différentiels sur les espaces analytiques. Dans un article publié en 1973 aux Inventiones [4], j'ai montré que l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels sur une courbe irréductible est une algèbre de type fini. Ceci répond à une question de B. Malgrange. J'ai aussi dans [8] (publié en 1975) généralisé un exemple de I. Bernstein, I. Gel'fand et S. Gel'fand.

Ensuite, dans ma thèse d'Etat publiée en 1976 aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure [11], j'ai étudié le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe. J'ai défini sur ce groupe la topologie de la convergence uniforme locale et j'ai montré que, pour un domaine borné symétrique D, le groupe $G(D)$ a une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie. De plus, j'ai montré qu'un domaine borné symétrique D est analytiquement isomorphe à un domaine borné disqué. L'étude des automorphismes des domaines bornés et plus généralement des variétés analytiques a été un sujet très important durant toute ma carrière. On peut citer, entre autres, un papier sur les automorphismes analytiques des domaines de Reinhardt bornés [24] (publié en 1984 aux Annales de l'Institut Fourier), un article [41] avec W. Kaup (publié en 1990 aux Mathematische Annalen) sur l'ensemble des points où un domaine borné D possède une symétrie. Dans [61], publié en 1998 aux Arkiv Mat., j'ai étudié les automorphismes analytiques des domaines produits. Enfin citons un article tout récent [74], avec J.-J. Loeb, sur les limites d'automorphismes analytiques d'une variété hyperbolique qui doit paraître prochainement au Bull. Sci. Math.

Une partie importante de mon travail a été consacré aux points fixes d'applications holomorphes. Ainsi, j'ai montré dans une Note au CRAS [38] parue en 1986 le résultat suivant : soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe. Alors l'ensemble Fix$f$ des points fixes de f est une sous-variété analytique complexe de D. De plus, j'ai montré dans un article [31] publié en 1985 aux Trans. AMS que, si D est convexe, Fix$f$ est connexe et rétracte holomorphe de D. C'est un sujet sur lequel j'ai beaucoup travaillé jusqu'à aujourd'hui, généralisant une partie de ces résultats à la dimension infinie avec P. Mazet dans deux articles, [43] publié en 1991 aux Acta Math., et [52] publié en 1992 au Bull. Sci. Math. J'ai aussi travaillé avec M. Abate sur les points fixes communs d'une famille d'applications holomorphes [44] (travail publié en 1991 aux Proc. AMS) et avec L. Belkhchicha [68] (2003) sur les points fixes sur un produit. On peut aussi rattacher à cette question les résultats obtenus sur les ensembles d'unicité, que ce soit seul dans un article [70] publié en 2005 aux Annales de l'Institut Fourier, ou en collaboration avec B. Fridman et D. Ma dans deux articles récents ([72] et [73]).

Enfin, j'ai aussi beaucoup étudié les distances et métriques invariantes (essentiellement celles de Carathéodory et de Kobayashi). Dans un certain nombre d'articles, j'étudie leurs propriétés. Par exemple, dans [32], publié avec S. Dineen et R. Timoney en 1985 aux Annales de Pise, je généralise à la dimension infinie un résultat sur la distance de Carathéodory sur un produit démontré par M. Jarnicki et P. Pflug en dimension finie. On peut aussi citer l'article [71] publié en 2006 à l'Indiana Univ. J. où je calcule la distance de Carathéodory sur un produit continu de domaines bornés.

J'ai aussi utilisé la métrique de Carathéodory pour la caractérisation des automorphismes analytiques. Les résultats obtenus sont, dans une certaine mesure, des généralisations du lemme de Schwarz. Le premier résultat sur cette question est le théorème suivant [30] publié en 1984 aux CRAS. Soient D_1 et D_2 deux domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, et supposons que D_1 soit convexe. Soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$ une application holomorphe telle qu'il existe un point a de D_1 tel que $f'(a)$ soit une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory. Alors, f est un isomorphisme analytique de D_1 sur D_2. Des résultats semblables utilisant la métrique infinitésimale de Kobayashi ont été montrés par mon étudiant, L. Belkhchicha. J'ai aussi traité des cas de dimension infinie (voir par exemple l'article [55] publié en 1994 aux Annales de Pise et un résultat récent [75] à paraître).

