

PLATONISCHE KÖRPER, SYMMETRISCHE FLÄCHEN UND K3-FLÄCHEN

ALESSANDRA SARTI

1. PLATONISCHE KÖRPER

Die fünf platonischen Körper sind jedem bekannt. Sie verdanken ihre Namen Plato (300 v. Ch.), der sie in seinem Werk *Timaios* beschrieben hat. Sie wurden von ihm mit den fünf Elementen assoziiert: Feuer-Tetraeder, Wasser-Ikosaeder, Luft-Oktaeder, Erde-Würfel, Geist-Dodekaeder. Sie haben in der Geschichte viel Aufmerksamkeit geweckt, zum Beispiel als Kepler im 16. Jahrhundert versuchte, eine Verbindung zwischen den fünf damals bekannten Planeten und den platonischen Körper zu finden.

Ich werde mich hier kurz mit ihren geometrischen Eigenschaften beschäftigen. Die platonischen Körper sind die einzigen dreidimensionalen *regulären* Polyeder (ein Polyeder heißt regulär, wenn alle seine Seiten gleich sind, und es um jede Ecke die gleiche Anzahl von Seiten gibt). Das lässt sich leicht zeigen. Wir benutzen dafür die *Schläfli-Symbole*: Mit $\{p, q\}$ bezeichnen wir einen Polyeder, der p Seiten hat, die aus regulären p -Polygonen (zum Beispiel gleichseitigen Dreiecken, Quadraten, regulären Pentagonen...) bestehen und es um jede Ecke q solcher Polygone gibt. Die Summe der Aussenwinkel eines p -Polygons ist 2π ; also ist jeder Aussenwinkel $2\pi/p$ und die Innenwinkel sind dann $\pi(1 - 2/p)$. In unserem Polyeder gibt es also um jede Ecke q Winkel $\pi(1 - 2/p)$ und ihre Summe muss kleiner als 2π sein. Also bekommen wir $1 - 2/p < 2/q$, und somit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Die einzig möglichen Werte für $\{p, q\}$ sind dann:

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\},$$

(man beachte, dass $p \geq 3$, $q \geq 3$) und diese sind genau Tetraeder, Oktaeder, Würfel (auch Hexaeder genannt), Ikosaeder, Dodekaeder. Die Anzahl N_0 der Ecken, N_1 der Kanten und N_2 der Seiten wird in in der folgenden Tabelle gegeben.

<i>Polytop</i>	N_0	N_1	N_2	<i>Polytop</i>	N_0	N_1	N_2
$\{3, 3\}$	4	6	4	$\{3, 5\}$	12	30	20
$\{3, 4\}$	6	12	8	$\{5, 3\}$	20	30	12
$\{4, 3\}$	8	12	6				

Die N_i erfüllen dann die bekannte *Eulersche Formel*: $N_0 - N_1 + N_2 = 2$.

Wir wollen jetzt die *Symmetriegruppen* studieren, d.h. die Gesamtheit aller Transformationen, die die platonische Körper wieder auf sich selbst abbilden. Diese sind Drehungen und Spiegelungen. Betrachten wir zum Beispiel einen Tetraeder: wir können ihn um 120 Grad um eine Ecke drehen, dann bilden wir das Tetraeder wieder auf sich selbst ab. Spiegeln wir das Tetraeder an einer Ebene, die eine Kante enthält und die durch den Mittelpunkt der

Alessandra Sarti

Institut für Mathematik FB 08-Physik, Mathematik und Informatik, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 55099 Mainz, Germany

