COMPLEXITE ET RANG D'UNE ACTION EN THEORIE DES INVARIANTS.

1. Définitions et notations.

1.1. Soit G un groupe de Lie réductif complexe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, T un tore maximal dans G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, B un sous-groupe de Borel de G contenant T, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. On se donne également un système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ et un système de racines positives Δ^+ associé au choix de B. On notera $<,>$ le produit scalaire usuel sur $\mathfrak{t}^*$. A toute racine α de Δ, on fait correspondre le vecteur-racine noté X_α. Soit enfin $U = B^u$ le radical unipotent de B, $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie. $\mathfrak{u}$ est engendrée par les vecteurs $X_\alpha, \alpha \in \Delta^+$. Soit enfin $\chi(T)$ le groupe des caractères de T, et $\chi_+(T)$ le semi-groupe des caractères dominants de T.

Définition 1 : *Soit X une G-variété irréductible. On appelle complexite de l'action de G dans X et on note $C_G(X)$ le nombre égal à la codimension minimale des B-orbites dans X.*

En particulier, d'après un théorème de Rosenlicht, on a :

$$c_G(X) = degtr_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)^B)$$

L'action de T sur X induit une action de T sur le corps $\mathbb{C}(X)$. A tout λ de $\chi(T)$, on associe l'ensemble $S_\lambda = \{f \in \mathbb{C}(X) \ / \ b.f = \lambda(b)f, \forall b \in B\}$. Posons ensuite :

$$\chi(X) = \{\lambda \in \chi(T) \ / \ S_\lambda \neq 0\}$$

Il est clair qu'il s'agit d'un sous-groupe abélien du groupe abélien libre $\chi(T)$, on peut donc définir son rang.

Définition 2 : *on appelle rang de l'action de G dans X et on note $rg(X)$ le rang du groupe abélien $\chi(X)$.*

Il résulte des définitions que, pour calculer la complexité, il faudrait pouvoir déterminer la dimension d'une B-orbite quelconque dans la variété, ce qui n'est pas clair à priori. On va montrer dans ce qui suit de quelle façon les notions de complexité et de rang d'une action sont reliées à la notion de " point en position générale " et donner des formules permettant de calculer ces deux invariants.

1.2. **Stabilisateurs en position générale.** On considère donc une G-variété irréductible X. Supposons donné un automorphisme involutif θ de G tel que : $\theta(t) = t^{-1}, \forall t \in T$. Il s'en suit que : $\theta(B) \cap B = T$ et que, pour tout sous-groupe parabolique P contenant B, $P \cap \theta(P)$ est un sous-groupe de Levi de P ou de $\theta(P)$. Désignons, d'autre part, par X^* la variété X munie de l'action de G donnée par :

$$\forall g \in G, \forall x^* \in X^*, g.x^* = \theta(g).x^*$$

G agit alors sur $X \times X^*$ par l'action diagonale, soit : $g.(x, y) = (g.x, \theta(g).y)$.

L'ensemble $\{(x, x^*), x \in X\}$ est appelé diagonale de $X \times X^*$.

Définition 3 :

- Un sous-groupe H de G est appelé "stabilisateur en position générale" et noté s.p.g. s'il existe un ouvert non vide Ω de X tel que, pour tout $y \in \Omega$, H^y est conjugué à H.

- Dans ce cas, les points de Ω sont appelés "points en position générale" et notés p.g.p.

La fonction qui, à chaque point de X, associe la dimension de sa G-orbite est semi-continue inférieurement . Il s'en suit que tout p.g.p a une G-orbite dans X qui est de dimension maximale.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 : *Il existe un point $z = (x, x^*) \in X \times X^*$ tel que :*
1) $U_* = U^x$ est un s.p.g pour l'action de U dans X.
2) $B_* = B^x$ est un s.p.g pour l'action de B dans X.
3) $S = G^z = G^x \cap \theta(G^x)$ est un s.p.g pour l'action de G dans $X \times X^*$.
4) $U_* = U \cap S$, $B_* = B \cap S$.
5) Il existe $t \in T, G$-dominant, tel que :

$$(G^t)' \subset S \subset G^t$$

Ici, $(G^t)'$ désigne le sous-groupe dérivé de G^t.

2. Preuve du théorème 1

2.1. Plaçons-nous dorénavant dans le cas où G est un groupe réductif linéaire, soit $G \subset GL(V)$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $v_0 \in V$ un vecteur de plus bas poids w_0 relativement à B. On considère le sous-groupe parabolique P tel que $\theta(P) = G(\mathbb{C}v_0)$ soit le stabilisateur dans G de la droite vectorielle engendrée par v_0. Alors, $B \subset P$, $L = \theta(P) \cap P$ est un sous-groupe de Lévi θ-invariant de P et P^u désignera le radical unipotent de P . On notera respectivement par $\mathfrak{p}, \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{p}^u$ les algèbres de Lie des groupes P, L et P^u.

