

# SYMMETRISCHE FLÄCHEN MIT GEWÖHNLICHEN DOPPELPUNKTE

ALESSANDRA SARTI

ZUSAMMENFASSUNG. Die Flächen in den Abbildungen 1 und 2 sind spezielle algebraische Flächen: Sie haben viele Symmetrien und viele gewöhnliche Doppelpunkte. In dem Aufsatz werden ihre Konstruktion erklärt, ihre Symmetrien und ihre geometrischen Eigenschaften.

## 1. EINFÜHRUNG

Betrachten wir den dreidimensionalen, komplexen, projektiven Raum  $\mathbb{P}_3 := \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ . Eine projektive Fläche  $X_d$  vom Grad  $d$  ist die Nullstellenmenge  $\{f_d(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}_3$ , wobei  $f_d$  ein homogenes Polynom vom Grad  $d$  ist (das heißt, dass alle Monome von  $f_d$  den Grad  $d$  haben, und es keine konstanten Terme gibt). Sei  $G$  eine endliche Gruppe linearer Transformationen, also  $G \subset GL(4, \mathbb{C})$ .

**Definition 1.1.** Die Fläche  $X_d$  heißt  $G$ -invariante Fläche, falls

$$f_d(g^{-1} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)) = f_d(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

für alle  $g \in G$ . Hier bezeichnet  $g^{-1} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)$  die Multiplikation der Matrix  $g^{-1}$  mit dem Vektor  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ .

Man sagt auch, dass  $X_d$  die Symmetrien von  $G$  hat: Die Flächen in den Abbildungen 1 und 2 sind Beispiele symmetrischer Flächen. In diesem Artikel werde ich ihre Konstruktion und ihre geometrischen Eigenschaften erklären.

## 2. GRUPPEN UND REGULÄRE POLYTOPE

Es ist wohl bekannt, dass es im  $\mathbb{R}^3$  nur fünf reguläre Polyeder gibt, die *platonischen Körper*: Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder und Dodekaeder. Man kann diese Polyeder mit dem *Schläfli-Symbol* beschreiben, das ist ein Zwei-Tupel von Zahlen  $\{p, q\}$  und bedeutet, dass es um jede Ecke des Polyeders  $q$  Polygone mit  $p$  Seiten gibt. In diesem Sinne ist ein Tetraeder ein  $\{3, 3\}$ , das heißt an jeder Ecke liegen drei Dreiecke, ein Oktaeder ist ein  $\{3, 4\}$ , denn an jeder Ecke liegen vier Dreiecke und so ist ein Würfel ein  $\{4, 3\}$  (und in diesem Sinne sind Oktaeder und Würfel *dual* zueinander), ein Ikosaeder ist ein  $\{3, 5\}$  und sein dualer Polyeder ist ein  $\{5, 3\}$  also ein Dodekaeder.

In vier Dimensionen gibt es sechs reguläre Polytope (s. [C, p. 292]): Die 5-Zelle, die 16-Zelle, ihr Dual die 8-Zelle, die 24-Zelle, die 600-Zelle und ihr Dual die 120-Zelle. Da wir in höheren Dimensionen sind, haben wir nicht nur Ecken, Kanten und Flächen als Komponenten sondern auch dreidimensionale Komponenten (*Zellen*). In diesem Artikel betrachten wir insbesondere die 24-Zelle und die 600-Zelle. Man kann sie auch mit dem Schläfli-Symbol beschreiben, ein  $\{p, q, r\}$  ist ein Polytop mit  $r$  Polyeder  $\{p, q\}$  an jeder Ecke. Die 24-Zelle ist ein  $\{3, 4, 3\}$ , d.h um jede Ecke haben wir drei Oktaeder, und die

---

Alessandra Sarti

Institut für Mathematik FB 08-Physik, Mathematik und Informatik, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 55099 Mainz, Germany

e-mail:sarti@mathematik.uni-mainz.de

600-Zelle ist ein  $\{3, 3, 5\}$ , d.h. um jede Ecke haben wir fünf Tetraeder. Bezeichnen wir mit  $N_i$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Komponenten, dann haben wir

<i>Polytop</i>	$N_0$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$\{3, 4, 3\}$	24	96	96	24
$\{3, 3, 5\}$	120	720	1200	600

Alle Transformationen, die das Polytop wieder auf sich selbst abbilden, bilden eine Gruppe, die *Symmetriegruppe* des Polytops. Unter dieser Gruppe bilden die  $i$ -dimensionalen Komponenten  $N_i$  eine Bahn (d.h. zu je zwei Komponenten gibt es stets eine Transformation, die die eine Komponente auf die andere abbildet).