Je vais maintenant analyser mes travaux en détails.

1) Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]

J'ai étudié les opérateurs différentiels sur les espaces analytiques et j'ai apporté une réponse partielle à une question posée par B. Malgrange : ainsi, si (X, x) est un germe de courbe irréductible, l'algèbre $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ des germes d'opérateurs différentiels sur (X, x) et l'algèbre graduée associée $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x}))$ sont des $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbres de type fini [1 et 4]. La démonstration utilise le fait que le normalisé de (X, x) est $(\mathbb{C}, 0)$. Cependant, ce résultat ne se généralise pas à un germe d'espace analytique dont le normalisé est $(\mathbb{C}^n, 0)$ [voir 1, 2, 4 et 7].

J'ai aussi montré dans [3] que les opérateurs différentiels sur un produit de germes d'espaces analytiques proviennent d'opérateurs différentiels sur chacun des facteurs.

Enfin, dans [6 et 8], j'ai généralisé un exemple de I. Bernstein, I. Gel'fand et S. Gel'fand: si $(X, 0)$ est un cône normal de dimension 2, plongé dans $\mathbb{C}^3$, construit sur une courbe projective lisse de genre g supérieur ou égal à 1, alors l'algèbre $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,0})$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre de type fini.

2) Automorphismes des domaines bornés et domaines bornés symétriques [5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 22, 24, 27, 29, 41, 47, 53, 61, 74]

Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ a été étudié par Henri Cartan qui a montré que c'était un groupe de Lie réel. Ce travail a permis à Élie Cartan de donner une classification complète des domaines bornés symétriques. Soit maintenant D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. J'ai étudié le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques de D. J'ai muni ce groupe $G(D)$ de la topologie de la convergence uniforme locale qui est la généralisation naturelle à la dimension infinie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Cette topologie fait de $G(D)$ un groupe topologique complet. J'ai aussi construit l'algèbre de Lie $g(D)$ des transformations infinitésimales de D, et $g(D)$ est une algèbre de Lie banachique réelle. Cependant, j'ai montré par un exemple que $G(D)$ n'est pas, en général, un groupe de Lie [5, 9, 11, 29 et 53]. J'ai généralisé ultérieurement une partie de ces résultats au cas du groupe des automorphismes analytiques isométriques d'une variété complexe normée [19].

Les difficultés rencontrées dans cette étude proviennent sans doute du fait que le domaine D n'a pas assez d'automorphismes analytiques. Aussi, je me suis intéressé aux domaines bornés symétriques et aux variétés symétriques [10, 11 et 19]. Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Rappelons qu'une symétrie par rapport à un point x de D est un automorphisme analytique σ_x de D tel que $\sigma_x(x) = x$ et que $\sigma'_x(x) = -\mathrm{id}$. On dit alors que D est symétrique si D est symétrique par rapport à tout point x de D. J'ai montré d'abord que tout domaine borné symétrique est homogène sous l'action du groupe $G(D)$. Bien sûr, les arguments sur les familles normales ne peuvent pas être utilisés et doivent être remplacés par des calculs directs. Je donne en particulier dans [11] une caractérisation très précise d'un élément du groupe $G(D)$ à l'aide de sa valeur en un point et de la valeur de sa dérivée en ce point. Je démontre aussi un résultat semblable pour l'algèbre de Lie $g(D)$. Une longue étude de l'algèbre de Lie $g(D)$ et de ses automorphismes m'a permis alors de montrer que D est isomorphe à un domaine borné cerclé étoilé. Dans cette réalisation de D, il existe une application trilinéaire continue $Z : E^3 \longrightarrow E$ telle que, pour tout $\xi \in E$,