e-mail:sarti@mathematik.uni-mainz.de

gegenüberliegenden Seite verläuft, so bekommen wir wieder eine Transformation der Symmetriegruppe des Tetraeders. Wenn wir uns auf die Drehungen einschränken (sie erzeugen eine Gruppe T), dann können wir sehen, dass alle Drehungen einigen speziellen Permutationen der Ecken entsprechen, also zu einigen speziellen Permutationen von vier Elementen. Auf eine ähnliche Weise kann man zeigen, dass man die Drehgruppe eines Oktaeders O mit allen Permutationen von vier Elementen identifizieren kann (man benutzt die vier Diagonalen eines Würfels, der in dem Oktader enthalten ist) und dass man die Drehgruppe eines Ikosaeders I mit einer speziellen Gruppe von Permutationen von fünf Elementen identifizieren kann (dafür benutzt man fünf Tetraeder, die in dem Ikosaeder enthalten sind). Die Drehgruppen W und D von Würfel und Dodekaeder sind gleich den Drehgruppen O und I , da sie *duale* Polyeder sind. Genauer, wir können einen Würfel in einem Oktaeder basteln, in dem wir die Mittelpunkte der Seiten des Oktaeders verbinden, und umgekehrt verbinden wir die Mittelpunkte der Seiten des Würfels, so bekommen wir einen Oktaeder. Eine ähnliche Korrespondenz gibt es zwischen Ikosaeder und Dodekaeder. Man kann auch zwei platonische Körper P und P' *dual* zueinander definieren, falls $N_i(P) = N_{2-i}(P')$. Das ergibt die gleichen Ergebnisse wie vorher. Insbesondere ist das Tetraeder selbstdual. Die Ordnungen der Drehgruppen sind: $o(T) = 12$, $o(O) = 24$, $o(I) = 60$. Wir können jetzt einen Schritt weitergehen und uns fragen, welches die regulären Polyeder in 4-Dimensionen sind.

2. DIE 4-DIMENSIONALEN REGULÄREN POLYTOPE

Es gibt sechs reguläre 4-dimensionale Polytope, drei davon sind eine "Verallgemeinerung" der fünf platonischen Körper, die letzten drei sind neue Polytope. Ich werde mich jetzt mit der Geometrie dieser letzten drei beschäftigen. Sie bestehen aus Ecken, Kanten, Seiten und 3-dimensionalen Komponenten (*Zellen*), deren Anzahl N_0, N_1, N_2, N_3 in der folgenden Tabelle gegeben ist:

<i>Polytop</i>	N_0	N_1	N_2	N_3
$\{3, 4, 3\}$	24	96	96	24
$\{3, 3, 5\}$	120	720	1200	600
$\{5, 3, 3\}$	600	1200	720	120

Sie werden auch 24-Zelle, 600-Zelle und 120-Zelle genannt. In einer 24-Zelle haben wir um jede Ecke drei Oktaeder, das heisst um jede Ecke haben wir drei $\{3, 4\}$. Mit den Schläfli-Symbolen kann man es $\{3, 4, 3\}$ bezeichnen. Im Allgemeinen bezeichnet man mit $\{p, q, r\}$ ein Polytop mit r Polyedern $\{p, q\}$ um jede Ecke. In diesem Sinne werden die 600-Zelle und die 120-Zelle mit $\{3, 3, 5\}$ bez. mit $\{5, 3, 3\}$ bezeichnet. Im ersten Fall um jede Ecke haben wir fünf Tetraeder und im zweiten Fall haben wir drei Dodekaeder. Diese letzten zwei Polytope sind *dual* zueinander. Das kann man sehen, da $N_i(\{3, 3, 5\}) = N_{3-i}(\{5, 3, 3\})$. Aber man könnte auch eine geometrischere Beschreibung geben, ähnlich wie für die platonischen Körper. Die Anzahl N_i der i -dimensionalen Komponenten erfüllt die verallgemeinerte Eulersche Formel (nach Schläfli):

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$$

Auch in diesem Fall kann man die Symmetriegruppen der 4-dimensionalen regulären Polytope betrachten. Sie werden mit $\{3, 4, 3\}$ und $\{3, 3, 5\}$ bezeichnet (wegen der Dualität haben wir $\{5, 3, 3\} = [3, 3, 5]$). Diese beide Gruppen sind sehr gross und enthalten 1152 bez. 14400 Elemente. Die Operation der Gruppen auf die i -dimensionalen Komponenten ($i = 0, 1, 2, 3$) ist *transitiv*, das bedeutet, dass die i -dimensionalen Komponenten, nur eine Bahn unter der Gruppe bilden. Betrachten wir z.B. zwei Ecken, dann gibt es immer eine Transformation der Symmetriegruppe, die die eine Ecke auf die andere abbildet.