Wir bezeichnen mit  $[3, 4, 3]$  und mit  $[3, 3, 5]$  die Symmetriegruppen der obigen Polytope. Sie haben die Ordnung 1152 und 14400. Diese Gruppen kann man als Gruppen von linearen Transformationen darstellen, s. [S1] für eine genaue Beschreibung mit Matrizen.

### 3. SYMMETRISCHE FLÄCHEN

Wenn man die invarianten Flächen unten  $[3, 4, 3]$  bzw.  $[3, 3, 5]$  untersucht, stellt sich heraus, dass es zwei interessante Familien von invarianten Flächen im Grad sechs und zwölf gibt. Bezeichnen wir mit  $R^G := \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]^G$  den Ring der invarianten Polynome unter  $G$  und mit  $R_d^G$  die Polynome vom Grad  $d$ , dann haben wir:

**Definition 3.1.** *Der Ring  $R^G$  heißt von einer Menge von Polynomen  $F_1, F_2, F_3, F_4$  rational erzeugt, falls für jedes andere Polynom  $P \in R^G$  gilt:*

$$\sum_I \alpha_I \cdot F_1^{i_1} \cdot \dots \cdot F_4^{i_4} = P, \quad \alpha_I \in \mathbb{R}, \quad I = (i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathbb{N}^4.$$

Es ist bekannt (s. [R]), dass die Ringe  $R^{[3,4,3]}$  und  $R^{[3,3,5]}$  von Polynomen vom Grad 2, 6, 8, 12, bzw. 2, 12, 20, 30 rational erzeugt sind. Insbesondere haben  $R_6^{[3,4,3]}$  und  $R_{12}^{[3,3,5]}$  zwei Erzeugenden. Man betrachtet die invarianten Polynome  $q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  und die Polynome  $S_6 = x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + 15(x_0^2 x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_1^2 x_3^2 + x_0^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3^2)$  und  $S_{12}$  (dieses letzte Polynom ist homogen vom Grad zwölf und hat eine komplizierte Darstellung mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , man siehe [S1] für seine genaue Gleichung), die Ringe sind dann erzeugt von  $q^3$ ,  $S_6$  und von  $q^6$ ,  $S_{12}$ .

Man kann sich intuitiv geometrisch vorstellen, warum das Polynom  $q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  invariant ist. Seine Nullstellenmenge ist eine Quadrik in  $\mathbb{P}^3$ . Wenn man sie in  $\mathbb{R}^3$  projiziert, ist sie eine Kugel, die Gruppen  $[3, 4, 3]$  und  $[3, 3, 5]$  bestehen aus Drehungen und Spiegelungen, und eine Kugel hat alle diese Symmetrien. Bei dem Polynom  $S_6$  erkennt man, dass sein Ausdruck unten Permutationen der Koordinaten symmetrisch ist, (eine ähnliche Symmetrie hat auch das Polynom  $S_{12}$ ), allerdings gibt es keine leichte geometrische Vorstellung, die seine Invarianz unten der Gruppe  $[3, 4, 3]$  (bzw.  $[3, 3, 5]$ ) begründet. Man kann diese invarianten Polynome mit Hilfe einiger spezieller invarianter Familien von Geraden in  $\mathbb{P}^3$  konstruieren, die genaue Beschreibung befindet sich in [S2].