$$x \longmapsto \xi + Z(\xi, x, x)$$

appartienne à $g(D)$. [$Z(\xi, x, x) = -\{x\xi x\}$ dans les notations de W. Kaup]. On dit que (E, Z) est le système triple de Jordan associé à D. De plus, dans cette réalisation de D, les éléments du groupe d'isotropie de l'origine sont linéaires, et j'ai donné de ces éléments une caractérisation algébrique à l'aide de l'application Z. On déduit de ces résultats (à l'aide d'un théorème de L. Harris et W. Kaup) que, si D est un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe, $G(D)$ est un groupe de Lie réel (voir [10, 11, 19, 20 et 29]).

A un système triple de Jordan (E, Z) est associé en général, non un domaine borné, mais une variété symétrique. Dans [12], je montre une condition nécessaire et suffisante pour que cette variété soit un domaine borné symétrique. Je montre également (voir aussi [12 et 14]) que l'on peut facilement retrouver le domaine D à partir du système triple de Jordan (E, Z). Le domaine D est justement la composante connexe contenant l'origine de l'ensemble

$$\{x \in E \,\big|\, \mathrm{id} + Z(.,x,x) \in \mathrm{Isom}(E)\}.$$

Le théorème de H. Cartan sur les automorphismes du produit de deux domaines bornés se généralise de la façon suivante : on dit que $p : \mathcal{E} \longrightarrow S$ est un espace de Banach au-dessus de S si chaque fibre $\mathcal{E}_s = p^{-1}(s)$ est munie d'une structure d'espace de Banach. On définit alors [13] un domaine borné D contenu dans l'espace de Banach $\Gamma(S, \mathcal{E})$ des sections continues bornées de $\mathcal{E}$, produit continu de domaines D_s de $\mathcal{E}_s$. [Un exemple simple est $\mathcal{E} = E \times S$; alors, $\Gamma(S, \mathcal{E})$ est l'espace de Banach des applications continues bornées de S dans E, et la boule-unité ouverte B de $\Gamma(S, \mathcal{E})$ est produit continu (indexé par S) de copies de la boule-unité ouverte B_0 de E]. Moyennant quelque hypothèses techniques sur D (qui sont vérifiées dans l'exemple précédent), j'ai montré que, pour tout automorphisme

φ de D suffisamment proche de l'identité, il existe une famille $(\varphi_s)_{s\in S}$ d'automorphismes de D_s tels que, pour tout $f \in D$, on ait,

$$[\varphi(f)](s) = \varphi_s(f(s)).$$

Si D est un domaine borné symétrique, chacun des D_s est donc symétrique. On en déduit une définition des domaines bornés symétriques irréductibles dans un espace de Banach. Comme application de ce résultat, je montre dans [17] que, si D est un domaine borné cerclé symétrique d'un espace de Banach complexe E, il existe un espace de Banach $\mathcal{E}$ au-dessus de S, un domaine borné cerclé symétrique Δ de $\Gamma(S, \mathcal{E})$ produit continu de domaines bornés cerclés symétriques irréductibles D_s de $\mathcal{E}_s$, et un isomorphisme linéaire ϕ de E sur un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(S, \mathcal{E})$ tel que D soit isomorphe à $\phi(E) \cap \Delta$. Ce résultat donne une espèce de décomposition de D en produit continu de domaines bornés symétriques irréductibles.

Dans [24], je donne une classification complète des domaines de Reinhardt bornés symétriques d'un espace de Banach à base. Je donne aussi une classification des domaines de Reinhardt bornés D tels que l'orbite de l'origine sous l'action de $G(D)$ soit une sous-variété complexe de codimension 1. Enfin, je montre, par des méthodes très élémentaires que, pour certains domaines cerclés bornés, tous les automorphismes analytiques laissent l'origine fixe.

