"Groupes de réflexions complexes, surfaces K3 et théorie de Lehrer-Springer" ①

(Ce projet est un travail avec Cédric Bonnafé)

2×1h Quimper

12-13 octobre 2023

Plan de l'exposé

① Surfaces K3

② Groupes de réflexions complexes & théorie de Lehrer-Springer

③ Quotients par des groupes de réflexions complexes de surfaces : familles de K3

---

1 Surfaces K3

Rappelons la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces (variété de dim 2.) compactes complexes S projectives ($S \hookrightarrow \mathbb{P}^X$)

On définit Ω^2_S = fibré vectoriel des 2-formes holomorphes

$= \mathcal{O}_S(K_S)$ ← faisceau associé au diviseur canonique.

Alors on peut regarder les sections globales :

$$H^0(S, (\Omega^2_S)^{\otimes n}) = H^0(S, \mathcal{O}_S(nK_S))$$

grâce à ces sections on peut définir une application rationnelle :

$$\varphi_n : S \dashrightarrow (\mathbb{P}^N)^\vee = \mathbb{P}\left(H^0(\mathcal{O}_S(nK_S))\right)^\vee$$

$$x \longmapsto (s_0(x) : \cdots : s_N(x))$$

$s_0, \ldots, s_N$ base de $H^0(\mathcal{O}_S(nK_S))$

Définition :

$$\max_n \dim \overline{\operatorname{Im} \varphi_n(S)} = \text{dimension de Kodaira de } S =: \kappa(S)$$

Comme l'un de but en géom. alg. est de classifier, $K(S)$ est un bon outil! Comme S surface $K(S) \leq 2 = \dim(S)$. et on pose. ②

$K(S) = -\infty$ si ~~[illegible]~~ $H^0(S, \mathcal{O}_S(nK_S)) = \{0\}$.

$\boxed{K(S) = -\infty}$ Surfaces rationnelles (i.e. birationnelles à $\mathbb{P}^2$)

&

Surfaces réglées. (i.e. ∃ application birationnelles $X \dashrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ si $g(C) = 0$, C courbe lisse. ($C \cong \mathbb{P}^1$ et X rat.).

$\{f_d(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\}$, $d = 1, 2, 3$ est rat.

$\boxed{K(S) = 0}$ S est envoyé sur un pt. →

Surfaces abéliennes. $\mathbb{C}^2/\Lambda$, Λ sur réseau.

↑ par vec. proj.

$\boxed{\text{Surface } K3}$ ← $\{f_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ est $K3$.

Surfaces d'Enriques : i.e. S/ι, S $K3$, $\iota \circlearrowright S$ invol.

Surfaces bielliptiques : produits de surfaces abéliennes

$\boxed{K(S) = 1}$ S est envoyé sur une courbe : surfaces elliptiques propres : elles ont toutes une fibration elliptique. $\varphi : S \to C$ (courbe) $\varphi^{-1}(p) = E$ courbe ell. $p \in C$ générique.

($\neq K3$, rationnel ...).

$\boxed{K(S) = 2}$ S est envoyé sur une surface, surfaces de type général : elles sont la classe la plus grande.

$\{f_d(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ pour d ~~[illegible]~~ ≥ 5 grand est de type général.

$\boxed{\text{Nom } K3}$ Donné par A. Weil en 1958 : si belle que la montagne K2 (escaladé en 1954) et en l'honneur de Kummer, Kähler & Kodaira.

Exemple Très simple : Le quartique de Fermat :

$$X_4=\{x_0^4+x_1^4+x_2^4+x_3^4=0\}\subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C}).$$

Propriété : . Si on utilise la formule d'adjonction on montre $K_{X_4}\sim 0$

. théorème de Barth-Larsen-Lefschetz :

$$\pi_1(X_4,\mathbb{Z})=\pi_1(\mathbb{P}_3,\mathbb{Z})=\{1\}$$ $\rightsquigarrow$ donc simplement connexe.

Def Une surface K3 est une surface compacte complexe S t.q. $K_S\sim 0$ et $\pi_1(S)=\{id\}$ (simplement connexe).

Exemples : certains revêtements doubles de $\mathbb{P}^2$; quartiques ; intersections complètes dans $\mathbb{P}_4$ et $\mathbb{P}_5$; surfaces de Kummer, ...