L'espace $\mathfrak{p}.v_0$ est L-invariant. Soit W' un supplémentaire L-invariant de $\mathfrak{p}.v_0$ dans V. D'autre part, puisque v_0 est un vecteur propre pour l'action de L, on a : $\mathbb{C}v_0 = \mathfrak{l}v_0$. Il s'en suit que l'espace $W = \mathbb{C}v_0 \oplus W'$ est L-invariant et que l'on a : $V = W \oplus \mathfrak{p}^u.v_0$. Soit $p_0 : V \longrightarrow \mathbb{C}.v_0$ la projection canonique. Posons :

$$\Omega = \{z \in V \ / \ p_0(z) \neq 0\}$$
$$\widetilde{W} = \Omega \cap W$$

On a le résultat suivant :

Proposition 1 : *$\widetilde{W}$ est un sous-ensemble L-invariant de W, Ω est un sous-ensemble P^u-invariant de V et l'application $(g, x) \longrightarrow g.x$ est un isomorphisme P^u-invariant de $P^u \times \widetilde{W}$ sur Ω.*

Preuve : Soit $\Delta' = \{\alpha \in \Delta^+ \ / \ < w_0, \alpha > \ < 0\}$. Posons : $\Delta' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Il est clair que l'algèbre $\mathfrak{p}^u$ est engendrée par les éléments $X_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq m$. Si $\alpha \in \Delta^+$, on notera $x_\alpha(c) = \exp cX_\alpha, c \in \mathbb{C}$, si bien que tout élément u de P^u peut s'écrire sous la forme : $u = \displaystyle\prod_{\alpha \in \Delta'} x_\alpha(c_\alpha)$.

Pour tout $i, 1 \leq i \leq m$, soit v_i un vecteur de V, de poids $w_0 + \alpha_i$. On obtient une base de vecteurs-poids de V, en complétant la famille $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ en une famille

$(v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ de vecteurs-poids de V. Soit $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ la base duale de $(v_0, \ldots, v_n)$. Dans ces conditions, on constate que :

$$\Omega = \{z \in V, \mu_0(z) \neq 0\}$$
$$\widetilde{W} = \{z \in V, \mu_0(z) \neq 0, \mu_i(z) = 0, \forall i, 1 \leq i \leq m\}$$

On constate facilement, tout d'abord, à l'aide des définitions, que $\widetilde{W}$ est L-invariant et que Ω est P^u-invariant.

Soit $\phi : P^u \times \widetilde{W} \longrightarrow \Omega$ définie par $\phi(u,v) = u.v$. En faisant agir P^u sur le premier facteur de l'ensemble de départ, on constate que cette application est bien P^u-équivariante. Montrons qu'elle est bijective.

Soit $u \in P^u, v \in \widetilde{W}$ tels que $u.v \in \widetilde{W}$. Nous allons montrer que $u = e$. Posons : $u = \prod_{\alpha \in \Delta'} x_\alpha(c_\alpha)$. Montrons que, pour toute racine α, le coefficient c_α est nul. On va faire, pour cela, une récurrence sur la hauteur de α.

Supposons tout d'abord, que $ht(\alpha) = 1$, c'est à dire que $\alpha = \alpha_i$ est une racine simple. Dans ces conditions, le coefficient de v_i dans la décomposition de $u.v$ suivant la base $(v_0, \ldots, v_n)$ est nécessairement $c_\alpha \mu_0(v)$. Comme $u.v \in \widetilde{W}$, cela impose que $c_\alpha = 0$.

Supposons maintenant que $c_\alpha = 0$, pour toute racine α de hauteur strictement inférieure à k et considérons une racine α_i de hauteur k. En tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on constate donc que le coefficient de v_i dans $u.v$ est encore nécessairement $c_{\alpha_i}\mu_0(v)$, ce qui montre bien que $c_{\alpha_i} = 0$.

Soit $(u,v), (u',v') \in P^u \times \widetilde{W}$ tels que $u.v = u'.v'$. Alors, $u'^{-1}u.v \in \widetilde{W}$, d'où $u'^{-1}.u = e$, d'après ce qui précède, et donc : $u = u', v = v'$. L'application ϕ est ainsi injective.