Dans [22 et 27], j'ai étudié, en collaboration avec J. Isidro, la topologie de la convergence uniforme locale sur le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques de D. Dans [22], nous montrons que, si D est un domaine cerclé borné, la topologie de la convergence uniforme locale coïncide sur $G(D)$ avec la topologie de la convergence uniforme sur D. Ce résultat, qui est nouveau, même en dimension finie, repose sur une étude précise du groupe $G(D)$. Nous avons aussi étudié [27] la topologie de la convergence uniforme locale sur le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine de Siegel symétrique D. Nous avons montré qu'elle est égale à la topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée complètement intérieure à D.

Dans [41], en collaboration avec W. Kaup, j'ai étudié l'ensemble $S(D)$ des points x de D tels qu'il existe une symétrie σ_x par rapport à x. Quand D est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, nous avons montré que $S(D)$ est une sous-variété analytique réelle fermée de D. En dimension infinie, ceci n'est vrai que sous une hypothèse supplémentaire. Nous avons étudié ensuite l'ensemble $C(D)$ des points $x \in D$ tels qu'il existe un groupe à un paramètre σ_θ d'automorphismes analytiques de D tel que $\sigma_\theta(x) = x$, et que $\sigma'_\theta(x).v = e^{i\theta}v$. Nous avons montré que $C(D)$ est une sous-variété complexe fermée de D. Dans le cas d'un domaine cerclé borné D, nous avons obtenu le résultat plus précis suivant : $S(D)$ est égal à $C(D)$, et c'est aussi l'orbite de l'origine sous l'action du groupe $G(D)$. Dans ce cas, $S(D)$ est donc une sous-variété complexe fermée de D. On déduit de cette construction une nouvelle démonstration du résultat suivant : deux domaines cerclés bornés sont analytiquement isomorphes si et seulement si ils sont linéairement isomorphes.

D'autre part, dans [47], j'ai montré que, si f est un automorphisme analytique d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E, et si $a \in D$ est tel que $f(a) = a$, alors il existe une carte locale φ d'un voisinage U de a sur un voisinage V de 0, tel que, dans la carte φ, f soit linéaire. (Ceci généralise un résultat de Henri Cartan).

Dans [61], j'étudie les automorphismes analytiques de certains domaines produits D de l'espace $\mathcal{C}(S, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur un espace topologique compact S. Pour de tels domaines, je sais décrire complètement les automorphismes analytiques et caractériser l'orbite de l'origine.

Dans [74], je généralise, avec J.-J. Loeb, certains résultats démontrés par H. Cartan dans le cas d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ au cas d'une variété hyperbolique X de dimension finie. Ainsi, si une suite d'automorphismes (f_n) de X converge uniformément sur tout compact vers f, alors f est un automorphisme analytique de X. Nous montrons aussi dans ce cas un théorème sur la caractérisation des automorphismes analytiques par le comportement de la suite des itérées.

3) Distances invariantes [15, 16, 21, 23, 26, 30, 32, 33, 34, 37, 40, 45, 46, 49, 50, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 71, 75]

Les distances invariantes sont importantes pour l'étude des domaines bornés symétriques. Ainsi, dans [16], l'étude de la métrique infinitésimale de Carathéodory sur un domaine borné cerclé symétrique D m'a permis de montrer, dans certains cas, que D est convexe.

On peut aussi utiliser les distances invariantes pour caractériser les automorphismes analytiques des domaines bornés. Ainsi, on peut reformuler un résultat de H. Cartan de la façon suivante : soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe telle qu'il existe un point a de D tel que $f(a) = a$ et que $f'(a)$ soit une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory. Alors, f est un automorphisme analytique de D.

Dans [30 et 33], j'ai montré que le résultat de H. Cartan reste vrai pour un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^n$, sans supposer que le point a est fixe. La démonstration utilise, de façon essentielle, les géodésiques complexes définies par E. Vesentini et les distances invariantes. Je sais aussi généraliser ce résultat à certains domaines non convexes en utilisant la métrique infinitésimale de Kobayashi [37]. Plus récemment, je me suis intéressé [66] aux applications holomorphes $f : D_1 \longrightarrow D_2$ (où D_1 et D_2 sont des domaines bornés de $\mathbb{C}^n$) qui sont des isométries pour la métrique infinitésimale de Kobayashi en un point. Dans certains cas, je sais montrer qu'alors f est un revêtement de D_1 sur D_2. Dans le cas où $D_1 = D_2$, je montre que, en général, f est un automorphisme analytique.