Quelques Propriétés :

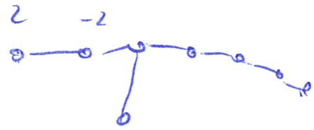
· $H^2(S,\mathbb{Z})$ est un réseau : i.e. un $\mathbb{Z}$-module libre avec une forme bil. symétrique non dégénérée. Plus précisément

$$H^2(S,\mathbb{Z})\cong\Lambda_{K3}:=U^{\oplus 3}\oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$$

rg = 22
sgn = (3, 19)

· $U=\left(\mathbb{Z}^{\oplus 2},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est le plan hyperbolique

· $E_8(-1)\longleftrightarrow$ réseau associé au syst. de racines E_8 défini négatif.



Il contient deux sous-réseaux importants :

groupe de Picard, groupe de Néron-Severi

$$\mathrm{Pic}(S)=NS(S)\subset H^2(S,\mathbb{Z})$$

$$T_S=NS(S)^{\perp}\cap H^2(S,\mathbb{Z})$$ réseau transcendant.

important dans l'étude de l'espace des modules des K3.

Quelques questions sur les surfaces K3 : $\rho(X) = \mathrm{rk}\, NS(X) \leq 20$

Les K3 avec $\rho(X) = 20$ sont spéciale, infinité denombrable dans l'espace de modules.

- Classifier et étudier les K3 avec des propriétés speciales par ex. avec actions de groupes, ou obtenues comme quotients d'autres surfaces mis dans cette exposé ou classifiera le K3 obtenue comme quotients de surfaces (de type général) par des groupes de reflections complexes ! Attention particulière à $\rho(S) = 20$.

deuxième partie de la mini-cours.

I) Groupes de reflexions complexes & théorie de Lehrer-Springer.

Def Soit $W \subseteq GL_{\mathbb{C}}(V)$ fini, V un $\mathbb{C}$-espace vect., $\dim V = n$

$$Ref(W) = \{ s \in W \mid \dim V^s = n-1 \}, \quad V^s = \{x \in V \mid s(x) = x\}$$

Si $W = \langle Ref(W) \rangle \Rightarrow$ nous appellons W groupe de reflections complexes.

Fait Nous ~~supposons~~ que la représentation $W \subseteq GL_{\mathbb{C}}(V)$ est irreductible $\Rightarrow \exists$ Classification de Shepard-Todd (1954).

$\exists$ famille infinie et $\underbrace{34 \text{ groups exceptionnels}}_{= G_4, \dots, G_{37}}$

Rappel : Si W est defini sur $\mathbb{R} \Rightarrow W$ est un groupe de Coxeter.

Rappelons aussi : Le théorème de Shepard-Todd-Chevalley-Serre :

$\mathbb{C}[V]^W =$ algèbre des polynômes invariants par W en n-variables ($\dim V = n$)

$= \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$, f_i homogène, $\deg(f_i) = d_i$ unique

pas unique

(et on rappelle $|W| = d_1 \cdots d_n$). On appelle $f_1, \dots, f_n$ ensemble des invar. fond.

Michel-Marin (2010) : On peut définir $f_i \in \mathbb{Q}[x_1,..,x_n]$.

Un peu de Théorie de Lehrer-Springer

Encore quelque notation :

$$\Delta(e) = \{1 \le k \le n \mid e \text{ divise } \underset{\deg(f_k)}{\overset{\|}{d_k}}\}$$

$$\delta(e) = \# \Delta(e)$$

racine primitive e-ième de l'unité.

$V(w, \zeta_e)$ = espace propre pour l'action de $w \in W$ sur V avec valeur propre ζ_e (si ζ_e n'est pas valeur propre de W on pose $V(w,\zeta_e)=0$)

Théorème (Springer / Lehrer-Springer)
1974 1999

(o) $\delta(e) = \max_{w \in W} (\dim V(w, \zeta_e))$ en particulier ζ_e est valeur propre de $w \in W \iff \delta(e) \neq 0 \iff e$ divise quelque d_k

(i) Soit $w_e \in W$ t.q. $\boxed{\dim V(w_e, \zeta_e) = \delta(e)}$ et soit $w \in W$, alors $\exists x \in W$ t.q. $x(V(w,\zeta_e)) \subset V(w_e, \zeta_e)$

(ii) $\bigcup_{w \in W} V(w,\zeta_e) = \bigcup_{x \in W} x(V(w_e,\zeta_e)) =$

$$= \{v \in V \mid \forall k \in \{1,..,n\} \setminus \underset{\substack{\Updownarrow \\ e \nmid d_k}}{\Delta(e)} \; f_k(v) = 0\}$$

Ex

Une application en géom. alg. !