Soit $v \in \Omega$. Montrons qu'il existe un élément $f(v) \in P^u$ tel que $f(v).v \in \widetilde{W}$. Ecrivons $f(v)$ sous la forme :

$$f(v) = \prod_{\alpha \in \Delta'} x_\alpha(c_\alpha(v))$$

Déterminons les $c_\alpha(v)$ par récurrence sur la hauteur de α.

Si $ht(\alpha) = 1$, le coefficient de v_α dans l'écriture de $f(v).v$ est nécessairement $c_\alpha(v)\mu_0(v) + \mu_\alpha(v)$. On a donc : $c_\alpha(v) = -\dfrac{\mu_\alpha(v)}{\mu_0(v)}$.

Supposons maintenant que pour chaque racine α telle que $ht(\alpha) < k$, on ait construit les coefficients $c_\alpha(v)$.

Soit β une racine de hauteur k. Le coefficient de v_β dans l'écriture de $f(v).v$ est nécesairement :

$$c_\beta \mu_0(v) + \mu_\beta(v) + Q(c_\alpha(v), \mu_\alpha(v), \mu_0(v))$$

où Q est un polynôme, les α dans Q étant des racines de hauteur strictement inférieure à k. Le résultat s'en suit en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Il résulte de cette construction que, pour tout $v \in \Omega, f(v)$ est l'unique élément de P^u tel que : $f(v).v \in \widetilde{W}$. On peut donc définir l'application $\psi : \Omega \longrightarrow P^u \times \widetilde{W}$ par $\psi(v) = (f(v)^{-1}, f(v).v)$ et on vérifie que :

$$\forall v \in \Omega, \psi \circ \phi(u,v) = (u,v)$$

Il s'en suit que l'application ϕ est bien bijective.

2.2. On va commencer par démontrer le théorème 1 lorsque $G = T$ est un tore agissant dans une variété algébrique irréductible X, incluse dans le G-module V. En considérant la décomposition de V en sous-espaces propres suivant l'action de V, on a :

$$V = \bigoplus_{i=1}^{i=p} V_{\lambda_i}$$

où les (λ_i) sont des caractères de T.

Soit $x \in X$. Alors, T^x est une intersection de noyaux de caractères λ_i. Il s'en suit que l'ensemble $\{T^x, x \in X\}$ est fini. Posons :

$$\{T^x, x \in X\} = \{T_i, 1 \leq i \leq m\}$$

Supposons tout d'abord l'action de T fidèle. Alors, pour tout sous-groupe non trivial $T' \subset T$, l'ensemble $X^{T'}$ des points de X fixés par T' est distinct de X.

Supposons que, pour tout $x \in X, T^x$ soit non trivial. Pour tout $i, 1 \leq i \leq m$, l'ensemble X^{T_i} est un fermé de X, distinct de X de réunion égale à X. Ceci est impossible car X est irréductible.

Ainsi, l'ensemble des $x \in X$ tels que T^x soit trivial est non vide et c'est un ouvert de X. Il répond bien à la question ce qui démontre le théorème 1 pour le tore T.

Si l'action de T n'est pas fidèle, on considère le noyau T_X de l'action de T sur X. Le groupe quotient T/T_X est un tore agissant fidèlement sur X et on est ramené au cas précédent.

2.3. On peut tout d'abord remplacer X, sans perte de généralité, par toute variété birationnellement G-isomorphe à X.

On a ensuite le théorème de Sumihiro :

Théorème 2 : *Soit G un groupe réductif linéaire et X une variété normale quasi-projective sur laquelle G agit . Il existe un plongement $\psi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ et une représentation de groupe $\rho : G \longrightarrow PGL(n)$ telle que :*

$$\forall x \in X, \forall g \in G, \rho(g)\psi(x) = \psi(gx)$$

Soit U le sous-espace des points de X où la variété est normale. Il s'agit bien d'un ouvert G-invariant de X. D'autre part, d'après un résultat de Sumihiro, chaque point d'une G- variété normale possède un voisinage ouvert quasi-projectif et G-invariant. On peut donc supposer U quasi-projectif.

En considérant la fermeture $\overline{U}$ de U dans $\mathbb{P}^n$, on peut donc ramener le problème au cas où X est une variété projective plongée de manière G-équivariante dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associé à un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, muni d'une action de G.

Soit maintenant $\widehat{X}$ le cône affine dans V engendré par X et $\widehat{G} = G \times \mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^* \subset GL(V)$ s'identifie à un tore de dimension 1 agissant par homothétie. On pose :

$$\widehat{B} = B \times \mathbb{C}^*,\ \widehat{T} = T \times \mathbb{C}^*,\ \widehat{U} = U$$

Le groupe $\widehat{G}$ agit sur le cône $\widehat{X}$ par : $(g, z).v = zg.v$ et il est facile de voir que si le théorème est vrai pour le couple $(\widehat{G}, \widehat{X})$, il le sera pour le couple (G, X). En effet, considérons les projections canoniques : $p_V : V\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ et $p_G : \widehat{G} \longrightarrow G$. On vérifie alors immédiatement que : $\forall x \in \widehat{X}, p_G(\widehat{B}^x) = B^{p_V(x)}$.