3. SYMMETRISCHE FLÄCHEN

Betrachten wir den dreidimensionalen, komplexen, projektiven Raum $\mathbb{P}_3 := \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Dieser Raum besteht aus dem komplexen dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{C}^3 , zusammen mit der *unendlich fernen Hyperebene* H . Die Koordinaten in dem projektiven Raum sind die *homogenen Koordinaten* $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$. Es gilt $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (\lambda \cdot x_0 : \lambda \cdot x_1 : \lambda \cdot x_2 : \lambda \cdot x_3)$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ und die Koordinaten von \mathbb{C}^3 identifiziert man mit $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0})$, $x_0 \neq 0$. Die Hyperebene H wird durch die Gleichung $x_0 = 0$ beschrieben. Eine projektive Fläche X_d vom Grad d ist die Nullstellenmenge $\{f_d(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}_3$, wobei f_d ein homogenes Polynom vom Grad d ist (das heißt, dass alle Monome von f_d den Grad d haben, und es keine konstanten Terme gibt). Sei G eine endliche Gruppe linearer Transformationen, also $G \subset GL(4, \mathbb{C})$ (die 4×4 komplexe invertierbare Matrizen), die Fläche X_d heisst *G-invariante Fläche*, falls

$$f_d(g^{-1} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)) = f_d(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

für alle $g \in G$ (hier bezeichnet $g^{-1} \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3)$ die Multiplikation der Matrix g^{-1} mit dem Vektor (x_0, x_1, x_2, x_3)). Man sagt auch, dass X_d die Symmetrien von G hat. Wenn man die invarianten Flächen unter $[3, 4, 3]$ bzw. $[3, 3, 5]$ untersucht, stellt sich heraus, dass es zwei interessante Familien im Grad sechs und zwölf gibt. Es gibt ein spezielles $[3, 4, 3]$ - und $[3, 3, 5]$ -invariantes Polynom: $q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, das nennen wir *triviales invariantes Polynom*. Man kann sich intuitiv geometrisch vorstellen, warum das Polynom q invariant ist. Seine Nullstellenmenge ist eine Quadrik (=Fläche vom Grad zwei) in \mathbb{P}^3 . Wenn man sie in \mathbb{R}^3 projiziert, ist sie eine Kugel. Die Gruppen $[3, 4, 3]$ und $[3, 3, 5]$ bestehen aus Drehungen und Spiegelungen, und eine Kugel hat alle diese Symmetrien. Dann ist es klar, dass q^n ein invariantes Polynom vom Grad $2n$ ist. Im Fall der Gruppe $[3, 4, 3]$ gibt es ein weiteres invariantes Polynom sechsten Grades: $S_6 = x_0^6 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + 15(x_0^2 x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_1^2 x_3^2 + x_0^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 x_3^2)$ (für den Grad kleiner als sechs gibt es keine invarianten Polynome im ungeraden Grad und es gibt genau eine Invariante im geraden Grad: q^n , $n = 1, 2$). Dann erzeugen q^3 und S_6 eine zweidimensionale (projektiv-eindimensionale) Familie von invarianten Flächen vom Grad 6 (denn jede lineare Kombination von ihnen produziert wieder ein invariantes Polynom vom Grad 6). Betrachten wir die Gruppe $[3, 3, 5]$, dann kommt die erste nicht triviale Invariante im Grad 12 vor. Wir nennen es S_{12} (es hat eine komplizierte Darstellung mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$). Wie vorher erzeugen q^6 und S_{12} eine Familie von invarianten Polynomen vom Grad 12. Die Nullstellenmengen

$$S_n(\lambda : \mu) = \{x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3 ; \lambda q^{n/2}(x) + \mu S_n(x) = 0\}, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$$

sind projektiv-eindimensionale Familien von symmetrischen Flächen in \mathbb{P}_3 . Die Flächen in der Abbildung 1 gehören zu der Familie $S_6(\lambda : \mu)$ und die Flächen in der Abbildung 2 gehören zu der Familie $S_{12}(\lambda : \mu)$. Diese Familien haben also die Symmetrien der 24-Zelle bzw. der 600-Zelle. Viele geometrische Eigenschaften der Flächen in den Familien werden durch die Symmetrien bestimmt. Im nächsten Abschnitt werden wir einige