Dans le cas de la dimension infinie, j'ai d'abord montré [21] que, même si $f(a) = a$ et si $f'(a)$ est une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, ceci n'entraîne pas forcément que f soit un automorphisme analytique de D. Ensuite, j'ai montré [32] (avec S. Dineen et R. Timoney) que, sur un domaine convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe, les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident. Ce résultat est une étape nécessaire à la généralisation de [30 et 33] à la dimension infinie. Malheureusement, les premiers résultats obtenus en dimension infinie (voir [15, 32, 37]) n'étaient pas aussi satisfaisants qu'en dimension finie. Plus récemment, j'ai montré le résultat suivant [55] (voir aussi [58]) : soit D un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif E, soit a un point de D, et soit f une application holomorphe de D dans la boule-unité B de E telle que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Kobayashi. Alors, sous une hypothèse technique qui est vérifiée si B est strictement convexe, f est un isomorphisme analytique de D sur B. Les mêmes méthodes permettent aussi de caractériser les domaines bornés convexes de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui sont isomorphes à la boule-unité ouverte de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Dans [75], en collaboration avec M. Abate, j'étudie le problème suivant : Soient $D_1 \subset E_1$ et $D_2 \subset E_2$ deux domaines bornés d'espaces de Banach complexes. Soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$ une application holomorphe et supposons qu'il existe un point a de D_1 tel que $f'(a)$ soit une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory. Alors, est-ce que $f(D_1)$ est une sous-variété analytique de D_2 ? Nous sommes capables de montrer ce résultat pour les boules-unités ouvertes de $\ell^\infty(I)$ et de $C(S, \mathbb{C})$.

D'autre part, j'ai montré dans [64] que la métrique infinitésimale de Kobayashi au voisinage d'un point a d'un domaine D suffit, dans certains cas, à caractériser D. Je l'ai montré en particulier, pour un domaine hyperbolique de $\mathbb{C}$, pour un domaine borné strictement convexe de $\mathbb{C}^n$ et pour des domaines bornés analytiquement isomorphes à la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme.

Dans [46], j'ai montré, en utilisant les distances invariantes, une forme très précise du lemme de Schwarz valable pour les domaines bornés strictement convexes et les domaines bornés symétriques irréductibles de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, si D est un domaine borné symétrique irréductible réalisé comme la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|.\|$ et si $f : D \longrightarrow D$ est une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et que $\|f(z)\| = \|z\|$ pour tous les points z d'un ouvert non vide U de D, alors f est un automorphisme linéaire de D. J'ai généralisé ce résultat dans [54] en utilisant la métrique infinitésimale de Carathéodory. Enfin, dans [60], j'étudie le cas d'une application holomorphe $f : B_1 \longrightarrow B_2$, (où B_1 et B_2 sont des boules-unités ouvertes dans des espaces de dimensions différentes) telle que $f'(0)$ soit une isométrie. Je généralise aussi à ce cas le lemme de Schwarz et je donne des conditions suffisantes pour que $f(0) = 0$ et que f soit linéaire égale à $f'(0)$.

Dans toutes ces questions, les géodésiques complexes et leur unicité éventuelle jouent un rôle important. Dans [67], j'étudie les rapports entre l'unicité des géodésiques complexes dans un domaine borné convexe D, la stricte convexité du domaine et la stricte convexité des boules pour la distance de Carathéodory.