On peut donc supposer maintenant que $X \subset V$ est un cône affine inclus dans un G-module V. On va raisonner par récurrence sur le rang semi-simple de G, noté $ssrg(G)$.
- Si $ssrg(G) = 0, G$ est un tore et le résultat, dans ce cas, est clair d'après ce qui précède.
- Supposons donc que $ssrg(G) > 0$. Comme X est un cône, $p_V(X)$ est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(V)$, donc une variété projective, donc une variété complète.

Rappelons le théorème suivant, dû à A.Borel :

Théorème 3 : *Soit H un groupe résoluble connexe algébrique, X une H-variété complète. Alors, X possède un point fixe par H.*

Appliquons ce résultat à la situation précédente en considérant le groupe U^- agissant sur $p_V(X)$. $p_V(X)$ possède donc un point fixe par U^-. Il en est de même pour X.

On peut donc supposer que le cône X possède un vecteur de plus bas poids, suivant l'action de G dans V, que nous noterons v_0. w_0 sera le poids correspondant. On est donc dans la situation du paragraphe précédent et on introduit les notations correspondantes : le parabolique P, son facteur de Lévi L, $B(L)$ un sous-groupe de Borel de L, les ouverts Ω et $\widetilde{W}$. D'après la proposition 1, l'application $(g, x) \longrightarrow g.x$ est un isomorphisme P^u-invariant de $P^u \times \widetilde{W}$ sur Ω. Posons :

$$\Omega_X = X \cap \Omega, \quad \widetilde{W_X} = X \cap \widetilde{W}$$

Soit W_X la fermeture de $\widetilde{W_X}$ dans W.

On peut, de manière analogue, définir les objets "duaux" dans X^*, soit $\Omega_X^*, \widetilde{W_X^*}$ et W_X^*. L'application $(g, x) \longrightarrow g.x$ et la proposition 1 nous permettent de définir les isomorphismes suivants :

$$\phi_X : P^u \times \widetilde{W_X} \simeq \Omega_X, \phi_X^* : P_-^u \times \widetilde{W_X^*} \simeq \Omega_X^*$$

En particulier, les variétés W_X et W_X^* sont irréductibles.

On va appliquer l'hypothèse de récurrence à l'action de L sur $W_X \times W_X^*$. Il existe donc $z = (x, x^*) \in W_X \times W_X^*$ tel que :

- L^z est un s.p.g pour l'action de L dans $W_X \times W_X^*$.
- $L^z \cap B(L) = B(L)^x$ est un s.p.g pour l'action de $B(L)$ dans W_X.
- $L^z \cap U(L) = U(L)^x$ est un s.p.g pour l'action de $U(L)$ dans W_X
- Il existe $t \in \mathfrak{t}$, L-dominant tel que :

$$(L^t)' \subset L^z \subset L^t$$

Comme $\widetilde{W_X}$ est un ouvert de W_X, on peut donc choisir $x \in \widetilde{W_X}$.

On montre tout d'abord que : $B^x = B(L)^x, U^x = U(L)^x$. En effet, on sait que : $B = P^u.B(L)$. Soit $z \in B^x, z = \alpha.\beta, \alpha \in P^u, \beta \in B(L)$. ceci nous donne : $\alpha\beta.x = x$ et, donc, $\beta.x = x$ et $\alpha = 1$, compte-tenu de l'isomorphisme ϕ_X, ce qui donne bien l'égalité : $B^x = B(L)^x$. Il en est de même pour la deuxième égalité.

Il s'en suit que x est un p.g.p pour les actions respectives de B et de U dans X. En effet, on sait qu'il existe un ouvert U_W de $\widetilde{W_X}$ tel que :

$$\forall y \in U_W, B(L)^y = aB(L)^x a^{-1}, a \in L$$

L'image de $P^u \times U_W$ par l'application ϕ_X est un ouvert U_X de X. Alors, tout $v \in U_X$ est de la forme $v = g.y, g \in P^u, y \in U_W$ et il est clair que : $B^v = gaB^x(ga)^{-1}$, ce qui démontre les points 1) et 2) du théorème 1.

