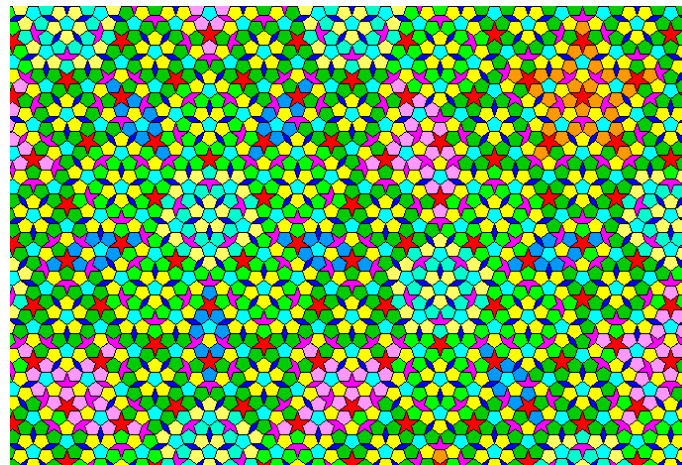


Symmetrien und Pflasterungen



Alessandra Sarti
Universität Mainz

Symmetrien



- Schneeflocken und Sonnenblumen haben viele Symmetrien.
- Die Gesamtheit aller Transformationen, die eine Schneeflocke (oder eine Sonnenblume) auf sich selbst abbilden, heißt die **Symmetriegruppe** der Schneeflocke (bzw. der Sonnenblume).

- Die Mathematiker Felix Klein (1849-1925) und Èvariste Galois (1811-1832):



Gruppen

● Eine **Gruppe** ist eine nicht-leere Menge G mit einer Operation $*$, mit den folgenden Eigenschaften:

▶ Für $x, y, z \in G$ gilt $(x * y) * z = x * (y * z)$ (Assoziativität).

▶ Es gibt ein Element e in G mit $e * x = x * e = x$ für alle x in G (neutrales Element).

▶ Zu jedem Element x aus G gibt es ein Element y mit $x * y = y * x = e$ (inverses Element zu x).

z. B. $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, aber (\mathbb{Z}, \cdot) ist keine Gruppe.

● Die Gruppe der Transformationen der euklidischen Ebene besteht aus:

▶ Translationen (Verschiebungen)

▶ Drehungen

▶ Spiegelungen

▶ Gleitspiegelung (Spiegelung + Translation in der Richtung der Spiegelachse)

Pflasterungen



Pflasterungen im Garten und in der Kunst

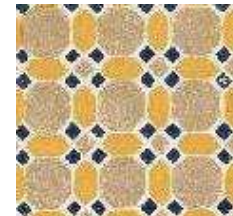
- Pflasterungen gibt es überall im Alltag: Fußböden von Wohnungen, Fußgängerwege, Wege in Gärten, Kunstwerke
- Sie können Symmetrien haben oder nicht.

- Die Menge aller Transformationen, die eine Pflasterung auf sich selbst abbilden, bildet eine Gruppe.
- Die Euklidische Ebene kann man mit regulären Vierecken, Dreiecken oder Sechsecken pflastern (aber nicht mit regulären Fünfecken).
- Es gibt viele natürliche Fragen über Pflasterungen:
 - ▶ Wieviele Arten gibt es, um eine Ebene zu pflastern?
 - ▶ Mit welchen Steinen?
 - ▶ Welche Symmetriegruppen können dabei auftreten?

- Eine **Pflasterung** (oder **Parkettierung**) ist eine Überdeckung der euklidischen Ebene mit Parkettsteinen (oder nur Steine), die sich nicht überlappen.
- Eine **Symmetrie** der Parkettierung ist eine Transformation der Ebene, die die Parkettierung auf sich selbst abbildet.
- Eine Pflasterung heißt **regulär**, falls alle Steine gleich sind und es für jedes Paar von Steinen eine Symmetrie der Parkettierung gibt, die den einen Stein auf den anderen abbildet.