$W = G_{30}$, $V \cong \mathbb{C}^4$ $|G_{30}| = 14400$

nous avons 4 polynômes invariants : f_1, f_2, f_3, f_4 de degrés = 2, 12, 20, 30. Considérons la famille de surfaces :

f_1 f_2 f_3 f_4

120 cell. dodéca
720 faces penta
1200 côté
600 sommet

G_{30} groupe sym dodécaplex groupe de Coxeter famille de degré 12

$X_\alpha^{G_{30}} = \{ f_1^6 + \alpha f_2 = 0 \} \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

$\Rightarrow$ Prenons $\ell = 10$ alors $\Delta(10) = \{ 1 \le k \le 4 \mid 10 \mid d_k \} = \{3,4\}$

$\Rightarrow$ $\delta(10) = \# \Delta(10) = 2 = \dim V(w_{10}, \zeta_{10})$.

et donc $\mathbb{P}(V(w_{10}, \zeta_{10}))$ est une droite de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

orbite de droites de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

Considérons $\displaystyle\bigcup_{w \in G_{30}} V(w, \zeta_{10}) = \bigcup_{x \in G_{30}} x\left(V(w_{10}, \zeta_{10})\right) =$

$= \{ v \in V \mid \forall k \in \{1,2,3,4\} \setminus \{3,4\},\ f_k(v) = 0 \}$

$= \{ v \in V \mid f_1(v) = f_2(v) = 0 \}$

10X di

Donc on trouve que $\{ f_1 = f_2 = 0 \}$ qui est le lieu base de la famille $X_\alpha^{G_{30}}$ est une famille de droite. et avec un peu plus de LS on trouve que le nombre est 24 !

Rmq A aucun moment nous avons eu besoin de la forme explicite de f_1 et f_2 !!

Fin première partie

—//—//—

Comment montrer le théorème de LS ?

Prenons l'application : $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ sous zéros communs.

$v \longmapsto (f_1(v), \dots, f_n(v))$

$\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$

Comme les f_i sont W-invariants l'application φ est constante sur les W-orbites de $v \in V$ et on peut écrire:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & V/W & \xrightarrow[\bar f]{\sim} & \mathbb{C}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V]^W) \\ v & \longmapsto & Wv & \longmapsto & (f_1(v), \dots, f_n(v)) \end{array}$$

Remarquons que nous avons une action $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^n$: ⑦

$$\xi(x_1,\dots,x_n) = (\xi^{d_1}x_1,\dots,\xi^{d_n}x_n)$$

T.q. $\bar{f}(\underbrace{\xi(Wv)}_{W(\xi v)}) = \xi \bar{f}(Wv)$ (action est équivariante par rapport à $\bar{f}$)

Considérons $\left(\frac{V}{W}\right)^{\mathfrak{I}_e} = (\mathbb{C}^n)^{\mathfrak{I}_e}$ = points fixes pour l'action de $\mathfrak{I}_e \in \mathbb{C}^*$

Nous calculons $\varphi^{-1}\left(\left(\frac{V}{W}\right)^{\mathfrak{I}_e}\right)$ en 2 façons:

① Utilisons $(\mathbb{C}^n)^{\mathfrak{I}_e}$:

$$\varphi^{-1}\left(\bar{f}^{-1}(\mathbb{C}^n)^{\mathfrak{I}_e}\right) = \{v \in V \mid (\mathfrak{I}_e^{d_1} f_1(v),\dots,\mathfrak{I}_e^{d_n} f_n(v)) = (f_1(v),\dots,f_n(v))\} =$$

Donc on doit avoir $f_i(v)=0$ si $\mathfrak{I}_e^{d_i} \neq 1$ i.e. $f_i(v)=0$ si $e \nmid d_i$

$$= \{v \in V \mid \forall 1 \le i \le n \;\; e \nmid d_i \Rightarrow f_i(v)=0\}$$

En particulier $(\mathbb{C}^n)^{\mathfrak{I}_e} \cong \mathbb{C}^{\delta(e)}$ $(\delta(e) = \#\{1 \le i \le n \mid e \mid d_i\})$

et on a $\dim \varphi^{-1}\left(\left(\frac{V}{W}\right)^{\mathfrak{I}_e}\right) = \delta(e)$ (car les fibres sont de dimension 0).