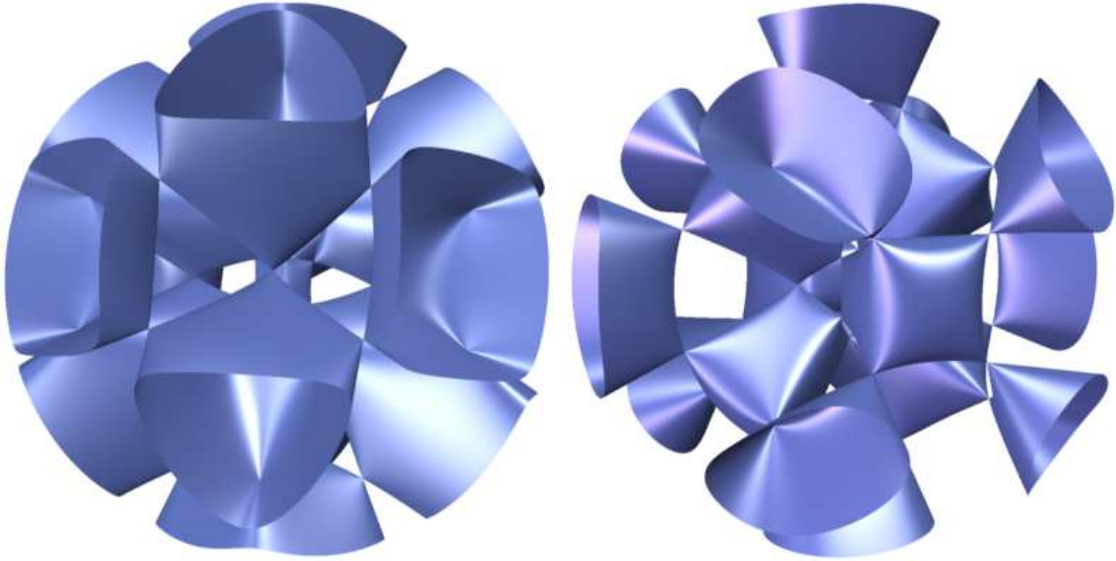


ABBILDUNG 1. Zwei Flächen vom Grad sechs mit 48 Gewöhnlichen Doppelpunkte

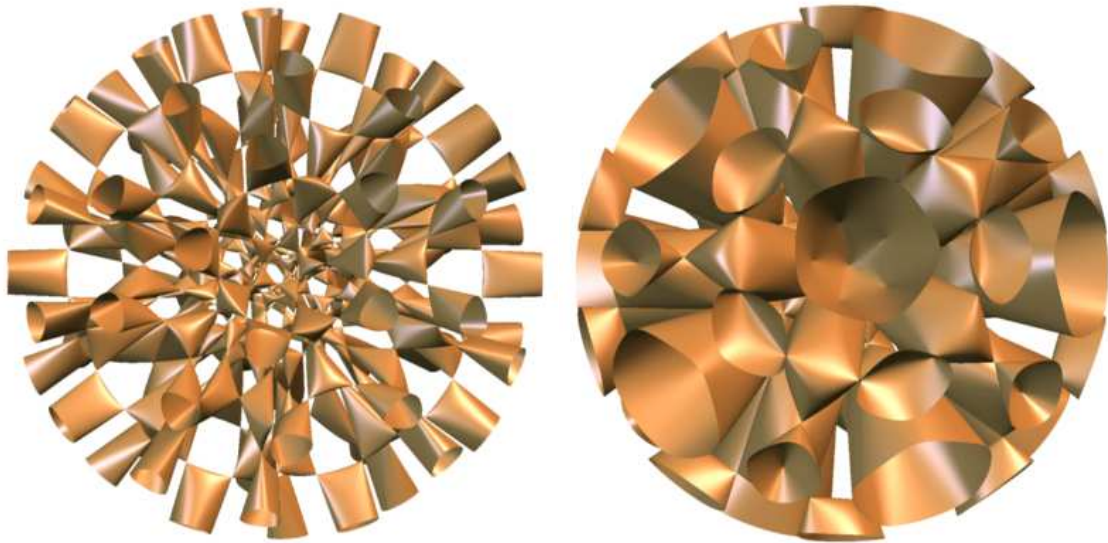


ABBILDUNG 2. Zwei Flächen vom Grad zwölf mit 600 und 360 Gewöhnlichen Doppelpunkte

dieser Eigenschaften untersuchen, und dort wird der Zusammenhang mit den regulären Polytopen deutlicher.