2.4. Les isomorphismes ϕ_X et ϕ_X^* impliquent, d'autre part, que :

$$\overline{G.W_X \times W_X^*} = X \times X^*$$

On va maintenant montrer que : $G^z \subset L$ ou encore que $G^z = L^z$ et il suffira alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence et d'utiliser l'égalité précédente pour démontrer les points 3) et 4) du théorème 1).

Pour cela, nous avons besoin de la théorie du "Slice étale " de Luna dont nous allons tout d'abord rappeler les résultats principaux.

Définition 4 : *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme de G-variétés affines, G étant un groupe réductif.*

1) Soit $x \in X$. φ est dit étale en x si $d\varphi_x : T_xX \longrightarrow T_{\varphi(x)}Y$ est un isomorphisme.

2) φ induit un morphisme sur les variétés quotients correspondantes, soit $\varphi_G : X//G \longrightarrow Y//G$. On notera, d'autre part, $\pi_{G,X} : X \longrightarrow X//G$ le morphisme canonique de X sur la variété quotient $X//G$. Le morphisme φ est dit excellent si φ et φ_G sont étales et si le morphisme $\overline{\varphi_G} : X \longrightarrow Y \times_{Y//G} X//G$ défini par : $\overline{\varphi_G}(x) = (\varphi(x), \pi_G(x))$ est un isomorphisme.

On remarque immédiatement que, si φ est excellent, alors : $G^x = G^{\varphi(x)}, \forall x \in X$.

Théorème 4 : *Soit X une G-variété affine, soit $x \in X$ tel que l'orbite $G.x$ soit fermée. Soit $H = G^x$. Il existe une sous-variété affine localement fermée S de X, H-stable et H-saturée, contenant x, telle que :*

- Le morphisme $\varphi : G \times_H S \longrightarrow X$ défini par : $\varphi(g, s) = g.s$ est excellent.

- L'image $U = G.S$ de φ est un G-ouvert affine G-saturé de X.

Pour construire S, on procède ainsi :

On suppose $X \subset V$, où V est un G-module. Comme l'orbite $G.x$ est fermée, H est réductif et opère donc de manière complétement réductible dans V. Soit N un supplémentaire H-invariant de $T_x(G.x)$ dans V et $\varphi : G \times_H N \longrightarrow V$ l'application définie par : $\varphi(g, n) = g.(x + n)$. Il est clair que φ est un isomorphisme de $G.(1, 0)$ sur $G.x$ et que, par définition, la différentielle de φ en $(1, 0)$ est un isomorphisme. Selon un résultat de Luna, il existe un voisinage ouvert H-invariant B de 0 dans N tel que φ soit un morphisme excellent de $G \times_H B$ sur un voisinage de $G.x$ dans V.

Soit, alors, $S = (x + B) \cap X$. On vérifie que S satisfait aux conditions souhaitées.

En conséquence, on constate que : $\forall y \in S, G^y = G^{(1,y)} \subset G^x$.

On a aussi besoin d'un critère permettant de décider qu'une G-orbite est fermée.

Théorème 5 : *Soit X une G-variété affine, $H \subset G$ un sousgroupe réductif de G. Soit $x \in X^H$. Alors, la G-orbite $G.x$ est fermée dans X si et seulement si l'orbite $N_G(H).x$ est fermée dans X.*

Considérons le point $p = (v_0, v_0^*) \in X \times X^*$. Soit $H = G^p$. Alors, le quotient $N_G(H)/H$ est un tore de dimension 1. Dans ces conditions, l'orbite $N_G(H).p$ est la même que l'orbite $(N_G(H)/H).p$ qui est fermée dans X. Il s'en suit, d'après le théorème 5, que la G-orbite $G.p$ est fermée dans X.

Soit S_p un supplémentaire de $T_p(G.p)$ dans $V \times V^*$. En utilisant l'identification $T_p(G.p) \simeq \mathfrak{g}.p$ et les décompositions de V et V^* suivant les espaces W' et W'^*, on en déduit facilement que :

$$S_p \simeq W' \times W'^* \oplus < p >$$

On voit que cet espace est de co-dimension 1 dans $W \times W^*$. Posons ensuite : $Y_p = (p + S_p) \cap X \times X^*$. Soit Z_p le slice étale en p. On sait que Z_p est un voisinage G^p-invariant de p dans l'intersection précédente.

D'après ce qui précède, on voit que l'on peut considérer Z_p comme un ouvert d'une sous-variété de codimension 1 dans $W_X \times W_X^*$. De plus, par construction, chaque point de Z_p a ses composantes égales en v_0 et v_0^*. Ceci implique que : $\dim(L.Z_p) > \dim Z_p$.

Pour des raisons de codimension, on en déduit que : $\overline{L.Z_p} = W_X \times W_X^*$.

On sait que : $\forall y \in Z_p, G^y \subset G^p \subset L$. Soit $a.y \in L.Z_p$ et $b \in G^{a.y}$. On a : $a^{-1}ba \in G^p \subset L$, donc $b \in L$. Ainsi, pour presque tout point z de $W_X \times W_X^*$, on a : $G^z \subset L$, ce qui suffit pour montrer le résultat souhaité.

2.5. Il reste à montrer le 5) du théorème 2). On utilise encore la récurrence précedente. On sait ainsi qu'il existe un élément L-dominant $t \in \mathfrak{t}$ tel que :

$$(L^t)' \subset L^z = G^z \subset L^t$$

D'autre part, par construction, on sait qu'il existe un élément G-dominant $t_1 \in \mathfrak{t}$ tel que : $L = G^{t_1}$. D'où :

$$L^t = G^{t,t_1}$$

Soit $a, b \in \mathbb{Q}^{+*}$ et $t_2 = at + bt_1$. On a clairement : $L^t \subset G^{t_2}$.

Soit $\alpha \in \Pi$. Par définition de L, on sait que :

$$\alpha(t_1) = 0 \Longrightarrow \alpha(t) \geq 0$$

On choisit alors $b \in \mathbb{Q}^{+*}$ tel que :

$$b > -\frac{a\alpha(t)}{\alpha(t_1)}, \forall \alpha \in \Pi \text{ telque } \alpha(t_1) \neq 0$$

Pour un tel choix, on voit facilement que t_2 est G-dominant.

D'autre part, il est clair que, pour tout $\alpha \in \Pi$ tel que $X_\alpha \in \mathfrak{g}^{t_2}$, on a : $\alpha(t) = \alpha(t_1) = 0$, d'après le choix fait pour b.

Il s'en suit que $\mathfrak{g}^{t_2} = \mathfrak{l}^t$.

On sait de plus que le groupe (G^{t_2}) est connexe, puisque l'élément t_2 est semi-simple. De l'égalité entre algèbres de Lie et de l'inclusion : $L^t \subset G^{t_2}$, on en déduit l'égalité :

$$G^{t_2} = L^t$$

Le résultat s'en suit.

3. Quelques conséquences.

Corollaire 1 : *On a :*

1) $T \subset N_G(U_*)$ $T \subset N_G(B_*)$, $T \subset N_G(S)$

2) S *est réductif et* θ*-invariant.*

3) Soit S_0 *la composante neutre de* S, B_0 *celle de* B_*. *Alors,* B_0 *est un sous-groupe de Borel de* S_0 *et* U_* *est son radical unipotent.*

4) $\dim S = \dim B_* + \dim U_*$.

5) $(S \cap T)_0$ *est un tore maximal de* S_0.

Le seul point à prouver est le point 1). Or, d'après le 5) du théorème 2), on a : $T \subset N_G(S)$, puis $T \subset N_G(U_*)$ et $T \subset N_G(B_*)$, d'après le 4) du théorème 2).

Remarque : Dorénavant, un sous-groupe H de G sera dit régulier si $T \subset N_G(H)$.

Corollaire 2 : *On a :*

$$\overline{U.X^{B_*}} = X$$

Preuve : Soit Ω l'ouvert de X, défini par le théorème 2 et soit $y \in \Omega$. Il existe donc $b \in B$ tel que : $B^y = bB_*b^{-1}$. Donc, pour tout $z \in B_*, zb^{-1}.y = b^{-1}.y$, ce qui implique que $b^{-1}.y \in X^{B_*}$. Il s'en suit que :

$$\Omega \subset B.X^{B_*}$$

D'où : $\overline{B.X^{B_*}} = X$.

Mais B_* est régulier, d'après le corollaire 1. Donc, $T.X^{B_*} = X^{B_*}$, ce qui donne le résultat.

Corollaire 3 : *On a :*

$$degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X \times X^*)^G = degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^B + degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^U$$

Preuve : On utilise le théorème de Rosenlicht et on obtient :

$$\begin{aligned} degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X \times X^*)^G &= \dim(X \times X^*) - \max_{z \in X \times X^*} \dim G.z \\ &= 2\dim X - (\dim G - \dim S) \\ degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^B &= \dim X - (\dim B - \dim B_*) \\ degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^U &= \dim X - (\dim U - \dim U_*) \end{aligned}$$

Le résultat s'en suit.

On notera $Ann\chi(X) = \{t \in T / \lambda(t) = 1, \forall \lambda \in \chi(X)\}$.

Théorème 6 : *On a :*

1) $rg_G(X) = rg(G) - rg(S) = \dim \mathfrak{t} - \dim(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{t})$.

2) $degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^U = rg_G(X) + c_G(X)$.

3) $S \cap T = B_* \cap T = Ann\chi(X)$.

Corollaire 4 : *On a :*

$$2c_G(X) + rg_G(X) = 2\dim X - \dim G + \dim S$$

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème 6 et du corollaire 3.

Preuve du théorème 6 : On constate tout d'abord que 1) $\Longleftrightarrow$ 2). En effet, on peut écrire, à l'aide du théorème de Rosenlicht :

$$degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^U = \dim X - \dim U + \dim U_*$$

$$degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^B = \dim X - \dim B + \dim B_*$$

Il vient :

$$degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^U - c_G(X) = rg(G) - rg(S)$$

D'autre part, on vérifie que : 3) $\Longrightarrow$ 1). En effet, supposons l'assertion 3) vérifiée et considérons une base $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ de $\chi(X)$. Alors, il est clair que $Ann\chi(X)$ est le noyau du morphisme $f : T \longrightarrow \mathbb{C}^{*s}$ défini par : $\forall t \in T, f(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_s(t))$. Il s'en suit que : $s = rg(G) - \dim Ann\chi(X)$, ce qui nous donne 1).

On est donc ramenés à démontrer l'assertion 3).

Soit x un p.g.p pour l'action de B dans X et soit $t \in B^x \cap T, \lambda \in \chi(X)$ et $f \in S_\lambda$. Alors, $f \in \mathbb{C}(X)^U$. D'après le corollaire 2, il existe un élément $z \in X^{B^x}$ tel que : $f(z) \neq 0$. Alors, on a :

$$t.f(z) = f(t^{-1}.z) = f(z) = \lambda(t^{-1})f(z)$$

Donc, $\lambda(t) = 1, \forall \lambda \in \chi(X)$, d'où $t \in Ann\chi(X)$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on sait que l'on peut se ramener au cas où X est une variété projective incluse dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N$. Considérons un hyperplan B-invariant $Y \subset \mathbb{P}^N$. alors, $X \backslash X \cap Y$ peut être considérée comme une variété affine B-invariante.

On peut donc se ramener au cas où X est une variété affine B-invariante satisfaisant à la condition : $(B^x \cap T).U^x = B^x$.

Comme X est affine, on a la décomposition :

$$\mathbb{C}[X]^U = \bigoplus_{\lambda \in \chi_+(T)} \mathbb{C}[X]^U_\lambda$$

De plus, on sait que tout $f \in \mathbb{C}(X)^U$ peut s'écrire : $f = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{C}[X]^U$.

Soit $t \in Ann\chi(X)$. D'après les deux propriétés précedentes, on voit que l'on a :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X)^U, \forall x \in X, f(t.x) = f(x)$$

On rappelle maintenant que, selon J.Dixmier et M.Raynaud, une U-orbite $U.x$ dans X est dite "séparée" si, pour tout $y \in X \backslash U.x$, Il existe $f \in \mathbb{C}[X]^U$ tel que : $f(y) \neq f(x)$.

Notons $\Omega(U, X)$ l'intérieur de la réunion des orbites séparées dans X.

le résultat suivant est spécifique du cas d'un groupe unipotent :

L'ensemble $\Omega(U, X)$ est un ouvert dense de X.

On peut donc choisir un point canonique x de X tel que $U.x$ soit séparée. Il s'en suit que, nécéssairement $t.x$ et x sont dans la même U-orbite. donc, il existe $u \in U$ tel que : $ut.x = x$, ce qui implique : $ut \in B^x = (B^x \cap T).U^x$ et donc $t \in B^x \cap T$.

4. **Le cas d'un espace homogène**

4.1. Soit O un G-espace homogène. Suivant le théorème 1, on se donne un point canonique $z = (x, x^*) \in O \times O^*$, on pose : $H = G^x, S = G^z = H \cap \theta(H)$. Soit $t \in \mathfrak{t}$ l'élément G-dominant tel que :

$$(G^t)' \subset S \subset G^t$$

On pose : $L = G^t$. On notera $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{l}$ les algèbres de Lie respectives de S et T.

Soit $\mathfrak{t}_1$ l'orthogonal de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{t}$, vis-à-vis de la forme de Killing. On a, dans ces conditions :

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{s}$$

On peut enfin toujours choisir H parmi les conjugués de G^x pour que l'on ait les propriétés suivantes :

- S et $B \cap H$ ont simultanément la plus petite dimension possible, suivant le choix du Borel B.

- S et $B \cap H$ sont normalisés par T.

- $(B \cap H)^0$ est un sous-groupe de Borel de S^0.