Die Nullstellenmengen

$$S_n(\lambda : \mu) : \{\lambda q^{n/2} + \mu S_n = 0\} \subset \mathbb{P}_3, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1$$

sind projektiv-eindimensionale Familien von symmetrischen Flächen in  $\mathbb{P}_3$ . Die Flächen in der Abbildung 1 gehören zu der Familie  $S_6(\lambda : \mu)$  und die Flächen in der Abbildung 2 gehören zu der Familie  $S_{12}(\lambda : \mu)$ . Diese Familien haben also die Symmetrien der 24-Zelle bzw. der 600-Zelle. Viele geometrische Eigenschaften der Flächen in den Familien werden durch die Symmetrien bestimmt. Im nächsten Abschnitt werden wir einige

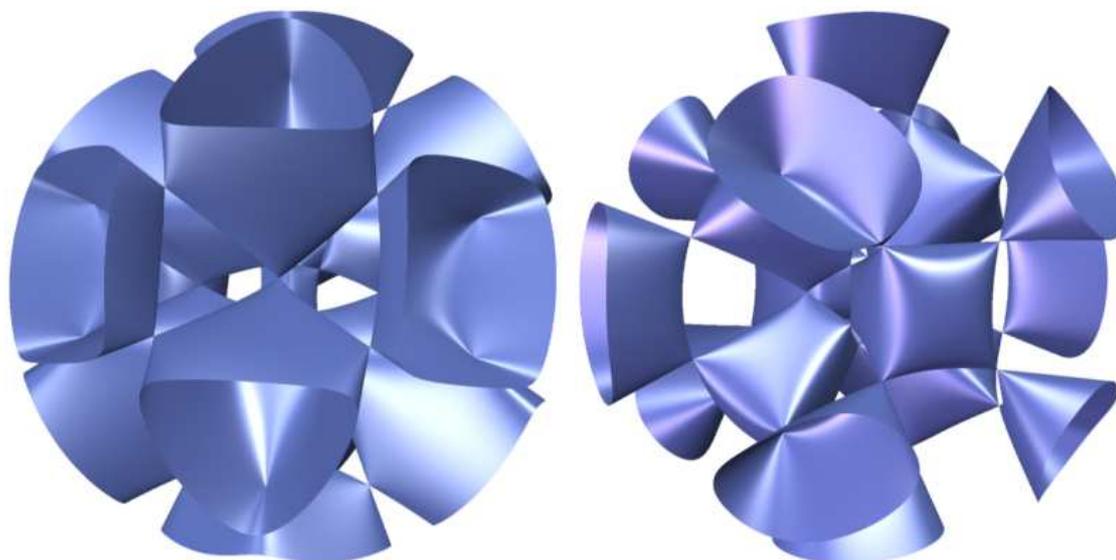


ABBILDUNG 1. Zwei Flächen vom Grad sechs mit 48 Gewöhnlichen Doppelpunkte

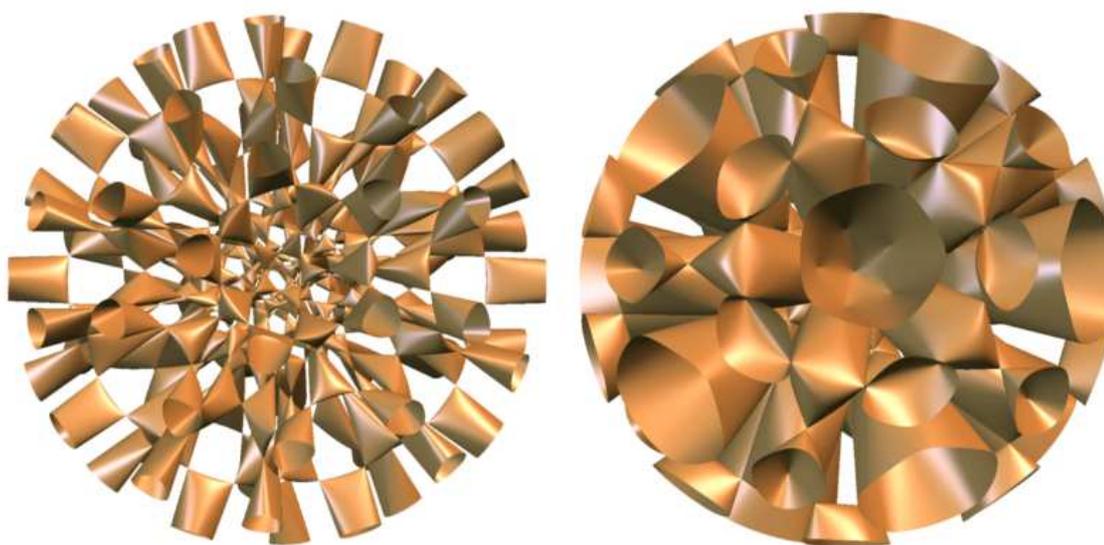


ABBILDUNG 2. Zwei Flächen vom Grad zwölf mit 600 und 360 Gewöhnlichen Doppelpunkte