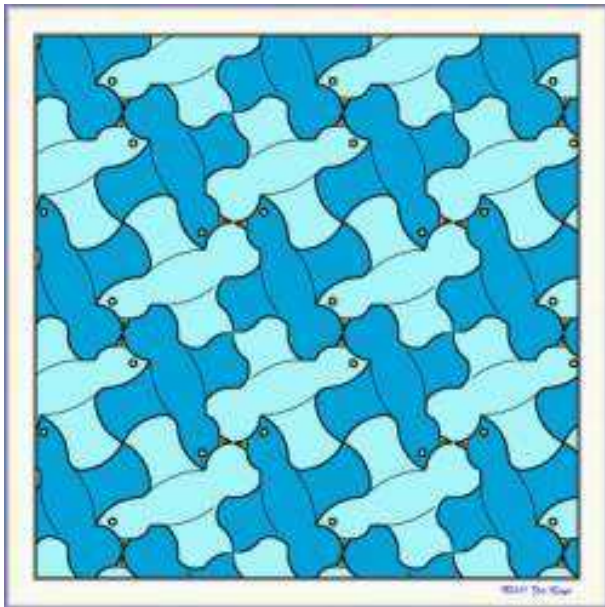
- Es gibt 17 mögliche Symmetriegruppen von regulären Parkettierungen.
- Wenn man statt Parkettierungen reguläre Muster betrachtet, dann gibt es zu jeder dieser Gruppen ein Muster.
- 13 der Muster sieht man in der muslimischen Alhambra-Zitadelle in Granada in Spanien.

- Die Muster der Alhambra:



- Alle Gruppen enthalten Translationen in zwei verschiedene Richtungen.

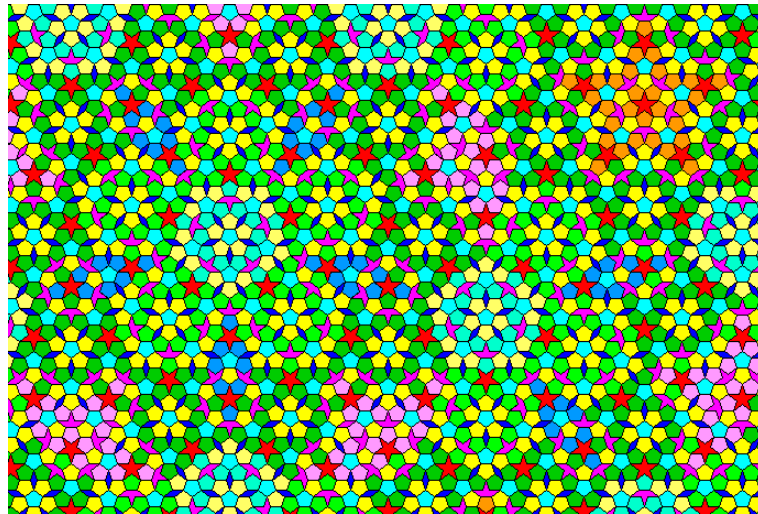
- Einige Muster der holländischen Künstler M.C.Escher:



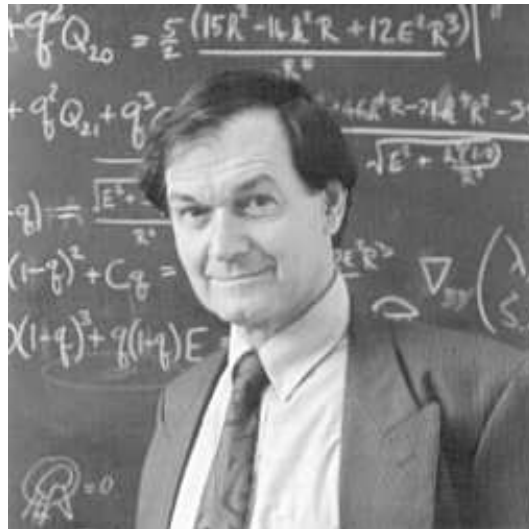
- **Periodische Parkettierungen:** Die Parkettierung ist translation-sinvariant (in diesem Fall gibt es in der Symmetriegruppe Translationen in mindestens zwei verschiedene Richtungen, es gibt 17 mögliche Symmetriegruppen).
- **Aperiodische Parkettierungen:** Es gibt keine Translationen in der Symmetriegruppe der Parkettierung.