② Directement:

$$\varphi^{-1}\left(\left(\frac{V}{W}\right)^{\mathfrak{I}_e}\right) = \{v \in V \mid W(\mathfrak{I}_e v) = Wv\} =$$

$$= \{v \in V \mid \mathfrak{I}_e v \in Wv\} = \{v \in V \mid \exists w \in W \text{ t.q. } \mathfrak{I}_e v = wv\} = \bigcup_{w \in W} V(w,\mathfrak{I}_e)$$

← ils n'ont pas tous la même dimension.

① + ② donne : $\subset V$.

$$\bigcup_{w\in W} V(w,\zeta_e) = \underbrace{\{v\in V \mid \forall\, 1\le i\le m \text{ et } d_e \nmid d_i,\ f_i(v)=0\}}_{\text{tle dim}=\delta(e)} \Rightarrow$$

$$\bigcup_{w\in W} = \mathcal{X}_e$$

$\Rightarrow \exists w_e$ t.q. $\dim W(w_e,\zeta_e) = \delta(e) = \max_{w\in W} \dim V(w,\zeta_e)$] preuve (0)

Remarquons :

· $\mathcal{X}_e / W \cong \mathbb{C}^{\delta(e)}$ lisse et irred. $\Rightarrow$ W agit sur les espaces $V(w,\zeta_e)$ de la façon suivante : $\exists\, x\in W$ t.q.] preuve (i)

$$x(V(w,\zeta_e)) \subset V(w_e,\zeta_e)$$

$$\Rightarrow \quad V(w,\zeta_e) \subset x^{-1}(V(w_e,\zeta_e))$$

Tous le même dim. et ils peuvent se couper

Et de plus êne :

$$\mathcal{X}_e = \bigcup_{x\in W} x(V(w_e,\zeta_e)) = \{v\in V \mid \forall\, 1\le i\le m \text{ et } d_e \nmid d_i \Rightarrow f_i(v)=0\}$$] pour (ii)

Encore un exemple

$W = G_{31}$, $V = \mathbb{C}^4$ deg $= 8, 12, 20, 24$; f_1, f_2, f_3, f_4 $|G_{31}| = 46080$

Montrons que $\{f_1=0\}$ (surface de degré 8 dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$) contient au moins 160 droites.

$e=12$, $\delta(12) = \#\{1\le i\le 4 \mid 12 \mid d_i\} = \#\{2,4\} = 2$

$$\mathcal{X}_{12} = \{v\in V \mid f_1(v) = f_3(v) = 0\} = \bigcup_{x\in G_{31}} x(V(w_{12},\zeta_{12}))$$

orbite de droites dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

avec un peu plus de LS on trouve 160 droites

Avec LS et sans utilisation des équations explicite on peut retrouver les résultats suivants.

Théorème (Boissière-S. 2007) Soit $S_8 \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ une surface de degré 8, alors le nombre max de droites $\ell(S_8)$ satisfait

Segre bound 1943 $(d-2)(11d-6)$

$$352 \leq \ell(S_8) \leq 432$$

(En effet l'octique $\{f_1 = 0\}$ qui est G_{31}-inv. contient 352 droites.
et on peut donner une preuve avec LS ($160 + 192 \leftarrow 2$ orbites)

§3 K3 & groupes de réflexions complexes $W \curvearrowright V$ $\dim V = 4$

$\underline{\underline{Q}}$: $f \in \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$ inv. fonda., $Z(f) = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid f(v) = 0\}$

$\Gamma < W$, pouvons nous ~~décrire~~ classifier les quotients

$$\frac{Z(f)}{\Gamma} \text{ ?}$$ Oui (pour certains Γ)

Théorème (Bonnafé-S. 2021) $W \curvearrowright V$, $\dim V = 4$, $\mathbb{C}[V]^W =$
W groupe de refl. complexes $\leftarrow$ ensemble fondamental d'invariants!
$= \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$, $\deg f_i = d_i$. Supposons.

(a) $s \in \mathrm{Ref}(W) \Rightarrow o(s) = 2$
(i.e. W est engendré par des reflexions d'ordre 2)

(b) soit $f \in \mathbb{C}[V]^W$ un invariant fondamentale. "bien choisi".

(c) $\Gamma = W^{SL} = W \cap SL_{\mathbb{C}}$ ou $\Gamma \supset W' = D(W)$ le groupe derivée.

(d) $Z(f) = \{x \in \mathbb{P}(V) \mid f(x) = 0\}$ soit au pire des sing ADE.

$\Rightarrow \widetilde{\frac{Z(f)}{\Gamma}} \xrightarrow{\text{res. min.}} \frac{Z(f)}{\Gamma}$, $\frac{Z(f)}{\Gamma}$ est une surface K3 $\left(\text{i.e. } \frac{Z(f)}{\Gamma} \text{ a au pire des sing ADE}\right)$

a) $\nexists$ exemples avec $\sigma(S) > 2$ qui fonctionnent.

b) Les surfaces sont dans des espaces proj. à poids et on a besoin de cette condition pour avoir le canonique trivial.

c) Peut-être on peut trouver plus de groupes mais nous savons travailler avec W^{SL} et W' !

d) Condition pour avoir pas ADE ou quotient.

Remarque. Nous trouvons 15 familles (certaines sont 0-dim).

· Preuve utilise LS pour éviter un étude cas par cas. et les groupes except. que nous trouvons sont :

$$G_{28},\ G_{29},\ G_{30},\ G_{31}.$$

Nous retrouvons le resultats suivants. (qui a motivé le travail)

Théorème (Boiss.- S. 2003)

Soit $G_{30}^{SL} = G_{30} \cap SL_{\mathbb{C}}$, alors la resolution minimale de $\{$ ~~de~~ $\frac{Z(f)}{G_{30}^{SL}}$, ~~ff~~ inv. fonds de degré 12

est une surface K3.

Rap G_{30} = groupe de Coxeter de dimension 4 qui est le groupe des isométries d'un polytope régulier en dim 4 (DODECAPLEX.)

$$|G_{30}| = 14\,400.$$

Sur la preuve du théorème 1

Nous avons une application :

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathrm{Proj}\left(\mathbb{C}[V]^W\right) = \mathbb{P}(d_1, d_2, d_3, d_4)$$

$$v \longmapsto \underbrace{\left(f_1(v), f_2(v), f_3(v), f_4(v)\right)}$$

et par construction : $\dfrac{\mathbb{P}(V)}{W} \cong \mathbb{P}(d_1, d_2, d_3, d_4)$ ils n'ont pas de zéros communs car ils sont un ensemble fondam.

Si on prend $f_1 \in \mathbb{C}[V]^W$ (f_1 pour fixer les idée).

$$\frac{Z(f_1)}{W} \cong \mathbb{P}(d_2, d_3, d_4)$$

Prenons $\Gamma = W^{SL} = \{ w \in W \mid \det(w) = 1 \}$ et nous avons :

Car $s \in \mathrm{Ref}(W) \Rightarrow$ (hyperplan(e)) $o(s) = 2 \Rightarrow \det(s) = \pm 1$!

$$1 \longrightarrow W^{SL} \longrightarrow W \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^*, \qquad \mathrm{Im}(\det) = \mu_2$$

$$\alpha \longmapsto \det(\alpha) \in \{\pm 1\}$$

$\left|\dfrac{W}{W^{SL}}\right| = 2$ et nous avons une application de degré 2

$$\frac{Z(f_1)}{W^{SL}} \xrightarrow{2:1} \frac{Z(f_1)}{W} = \mathbb{P}(d_2, d_3, d_4)$$

$$\frac{Z(f_1)}{W} = \left(\frac{Z(f_1)/W^{SL}}{\mu_2}\right)$$

Donc notre surface est un revêtement double d'un espace proj. à poids

Remarque Même si W groupe des refl. complexes $\frac{\mathbb{P}(V)}{W}$ peut être sg.

Rappelons (Théorème de [illegible])

$\mathcal{X}$ var. alg. cplexe, $G \curvearrowright \mathcal{X}$ fini.

$\frac{\mathcal{X}}{G}$ lisse $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{X}$ G_x est un groupe de refl. complexes sur l'espace tg.

$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

Dans notre cas il peut y avoir des pts $y \in \mathbb{P}(V)$ qui ont $W_y \in W$ qui n'est pas un groupe de reflexions!

Comment choisir $\deg(f_1)$ de façon que le conormique soit normale?

Soit $\mathcal{A} = \{$hyperplans des reflexions de $W\} = \{V^s, s \in Ref(W)\}$

$|\mathcal{A}| = |Ref(W)|$ et on peut montrer (1) $|Ref(W)| = d_1+d_2+d_3+d_4-4$

(2) Soit $J = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ avec $H : \{\alpha_H = 0\}$ équation

$\deg(J) = |\mathcal{A}|$ ~~et on montre~~ alors $J^2 \in \mathbb{C}[V]^W$ ($\Rightarrow \exists$ un polynôme $P(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ t.q. $J^2 = P(f_1, f_2, f_3, f_4)$)

et (3) $\mathbb{C}[V]^{W^{SL}} = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4, J]$ donc. De (1)+(2)+(3) on a

$$\frac{\mathbb{P}(V)}{W^{SL}} = \mathrm{Proj}\left(\mathbb{C}[V]^{W^{SL}}\right) = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : j) \in \mathbb{P}(d_1, d_2, d_3, d_4, |\mathcal{A}|)$$

$$\text{t.q. } j^2 = P(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$$

est la relation

et $\dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}} = \{ (x_2 : x_3 : x_4 : j) \in \mathbb{P}(d_2, d_3, d_4, |A|)$ 13

t.q. $\underbrace{j^2 = P(0, x_2, x_3, x_4)}_{F} \overset{=0}{\}}$.

Donc on a une éq. de $\dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}}$ dans un espace projectif à poids.

← gcd de 3 des 4 poids = 1.

Si $\mathbb{P}(d_2, d_3, d_4, |A|)$ est "well formed" alors si :

- $\deg F = d_2 + d_3 + d_4 + |A|$ et $\dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}}$ a seulement des ADE

$\Rightarrow \dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}}$ a canonique trivial. — Fin —

Exemple (non-"well formed") $W = G_{30}$ deg

$\mathbb{C}[V]^{G_{30}} = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$ et prenons f_2, $\deg f_2 = 12$
$\quad\quad\quad\quad 2 \quad 12 \quad 20 \quad 30$

$\dfrac{Z(f_2)}{G_{30}^{SL}} = \{ (x_1 : x_3 : x_4 : j) \in \mathbb{P}(2, 20, 30, 60) \mid j^2 = P(x_1, 0, x_3, x_4) \}$

$60 = |A| = 2 + 12 + 20 + 30 - 4$ mais par les propriétés des espace proj p.

← non "well-formed"

$\mathbb{P}(2, 20, 30, 60) = \mathbb{P}(1, 10, 15, 30) = \mathbb{P}(1, 2, 3, 6)$

Et on peut écrire :

$\dfrac{Z(f_2)}{G_{30}^{SL}} = \{ (y_1 : y_3 : y_4 : j') \in \mathbb{P}(1, 2, 3, 6) \mid j'^2 = Q(y_1, y_3, y_4)$

en déduire

et ici on a bien $\underline{12 = 1 + 2 + 3 + 6}$

Donc si on montre $\dfrac{Z(f_2)}{W^{SL}}$ a sg ADE $\Rightarrow$ le canonique est trivial.

Rmque : Les esp. $\mathbb{P}$ p. des $\dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}}$ ne sont pas forcément "quasi-smooth"

i.e. les singularités ne viennent pas forcément toutes du wps.

La théorie de Reid-Yonemura (80-90) ne s'applique pas !

Pour les singularités de $\dfrac{Z(f_2)}{W^{SL}}$:

Lemme : X surface avec sing ADE, $G \curvearrowright X$ fini tq $\dfrac{X}{G}$ lisse.