J'ai aussi publié un certain nombre d'exemples concernant la distance de Carathéodory : j'ai construit d'abord [23] un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ tel que les boules pour la distance de Carathéodory soient relativement compactes dans D et que, cependant, la distance de Carathéodory ne soit pas égale à la distance intégrée de Carathéodory. Ce résultat répond à une question de S. Kobayashi. Dans [26], j'ai montré que, même si la pseudodistance de Carathéodory c_X est une vraie distance sur un espace analytique X de dimension finie, elle ne définit pas forcément la topologie de X. En collaboration avec P. Pflug et M. Jarnicki [45], j'ai construit un autre exemple dans lequel X est un domaine de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 3)$. (Ces résultats répondent à une question de N. Sibony et T. Barth). Nous avons aussi montré que les boules fermées pour la distance de Carathéodory c_X ne sont pas toujours égales à la fermeture des boules ouvertes [49]. Enfin, nous avons construit [50] un espace analytique X c_X-complet tel que les boules pour c_X ne soient pas toujours relativement compactes dans X. (Ceci répond à une question de S. Kobayashi).

Dans [59], j'ai étudié la pseudodistance intégrée de Carathéodory c^i_X sur une variété complexe X. J'ai montré le résultat suivant : X est c^i_X-hyperbolique (ce qui signifie que

c^i_X est une distance sur X) est équivalent à une propriété de séparation faible pour la distance de Carathéodory c_X : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in U$ distinct de x, $c_X(x,y) \neq 0$. J'ai aussi donné des exemples de variétés c^i_X-hyperboliques et non c_X-hyperboliques.

Dans [62] et [63], je commence par préciser les rapports entre les géodésiques complexes et les rétractions holomorphes sur des sous-variétés isomorphes au disque-unité Δ. Ensuite, j'étudie des résultats sur l'existence et l'unicité de telles rétractions holomorphes. La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude de rétractions holomorphes sur d'autres sous-variétés de dimension 1. Cette étude m'amène en particulier à définir de nouvelles distances invariantes.

Dans [65], je montre (en collaboration avec J. Isidro) que, pour certains produits infinis de domaines bornés $(D_s)_{s\in S}$, la distance de Carathéodory vérifie la propriété suivante :

$$c_D(f,g) = \sup c_{D_s}(f(s),g(s)).$$

Ceci généralise un résultat de dimension finie de M. Jarnicki et P. Pflug. Dans [71], je montre (et c'est plus difficile), que ce résultat demeure exact pour certains produits continus de domaines bornés.

Signalons enfin [34] un résultat sur la distance de Kobayashi sur une variété banachique complexe. J'ai montré qu'on pouvait l'obtenir comme une distance intégrée.

4) Points fixes d'applications holomorphes [25, 28, 31, 33, 36, 38, 42, 43, 44, 47, 48, 51, 52, 57, 68, 69, 70, 72, 73]

Si D est un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^n$, j'ai montré dans [25, 31, 33] que l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f : D \longrightarrow D$ est une sous-variété connexe de D et, s'il est non vide, est rétracte holomorphe de D. La démonstration utilise la distance de Carathéodory et les géodésiques complexes au sens de Vesentini. Dans [36], j'étudie les points fixes d'une limite d'applications holomorphes, et je montre différents résultats sur l'existence et la dimension de l'ensemble des points fixes de la limite. Quand D est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, non nécessairement convexe, je montre dans [38], en utilisant des résultats de H. Cartan et de E. Bedford, que l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe $f : D \longrightarrow D$ est encore une sous-variété analytique de D (non connexe en général). Dans certains cas, je sais montrer que toutes ses composantes connexes ont la même dimension.

Dans [57], j'étudie les rapports entre les points fixes d'une application holomorphe f d'un domaine borné D dans lui-même et le comportement de la suite des itérées. Je m'intéresse spécialement au cas d'une application holomorphe $f : M \times D \longrightarrow D$ dépendant d'un paramètre complexe $m \in M$, et je montre en particulier que l'ensemble des points fixes dépend analytiquement de m. Sous une hypothèse de stricte convexité du domaine borné D, je montre (avec L. Belkhchicha) [68] que l'ensemble des points fixes de f est, en général, indépendant de $m \in M$. Ce résultat permet en particulier d'étudier les points fixes sur un produit de domaines bornés.