Aperiodische Parkettierungen

- Eine Penrose-Parkettierung:

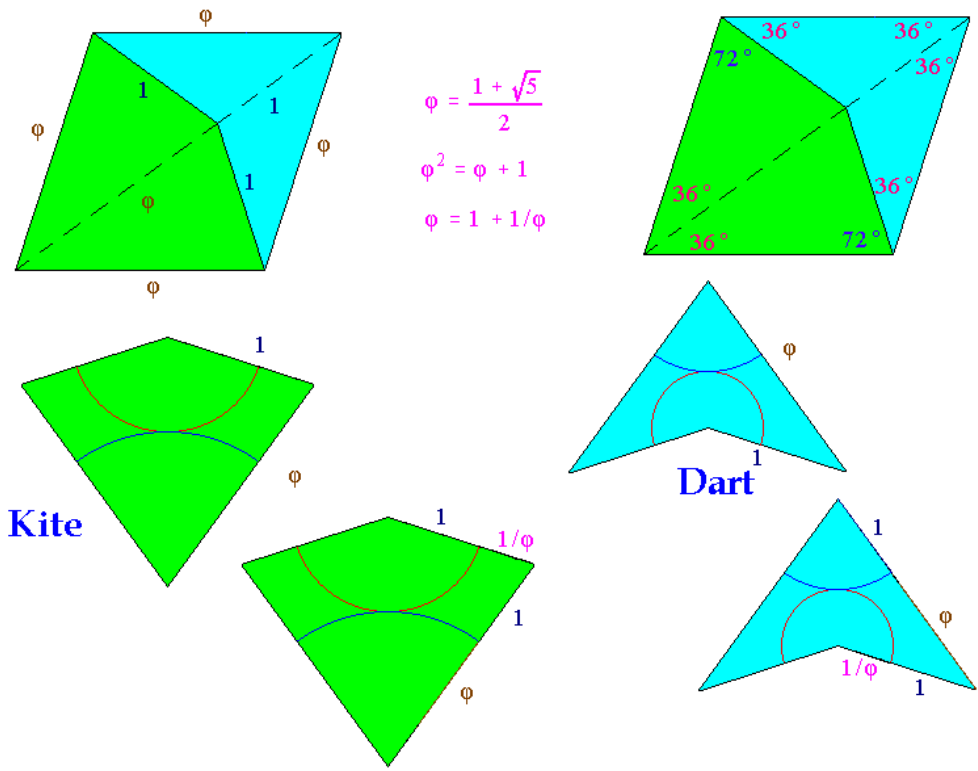


- Im Jahr 1974 entdeckt der englische Mathematiker Roger Penrose, wie man die Ebene mit zwei Steine aperiodisch parkettieren kann.