4. FLÄCHEN MIT GEWÖHNLICHEN DOPPELPUNKTEN

Die Familien $S_n(\lambda : \mu)$ sind von besonderem Interesse, da sie Flächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten enthalten. Ein *gewöhnlicher Doppelpunkt* ist ein Punkt, der wie eine Kegelspitze aussieht (Abbildung 3), also etwa wie $x^2 + y^2 = z^2$ (in den Bildern kann man solche Punkte deutlich erkennen). Es ist natürlich sich zu fragen, welches die maximale Anzahl $\mu(d)$ von gewöhnlichen Doppelpunkten ist, die eine Fläche vom Grad d in \mathbb{P}_3 haben kann und welche Anzahl von gewöhnlichen Doppelpunkten überhaupt vorkommen kann. Jede der obigen Familien enthält genau vier Flächen mit gewöhnlichen Doppelpunkten:

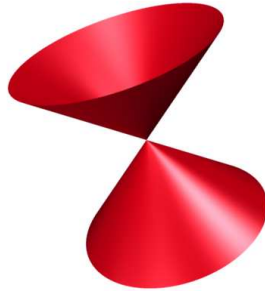


ABBILDUNG 3. Ein Kegel

<i>Familie</i>	<i>Doppelpunkte</i>			
S_6	12	48	48	12
S_{12}	300	600	360	60

Es ist speziell an den Familien, dass alle Doppelpunkte reelle Koordinaten haben. Es ist auch kein Zufall, dass die Anzahl der gewöhnlichen Doppelpunkte immer $\frac{N_i}{2}$, $i = 0, 1, 2, 3$ ist. In der Tat sind sie spezielle Punkte auf den i -dimensionalen Komponenten der 24-Zelle, beziehungsweise der 600-Zelle, aber da im projektiven Raum für einen Punkt $P = -P$ gilt, haben wir nur die Hälfte davon.

Da die i -dimensionalen Komponenten eine Bahn unter der Gruppe bilden, bilden auch die Doppelpunkte eine Bahn.

Die Bilder stellen die zwei Flächen vom Grad sechs mit 48 gewöhnlichen Doppelpunkten (Abbildung 1) und die Flächen vom Grad 12 mit 600 und 360 gewöhnlichen Doppelpunkten (Abbildung 2) dar. Sie wurden mit dem Computerprogramm SURF von S. Endraß realisiert. Da sie eine Projektion im \mathbb{R}^3 sind, kann man nicht alle singulären Punkte realisieren, denn einige liegen auf der unendlich fernen Hyperebene H . Im Allgemeinen kann man ohnehin nicht alle Punkte der Fläche visualisieren, da es komplexe (nicht reelle) Punkte gibt. Das Problem der maximalen Anzahl $\mu(d)$ von gewöhnlichen Doppelpunkten einer algebraischen Flächen vom Grad d im \mathbb{P}_3 ist ein klassisches Problem der algebraischen Geometrie.

Sie ist nur bekannt für $1 \leq d \leq 6$ und es gilt:

d	1	2	3	4	5	6
$\mu(d)$	0	1	4	16	31	65

Ab dem Grad sieben gibt es nur Abschätzungen. Für Grad zwölf gilt $600 \leq \mu(12) \leq 645$, die Fläche vom Grad zwölf mit 600 Doppelpunkten in der Abbildung 2 gibt die untere Schranke.

5. K3-FLÄCHEN

Die K3-Flächen sind spezielle algebraische Flächen, betrachtet man die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms vom Grad vier im dreidimensionalen komplexen projektiven Raum \mathbb{P}_3 , etwa

$$x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$$

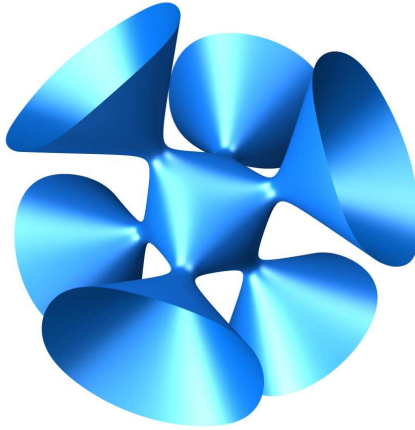


ABBILDUNG 4. Eine K3-Fläche

so bekommt man das einfachste Beispiel einer algebraischen K3-Fläche (Abbildung 4). Der komische Name "K3" wird von der Mathematiker André Weil in seinem *Final Report on contract AF18(603)-57* erklärt:

Dans la seconde partie de mon rapport, il s'agit des variétés kähleriennes dites K3, ainsi nommées en l'honneur de Kummer, Kodaira, Kähler et de la belle montagne K2 au Cachemire.