Avec M. Abate, j'ai montré [44] le théorème d'existence suivant : soit D un domaine borné convexe de $\mathbb{C}^n$ et soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $f : D \longrightarrow D$ continues sur $\bar{D}$, holomorphes dans D qui commuttent deux à deux. Alors, elles ont un point fixe commun.

Ce résultat avait déjà été démontré dans certains cas particuliers, mais nous avons montré le cas général. Nous avons aussi étudié le cas où D est une surface de Riemann compacte.

L'étude de l'ensemble des points fixes en dimension infinie est plus délicat. J'ai d'abord obtenu un résultat partiel [28] pour un produit fini de boules-unités d'espaces de Hilbert. Ensuite, en collaboration avec P. Mazet [43], j'ai démontré les résultats suivants : soit D un domaine borné d'un espace de Banach réflexif E, et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe. Alors, l'ensemble $\mathrm{Fix} f$ des points fixes de f est une sous-variété directe de D. Si on suppose de plus que D est convexe et que $\mathrm{Fix} f$ est non vide, alors $\mathrm{Fix} f$ est rétracte holomorphe de D. La démonstration repose sur l'étude de la suite

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id} + f + ... + f^{n-1}\right)$$

et de sa limite. Dans le cas où E est un espace de Banach quelconque, la conclusion du théorème reste inchangée à condition de faire une hypothèse supplémentaire sur le spectre de la dérivée de f. Nous avons aussi redémontré [52] ces résultats en utilisant des distances de type Carathéodory et des résultats sur les points fixes des applications holomorphes contractantes, ce qui donne des résultats et des majorations plus précis.

Plus récemment, j'ai étudié dans [69] et [70] le problème suivant : soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. On dit que $(n+1)$ points $a_1, ..., a_{n+1}$ de D^{n+1} forment un ensemble d'unicité pour $H(D, D)$ (resp. $\mathrm{Aut}(D)$) si, pour tout $f \in H(D, D)$ (resp. $\mathrm{Aut}(D)$), $f(a_i) = a_i, i = 1, ..., n+1$ entraîne que $f = \mathrm{id}$. J'ai montré en particulier dans [69] que l'ensemble W des ensembles d'unicité pour $\mathrm{Aut}(D)$ forme un ouvert dense de D^{n+1}. Au contraire, dans le cas de $H(D, D)$ [70], W est non vide mais n'est pas dense dans D^{n+1} en général. Dans [73], en collaboration avec B. Fridman et D. Ma, je généralise ce premier résultat pour le groupe des automorphismes analytiques d'une variété hyperbolique complexe en utilisant des arguments de géométrie différentielle.

Dans [72], avec B. Fridman et D. Ma, j'étudie les propriétés de l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe d'un domaine borné dans lui-même. Dans le cas où cet ensemble est discret, nous étudions en particulier son cardinal.

D'autre part, j'ai montré dans [47] et en collaboration avec J.-B. Poly [51] des résultats sur la linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe. (Ce résultat a des applications pour l'étude des points fixes et des automorphismes analytiques des domaines bornés).

5) Enveloppes d'holomorphie, spectre d'algèbre de fonctions holomorphes [18, 35, 39]

Suivant des idées de H. Cartan, j'ai montré qu'on pouvait construire une enveloppe d'holomorphie dans la catégorie des espaces analytiques localement irréductibles sur lesquels les fonctions holomorphes globales séparent localement les points. Je retrouve également l'enveloppe d'holomorphie des espaces normaux K-complets [18].

Avec S. Hayes, j'ai montré [35] qu'il existe un espace analytique X de dimension finie tel que le spectre $S_c(\mathcal{O}(X))$ de l'algèbre des fonctions holomorphes globales sur X ne soit, en aucun point, localement compact. Nous avons aussi montré [39] que le spectre n'est pas, en général, un k-espace.