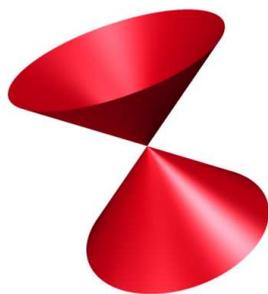


ABBILDUNG 3. Ein Kegel

dieser Eigenschaften untersuchen, und dort wird der Zusammenhang mit den regulären Polytopen deutlicher.

#### 4. FLÄCHEN MIT GEWÖHNLICHEN DOPPELPUNKTEN

Die Familien  $S_n(\lambda : \mu)$  sind von besonderem Interesse, da sie Flächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten enthalten. Ein *gewöhnlicher Doppelpunkt* ist ein Punkt, der wie eine Kegelspitze aussieht (Abbildung 3), also etwa wie  $x^2 + y^2 = z^2$  (in den Bildern kann man solche Punkte deutlich erkennen). Es ist natürlich sich zu fragen, welches die maximale Anzahl  $\mu(d)$  von gewöhnlichen Doppelpunkten ist, die eine Fläche vom Grad  $d$  in  $\mathbb{P}_3$  haben kann und welche Anzahl von gewöhnlichen Doppelpunkten überhaupt vorkommen kann. Jede der obigen Familien enthält genau vier Flächen mit gewöhnlichen Doppelpunkten:

<i>Familie</i>	<i>Doppelpunkte</i>			
$S_6$	12	48	48	12
$S_{12}$	300	600	360	60

Es ist speziell an den Familien, dass alle Doppelpunkte reelle Koordinaten haben. Es ist auch kein Zufall, dass die Anzahl der gewöhnlichen Doppelpunkte immer  $1/2 N_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  ist. In der Tat sind sie spezielle Punkte auf den  $i$ -dimensionalen Komponenten der 24-Zelle, beziehungsweise der 600-Zelle, aber da im projektiven Raum für einen Punkt  $P = -P$  gilt, haben wir nur die Hälfte davon.

Da die  $i$ -dimensionalen Komponenten eine Bahn unter der Gruppe bilden, bilden auch die Doppelpunkte eine Bahn.

Die Bilder stellen die zwei Flächen vom Grad sechs mit 48 gewöhnlichen Doppelpunkten (Abbildung 1) und die Flächen vom Grad 12 mit 600 und 360 gewöhnlichen Doppelpunkten (Abbildung 2) dar. Sie wurden mit dem Computerprogramm SURF von S. Endraß realisiert. Da sie eine Projektion im  $\mathbb{R}^3$  sind, kann man nicht alle singulären Punkte realisieren, denn einige liegen auf der unendlich fernen Hyperebene. Im Allgemeinen kann man ohnehin nicht alle Punkte der Fläche visualisieren, da es komplexe (also nicht reelle) Punkte gibt.

Die maximale Anzahl  $\mu(d)$  von Doppelpunkten ist nur bekannt für  $1 \leq d \leq 6$  und es gilt:

$d$	1	2	3	4	5	6
$\mu(d)$	0	1	4	16	31	65

Ab dem Grad sieben gibt es nur Abschätzungen. Für Grad zwölf gilt  $600 \leq \mu(12) \leq 645$ , wobei die obere Schranke von Miyaoka ist (s. [M]) und unsere Fläche vom Grad zwölf mit 600 Doppelpunkten die untere Schranke gibt.

#### LITERATUR

- [C] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes* (second edition), the Macmillan Company, New York, 1963.
- [M] Y. Miyaoka, *The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants*, Math. Ann. 268, 159–171 (1984).
- [R] G. Racah, *Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 8, 108–112 (1950).
- [S1] A. Sarti, *Pencils of Symmetric Surfaces in  $\mathbb{P}^3$* , J. of Algebra 246, 429–452 (2001).
- [S2] A. Sarti, *A geometrical construction for the polynomial invariants of some reflection groups*, Serdica Math. J., 31, pp. 229–242, 2005