$\Rightarrow \Gamma < G$, $[G:\Gamma]=2 \Rightarrow X/\Gamma$ a seulement des sing ADE

Ce résultat est locale et on a :

$$\pi : \frac{Z(f_1)}{W^{SL}} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}(d_2,d_3,d_4)$$

: en dehors des pts sing de $\mathbb{P}(d_2,d_3,d_4)$ $\dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}}$ a seulement des sing ADE.

Il faut donc étudier les pts $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ et $(0:0:1)$ de $\mathbb{P}(d_2,d_3,d_4)$. LS $\Rightarrow$ π n'est pas ramifié sur $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ et $(0:1:0)$!! Conclusion $\dfrac{Z(f_1)}{W^{SL}}$ a seulement des ADE.

Dans notre exemple avec $W = G_{30}$: A

$$\pi : \frac{Z(f_2)}{G_{30}^{SL}} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}(1,2,3)$$

sing A_1 sing A_3

$P_1 = (0:1:0)$
$P_2 = (0:0:1)$

$\Rightarrow \pi^{-1}(0:1:0) = 2$ sing A_1 $\quad \pi^{-1}(0:0:1) = 2$ sing A_3

Dernière étape : on a que le canonique de $\dfrac{Z(f)}{W^{SL}}$ est trivial et donc de $\widetilde{\left(\dfrac{Z(f)}{W^{SL}}\right)}$ est aussi trivial (ADE ne change pas le canonique).

A priori $\left(\frac{Z(f)}{W^{SL}}\right)$ pourrait être une surface abélienne, mais

$\chi(A) = 0$ et $\chi(K3) = 24$.

$b^0 - b^1 + b^2 - b^3 + b^4$ $\quad$ $b^0 - b^1 + b^2 - b^3 + b^4$, $b^2 = 22$.

Dimension + Poincaré duality (Reid 1982): $H^1(Z(f_1), \mathbb{C}) = H^3(Z(f_1), \mathbb{C}) = 0$.

(on a seulement $Z(f_1)$ a sing ADE).

et $H^i\left(\frac{Z(f_i)}{\Gamma}, \mathbb{C}\right) = H^i(Z(f_i), \mathbb{C})^{\Gamma}$

$\Rightarrow \frac{Z(f_i)}{\Gamma}$ n'a pas de cohom. impaire $\Rightarrow$ la caract. d'Euler $\chi\left(\frac{Z(f_i)}{\Gamma}\right) > 0$.

Donc on a bien une surface K3 !

Revenons sur ⊛ : prenons $p_2 = (0:0:1) \in \mathbb{P}(1,2,3)$ et regardons

que π ne ramifie pas :

$$Z(f_2) \to \frac{Z(f_2)}{G_{30}^{SL}} \xrightarrow{\pi} \frac{Z(f_2)}{G_{30}} = \mathbb{P}(1,2,3)$$

φ

(rappel : $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(d_1, d_2, d_3, d_4)$, $v \mapsto (f_1(v), f_2(v), f_3(v), f_4(v))$)

$\varphi^{-1}((0:0:1)) = \{x \in Z(f_2) \mid f_1(x) = f_3(x) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{P}(V) \mid \underset{12}{f_2(x)} = \underset{2}{f_1(x)} = \underset{20}{f_3(x)} = 0\}$ prenons ~~degré~~ $l = 30$

$= \mathcal{X}_{30} = \bigcup_{x \in W} x(V(w_{30}, \zeta_{30}))$

et $\dim V(w_{30}, \delta_{30}) = 1 = \delta(30)$ 30 divise par 30. (16)

$\Rightarrow \mathbb{P}(V(w_{30}, \delta_{30}))$ est un pt. Donc $\varphi^{-1}((0:0:1))$ est l'orbite de $[V(w_{30}, \delta_{30})] =: z_{30}$.

$\underline{\underline{LS}}$ $\mathrm{Stab}_{G_{30}}(z_{30}) \subset W^{SL}$ Donc quand on fait le quot par π. il n'y a plus de stabilisateur $\Rightarrow$ $\pi^{-1}((0:0:1))$ sont 2 pts !

(pour en avoir 1 il devrait y avoir "du stabilisateur en plus")