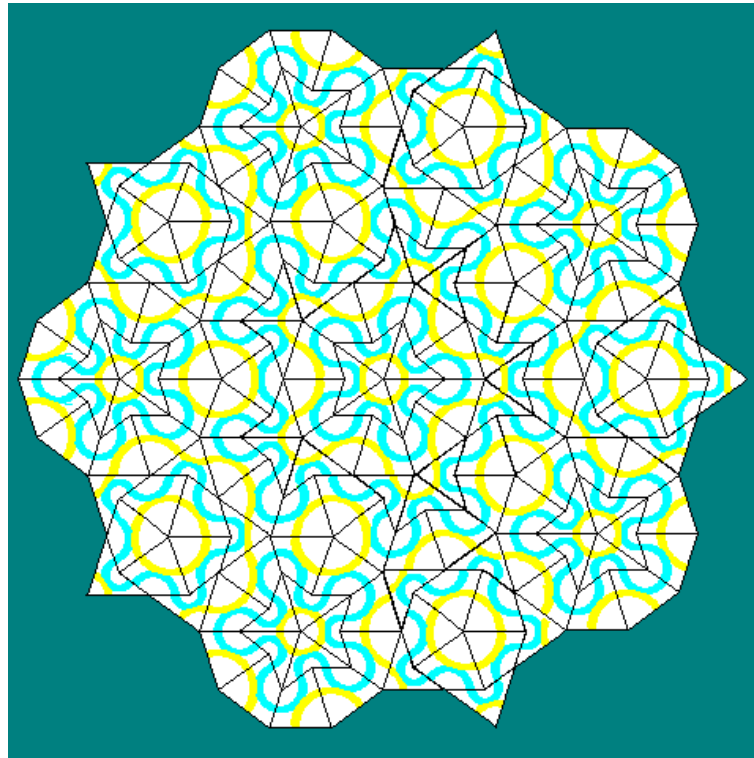


- Konstruktion von Drache und Pfeil: Man schneidet die lange Diagonale einer Raute im Verhältnis $\phi : 1$, mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034\dots$ (der **goldene Schnitt**).
Verbindet man den Punkt, der dadurch entsteht, mit den stumpfen Winkeln der Raute, so bekommt man die Steine von Penrose **Kite** (=Drachen) und **Dart** (=Pfeil).

- Drachen (Kite) und Pfeil (Dart) von R. Penrose:

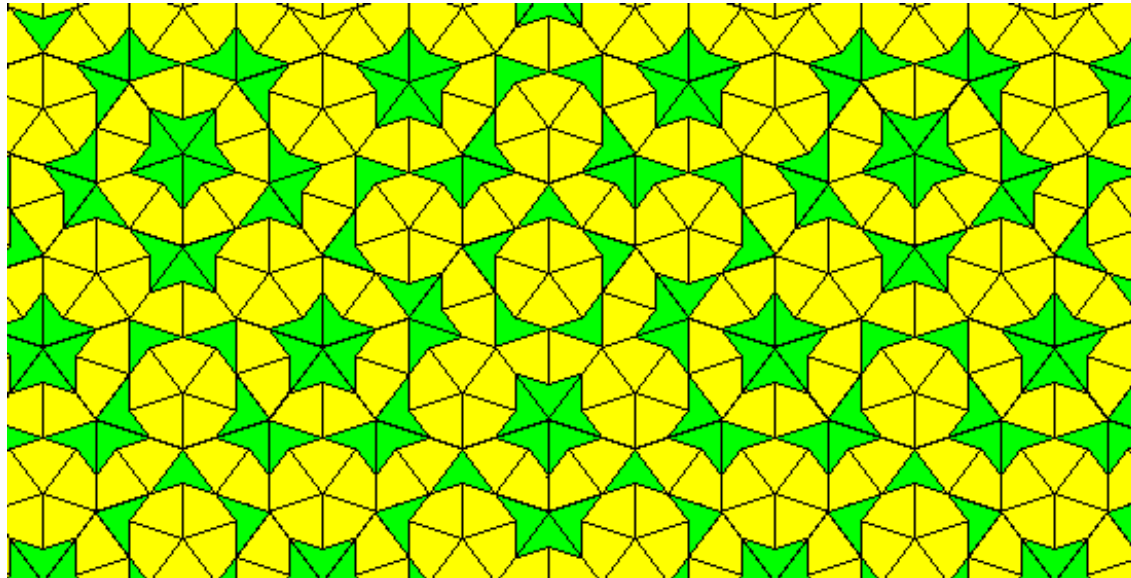


- Man kann Drachen und Pfeilen nur so aneinander legen, dass die Bögen mit der gleichen Farbe verlängert werden, wie in der Stern-Pflasterung:

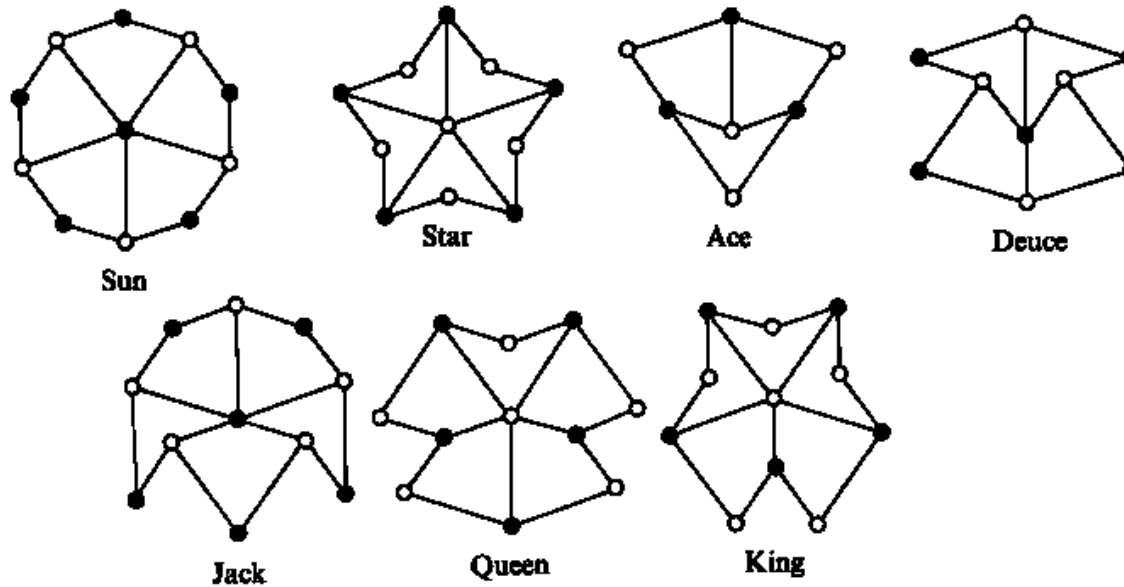


- Es gibt unendlich viele Penrose-Pflasterungen.
- Eigenschaften von Penrose-Pflasterungen:
 - ▶ Jeder Bereich einer Pflasterung ist in jeder anderen Pflasterung unendlich viele Male enthalten.
 - ▶ Keine besondere Kombination von Steinen erzwingt, dass es sich um eine bestimmte Pflasterung handelt.
 - ▶ Einen kreisförmigen Bereich vom Durchmesser d kann man spätestens nach einem Abstand $2d$ wiederfinden.

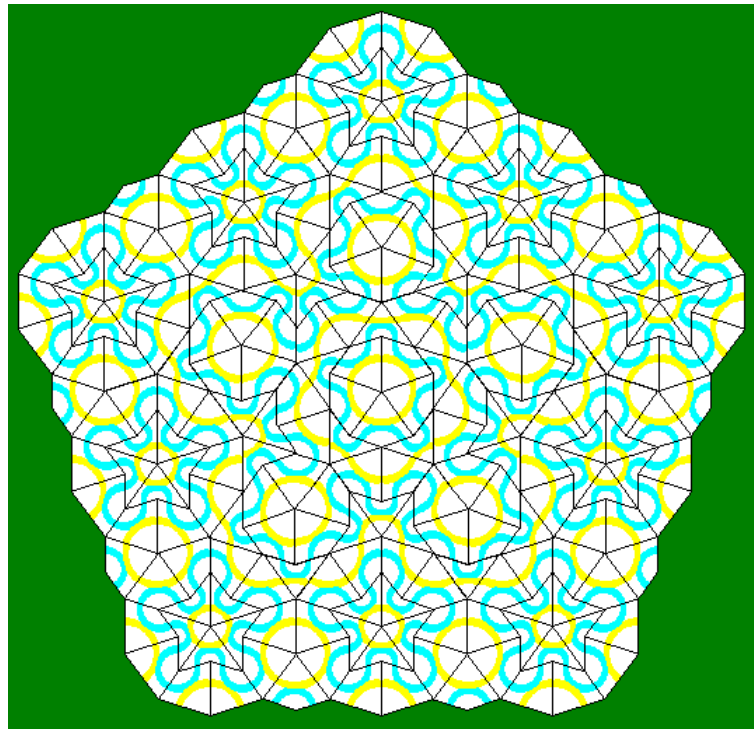
- Pflasterung mit Drachen und Pfeilen:



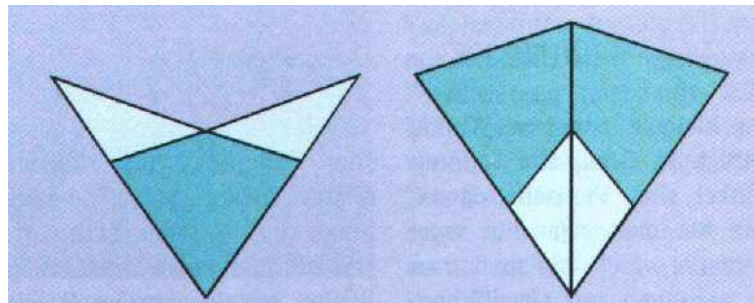
- Nur sieben Ecken-Figuren sind möglich:



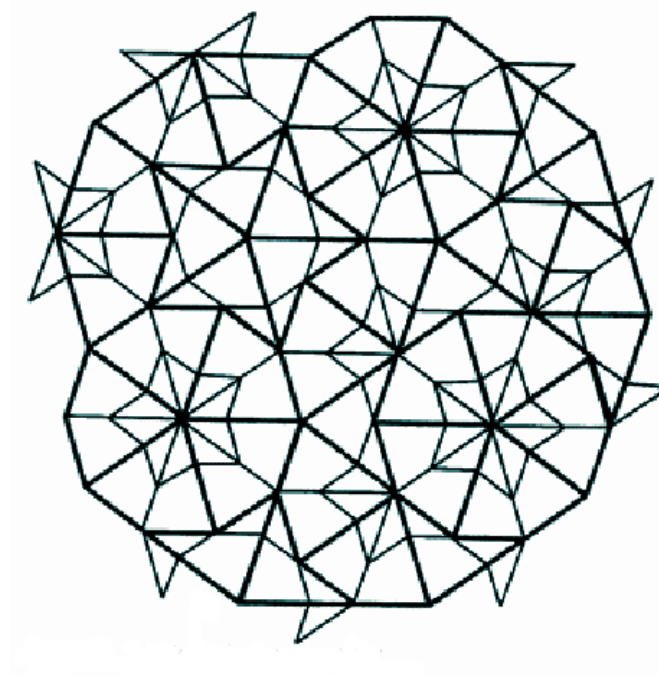
- Die Sonnen-Pflasterung mit Pentagonal-Symmetrie:



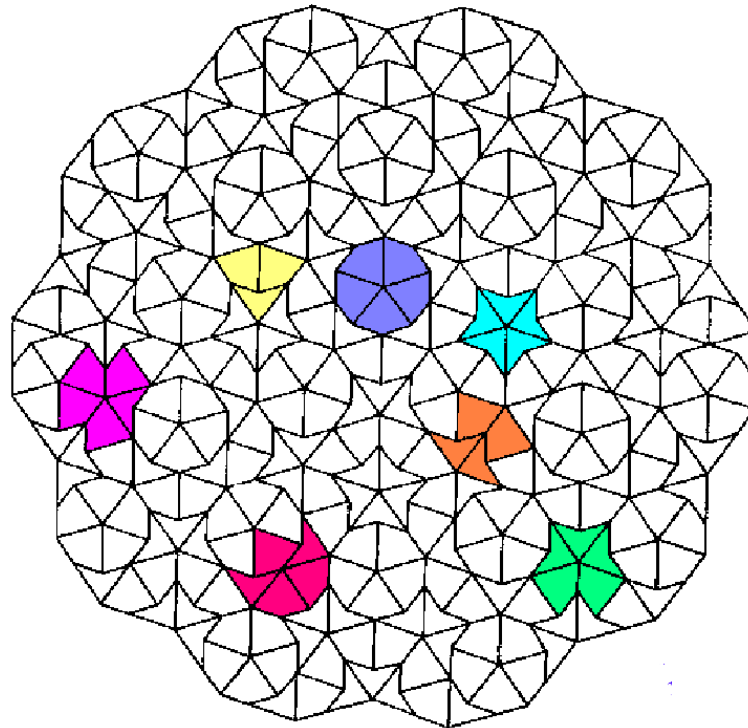
- Die Sonnen-Pflasterung und die Stern-Pflasterung gehen durch **Inflation** und **Deflation** ineinander über.
- Das Verfahren der **Inflation**:
zwei halbe Pfeile + ein Drache = ein größerer Pfeil.
zwei halbe Pfeile + zwei Drachen = ein größerer Drache.



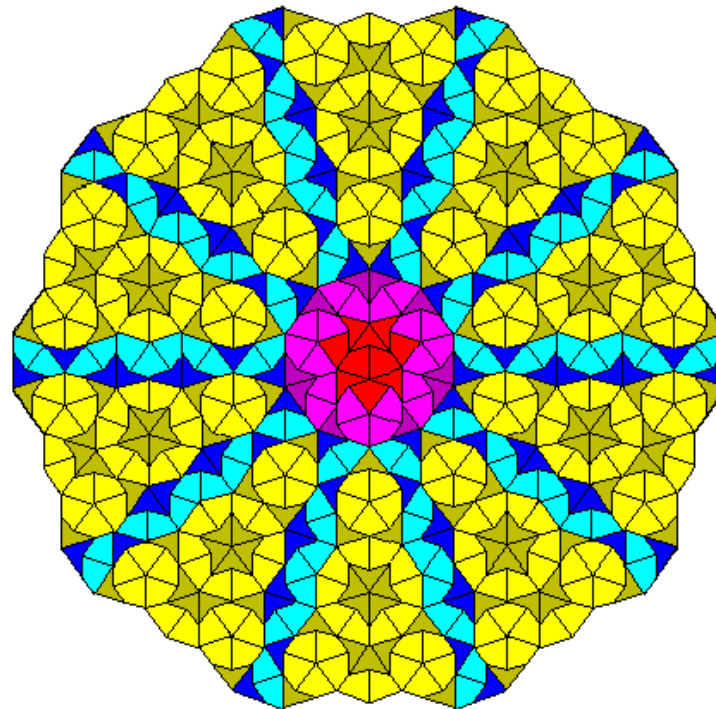
- Inflation und Deflation:



- Eine Penrose Parkettierung (das Rad), die die sieben Ecken-Figuren enthält:



- Das Rad mit den Speichen:



- Es gibt noch offene Fragen bei den aperiodischen Parkettierungen:

- ▶ Kann man die Ebene nur mit einem Stein aperiodisch parkettieren?

- ▶ Gibt es Steine, mit denen man die Ebene parkettieren kann und die mit anderen irrationalen Zahlen zu tun haben?

- Durch eine Deformation von Drachen und Pfeil hat Penrose ein Muster mit “aperiodischen Hühnern” bekommen:

