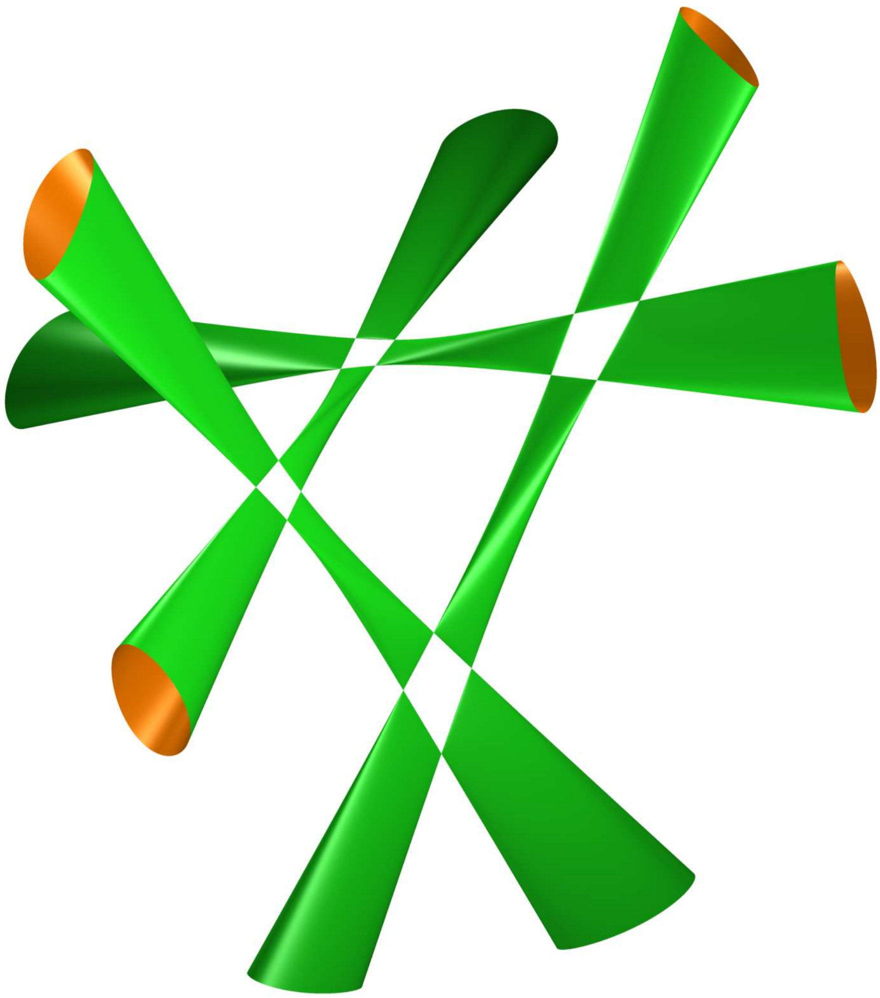
Titelbild DMV–Mitteilungen 02/08



Eine K3–Fläche

Oliver Labs, Alessandra Sarti

K3–Flächen bekamen ihren Namen im 20. Jahrhundert vom französischen Mathematiker André Weil; er schreibt: *Im zweiten Teil meines Berichts geht es um kählersche Varietäten, K3 genannt, zu Ehren von Kummer, Kodaira, Kähler und des Berges K2 im Kaschmir-Gebirge.* Dies sind komplexe Flächen, deren exakte Definition zwar recht technisch ist, von denen man jedoch einen guten Eindruck bekommt, wenn man Flächen vom Grad 4 im komplexen Dreiraum betrachtet, die nämlich größtenteils K3–Flächen sind.

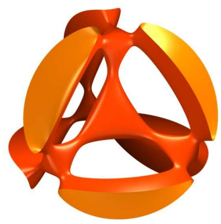
Im Gegensatz zu Flächen von allgemeinem Typ, zu denen beispielsweise nicht–singuläre Flächen vom Grad ≥ 5 gehören, ist die Klasse der K3–Flächen recht gut verstanden. Ihre eindimensionale Entsprechung sind elliptische Kurven, die in der Kryptologie Anwendungen haben. In höheren Dimensionen heißen ihre Verwandten Calabi-Yau-Varietäten, die für Physiker wegen ihren Beziehungen zur String–Theorie interessant sind.

Zu den bekanntesten Beispielen von K3–Flächen gehören die Kummer–Flächen; dies sind Flächen vom Grad 4 mit 16 Singularitäten. Solche Flächen studierte bereits in den 1860er Jahren der deutsche Mathematiker Ernst Eduard Kummer, weil er festgestellt hatte, dass keine Fläche vom Grad 4 mehr als 16 Singularitäten aufweisen kann. Die von ihm angegebenen Flächen haben die Gleichung:

$$\mathrm{Ku}_\mu \colon \left(x^2+y^2+z^2-\mu^2\right)^2 - \lambda\, y_0\, y_1\, y_2\, y_3 = 0, \quad \lambda = \frac{3\mu^2-1}{3-\mu^2},$$

wobei wir für unsere mittlere Abbildung $\mu = 1.36$ und die y_i als Seiten eines regelmäßigen Tetraeders gewählt haben:

$$y_0 = 1 - z - \sqrt{2}x,\ y_1 = 1 - z + \sqrt{2}x,\ y_2 = 1 + z + \sqrt{2}y,\ y_3 = 1 + z - \sqrt{2}y.$$



Übrigens sind K3–Flächen immer zusammenhängend, für die reellen Bilder muss dies aber natürlich nicht zutreffen. Um dies zu veranschaulichen, zeigen das obere und untere Bild jeweils eine kleine Deformation $\mathrm{Ku}_{1.33} = \pm\varepsilon$ der singulären Fläche.

Die Fläche auf dem Cover dieser DMV–Mitteilungen zeigt eine Kummer–Fläche, die im Zusammenhang mit sogenannten Abelschen Flächen in einem Artikel von C. Birkenhake, H. Lange und D. van Straten 1989 auftauchte:

$$\begin{aligned} m_1^2(y_0^2y_1^2+y_2^2y_3^2)+m_2^2(y_1^2y_3^2+y_0^2y_2^2)+m_3^2(y_0^2y_3^2+y_1^2y_2^2)& \\ +2m_1m_2(y_0y_1+y_2y_3)(y_1y_3-y_0y_2)+2m_1m_3(y_0y_3-y_1y_2)(y_0y_1-y_2y_3)& \\ +2m_2m_3(y_1y_2+y_0y_3)(y_1y_3+y_0y_2)+m_0^2y_0y_1y_2y_3 &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir $m_0 = m_1 = m_2 = 1$ und $m_3 = -10$ gesetzt haben. Auch die Ausstellung *Imaginary* (www.imaginary2008.de) zeigt Kummer–Flächen, da sie zu den prominentesten Beispielen von Flächen mit vielen Singularitäten gehören.