[Im zweiten Teil meines Berichts, geht es um kählersche Varietäten, die K3 heissen, so genannt nach Kummer, Kodaira, Kähler und zu Ehren des Bergs K2 in Kaschmir]

Die K3 Flächen haben viele interessante Eigenschaften (sie sind zweidimensionale Calabi-Yau Varietäten, die sehr in der Physik, insbesondere in der Stringtheorie bekannt sind), was haben sie aber mit den vorherigen Flächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkten zu tun?

Bezeichnen wir mit S_{600} die Fläche mit 600 gewöhnlichen Doppelpunkten und betrachten wir den Quotienten $S_{600}/[3, 3, 5]$, i.e. der Raum, der alle Bahnen von Punkten von S_{600} unter der Gruppe $[3, 3, 5]$ parametrisiert. Dieser ist wieder eine algebraische Fläche und sie ist eine K3-Fläche (der Beweis benutzt spezielle tiefe Eigenschaften der K3-Flächen). Man kann sie als Quartik in \mathbb{P}_3 realisieren. Eigentlich ist der Quotient jeder Fläche in der Familie $S_{12}(\lambda : \mu)$, $(\lambda : \mu) \neq (1 : 0)$ nach $[3, 3, 5]$ eine K3 Fläche. Genauso, wenn man die Familie $S_6(\lambda : \mu)$ und die Gruppe $[3, 4, 3]$ betrachtet, bekommen wir weitere K3-Flächen. Sie sind speziell, da sie die maximale Anzahl von Kurven für eine K3-Fläche enthalten (modulo eine gewisse Äquivalenzrelation). Diese Anzahl ist 20 für die K3-Flächen, die Quotienten der singulären Flächen sind und 19 für die andere Flächen in den Familien. Das ist ein aktuelles Forschungsthema der algebraischen Geometrie: solche Fläche zu untersuchen und weitere neue Beispiele von solchen K3-Flächen zu konstruieren.

Englische Zusammenfassung:

Everyone knows platonic solids, they are Tetrahedron, Octahedron, Cube, Icosahedron and Dodecahedron. Their geometry and properties have been studied since many centuries. They are the only regular polyhedra in the three-dimensional euclidian space, in dimension four there are six regular polytops, beside these the so called 24-cell and the 600-cell are of particular interest, they have a big symmetrygroup of order 1152 and 14400. The groups have an important application in the study of algebraic surfaces with many symmetries and in particular with many nodes. Moreover there is an unexpected relation with some special algebraic surfaces, called K3-surfaces.

Lebenslauf: Dr. habil. Alessandra Sarti.

Alessandra Sarti wurde 1974 in Ferrara (Italien) geboren. Nach dem Studium der Mathematik an der Universität Ferrara, hat sie 2001 an der Universität Erlangen-Nürnberg mit einer Arbeit über Flächen mit vielen gewöhnlichen Doppelpunkte promoviert. Seit April 2002 ist sie beschäftigt an der Universität Mainz als wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Arbeitsgruppe algebraische Geometrie. Nach einem DFG Forschungsstipendium an der Universität Mailand, Italien (Mai 2005-September 2006) hat sie 2007 an der Universität Mainz mit einer Arbeit über die Geometrie einiger speziellen algebraischen Varietäten habilitiert. Zur Zeit vertritt sie eine Professorenstelle an der Universität Erlangen-Nürnberg. Ihre aktuelle Forschungsthemen sind: Automorphismengruppen von K3-Flächen und Flächen mit speziellen geometrischen Eigenschaften.

Kontaktangaben: Dr. habil. Alessandra Sarti

Johannes Gutenberg Universität Mainz
FB 08 Institut für Mathematik
Staudingerweg 9
55099 Mainz
Deutschland
Telephon: +49-6131-3923337
E-Mail: sarti@mathematik.uni-mainz.de