Théorème 7 : *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) H est parabolique.

ii) $r_G(G/H) = 0$.

Preuve : l'implication $i) \Longrightarrow ii)$ est claire.

Supposons que l'on ait ii). D'après le 1) du théorème 6), on voit que $\dim \mathfrak{t} = \dim \mathfrak{s} \cap \mathfrak{t}$ et, donc, $T \subset B \cap S = B \cap H$.

Supposons que $\theta(B) \not\subset H$. Il existe une racine $\alpha \in \Pi$ telle que : $\exp \mathbb{C}X_{-\alpha} \not\subset H$.

Deux cas se présentent :

- $\exp \mathbb{C}X_\alpha \subset H$. Soit s_α la reflexion associée à la racine α. Alors, le groupe $B^\alpha = s_\alpha B s_\alpha^{-1}$ est un autre sous-groupe de Borel de G tel que :

$$\dim B^\alpha \cap H = \dim B \cap H - 1$$

Ceci est en contradiction avec la minimalité de $B \cap H$.

- $\exp \mathbb{C}X_\alpha \not\subset H$. Soit $S(\alpha)$ le sous-groupe isomorphe à $SL_2(\mathbb{C})$ engendré par α et $B(\alpha)$ un sous-groupe de Borel de $S(\alpha)$ tel que : $\dim(B(\alpha) \cap H) = 0$. Considérons maintenant le sous-groupe parabolique "minimal" de G, noté $P(\alpha)$, associé à la racine α et soit $R(\alpha)$ son radical. Alors, $B_1 = B(\alpha).R(\alpha)$ est un sous-groupe de Borel de G et on a :

$$\dim B_1 \cap H = \dim B \cap H - 1$$

Or, ceci est en contradiction avec la minimalité de $B \cap H$.

On montre bien ainsi que $\theta(B) \subset H$, ce qui implique que H est parabolique.

Corollaire 5 : *Si $r_G(G/H) = 0$, alors, $c_G(G/H) = 0$.*

Preuve : Posons : $H = L(H).H^u$. Du corollaire 4), on déduit que :

$$\begin{aligned}
c_G(G/H) &= \dim G/H + \frac{\dim S + rg(S) - \dim G - rg(G)}{2} \\
&= \frac{2\dim G - 2\dim H + \dim L(H) - \dim G}{2} \\
&= \frac{\dim G - \dim L(H) - 2\dim H^u}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.2. Soit $P = SB$. Comme $B \cap S = B \cap H$, on a : $P \cap H = S$.

Lemme 1 : *P est un sous-groupe parabolique de G.*

Preuve : Il s'agit simplement de montrer que P est un sous-groupe. Tout revient en fait à montrer que, pour toute racine positive α telle que $X_\alpha \in \mathfrak{s}$ et pour toute racine positive β telle que $\beta - \alpha$ soit une racine, alors le vecteur-racine $X_{\beta-\alpha}$ est dans $\mathfrak{p}$. Si $\beta - \alpha \geq 0$, ceci est clair. Supposons donc $\beta - \alpha \leq 0$. On a donc : $\beta(t) - \alpha(t) = \beta(t) \leq 0$. Comme t est G-dominant, ceci implique que $\beta(t) = 0$ et donc que $X_\beta \in \mathfrak{s}$, ce qui donne bien le résultat.

Il est clair que L est un facteur de Levi de P.

On se donne une G-orbite adjointe O et on conserve les notations précédentes. On peut écrire : $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{p}^u$. D'autre part, on a : $P.x = B.x$ et, comme x est un p.g.p pour l'action de B dans O, l'orbite $B.x$ est de dimension maximale. Il s'en suit que :

$$\dim P.x = \dim G.x - c_G(O) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} - c_G(O)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{h}+\mathfrak{p}) &= \dim\mathfrak{h} + \dim\mathfrak{p} - \dim\mathfrak{s}\\ &= \dim\mathfrak{h} + \dim\mathfrak{p}^x + \dim P.x - \dim\mathfrak{s}\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}^x$, on en déduit que :

$$\dim(\mathfrak{h}+\mathfrak{p}) = \dim\mathfrak{g} - c_G(O)$$

On suppose maintenant que O est une G-orbite de complexité nulle. On a, donc, pour une telle orbite :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{t}_1 \oplus \ \mathfrak{p}^u)$$

Posons : $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{t}_1 \oplus \ \mathfrak{p}^u$. Alors, il est clair que $\mathfrak{s}_0$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{h}$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un point de O, ce qui démontre que toute G-orbite O de complexité nulle possède la propriété suivante :

" Le centralisateur d'un point de O admet un supplémentaire dans G qui est une algèbre de Lie."