Céline Righi
Le Petit Fief Clairet
86280 Saint-Benoît
e-mail : celine.righi@univ-poitiers.fr
Page web : www-math.sp2mi.univ-poitiers.fr/~righi/

Projet de recherche

Mes thèmes de recherches sont la théorie des algèbres de Lie et leurs représentations. Je m'intéresse également aux super-algèbres de Lie.

Plus précisément, j'étudie les problèmes suivants, liés aux idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie simple :

- indice du quotient d'une sous-algèbre de Borel par un idéal ad-nilpotent,
- caractérisation et énumération des idéaux ad-nilpotents et abéliens,
- objets combinatoires relatifs à ces idéaux, comme par exemple des diagrammes, des chemins de Dyck ou des antichaînes,
- modèle géométrique pour les idéaux ad-nilpotents,
- caractérisation et énumération des idéaux ad-nilpotents et abéliens d'une sous-algèbre de Borel d'une super-algèbre de Lie classique.

Caractérisation des idéaux ad-nilpotents (via le groupe de Weyl affine)

L'étude des idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre de Borel a été motivée par un résultat de D. Peterson. Il a établi que le nombre d'idéaux abéliens d'une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie simple complexe $\mathfrak{g}$ de rang ℓ est 2^ℓ. Une démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [10] et implique le groupe de Weyl affine associé à $\mathfrak{g}$. Dans cet article, B. Kostant indique des connections entre ces idéaux abéliens et les séries discrètes et établit un lien avec ses résultats plus anciens (1965) sur la structure de $\wedge\mathfrak{g}$ en terme des sous-algèbres commutatives de $\mathfrak{g}$.

Le groupe de Weyl affine joue un rôle important dans les différentes caractérisations des idéaux ad-nilpotents établies par P. Cellini et P. Papi dans [3] et [4]. De plus, dans [4], les idéaux ad-nilpotents sont paramétrisés par certains points d'un simplexe canonique. Cette description leur permet de trouver une formule donnant le nombre d'idéaux ad-nilpotents qui dépend seulement du nombre de Coxeter, du cardinal et des exposants du groupe de Weyl. Cette formule compte, dans certains cas, également plusieurs autres objets comme des arrangements d'hyperplans réels ([2]), ou le nombre de variable de clusters qui correspond à un système de racines irréductibles ([6]).

D'un autre côté, lorsque $\mathfrak{g}$ est de type classique, les idéaux ad-nilpotents peuvent être encodés par certains sous-diagrammes d'un diagramme de Young (voir [24] et [3]). D'autres objets combinatoires sont liés aux idéaux ad-nilpotents, comme les chemins de Dyck, les polynômes de Chebyshev, ou les nombres de Catalan ou de Motzkin. Mentionnons également, les travaux de Panyushev, Sommers, et Suter ([15],[25],[26]) parmi d'autres sur ce sujet.

Dans [20], nous généralisons les caractérisations obtenues par P. Cellini et P. Papi sur les idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre de Borel aux sous-algèbres paraboliques.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ le système de racines associé. Nous fixons un système de racines positives Δ^+. Notons $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ l'ensemble des racines simples correspondant. Soit $I \subset \Pi$. Notons $\mathfrak{p}_I$ la sous-algèbre parabolique standard correspondante. Observons que pour $I = \emptyset$, $\mathfrak{p}_\emptyset$ est une sous-algèbre de Borel. Puisque les idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre parabolique sont Borel-stables, nous pouvons coder ces idéaux via certains éléments du groupe de Weyl affine $\widehat{W}$ (voir [3]) appelés Borel-compatibles. Si un élément de $\widehat{W}$ correspond à un idéal ad-nilpotent d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_I$, on dit qu'il est I-compatible. Nous donnons dans [20] une caractérisation complète de ces idéaux. Soit $\widehat{\Pi} = \{\alpha_0\} \cup \Pi$ l'ensemble des racines simples affines. En particulier, un élément $w \in \widehat{W}$ est I-compatible si et seulement si, il est Borel-compatible et satisfait la condition suivante :

$$w^{-1}(I) \subset \widehat{\Pi}.$$

Il existe une autre caractérisation des idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre parabolique en termes de faces de l'alcôve définie par l'élément I-compatible correspondant. Cela nous permet d'obtenir une généralisation du théorème de Peterson. Soit

$$\mathcal{A}b_I = \{w \in \widehat{W} ; w \text{ correspond à un idéal abélien de } \mathfrak{p}_I\}.$$

Posons $n_0 = 1$ et soient n_i, $i = 1, \ldots, \ell$, les entiers strictement positifs tels que la plus grande racine θ soit égal à $\sum_{i=1}^{\ell} n_i \alpha_i$. Pour $J \subset \widehat{\Pi}$, posons $n_J = \prod_{\alpha_j \in J} n_j$. Soit $w \in \widehat{W}$ un élément I-compatible, par les considérations précédentes, nous avons $w^{-1}(I) \subset \widehat{\Pi}$, et donc $n_{w^{-1}(I)}$ a un sens. En considérant le volume des faces de l'alcôve fondamentale, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème [20]**.** *Soit $I \subset \Pi$, on a alors*

$$\frac{1}{n_I} \sum_{w \in \mathcal{A}b_I} n_{w^{-1}(I)} = 2^{\ell - \sharp I}.$$

Puisque en type A et C les entiers n_i, $i = 0, \ldots, \ell$, dépendent seulement de la longueur de α_i, cela nous permet de prouver le théorème suivant :

Théorème [20]**.** *Soit $I \subset \Pi$, si $\mathfrak{g}$ est de type A_ℓ ou C_ℓ, alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_I$ admet exactement $2^{\ell - \sharp I}$ idéaux abéliens.*

Indice du quotient d'une sous-algèbre de Borel par un idéal ad-nilpotent

Considérons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, notons $\mathfrak{g}^f = \{X \in \mathfrak{g} ; f([X, Y]) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}\}$, l'annulateur de f pour la représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$. L'indice de $\mathfrak{g}$, noté $\chi(\mathfrak{g})$, est défini par

$$\chi(\mathfrak{g}) = \min_{f \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}^f.$$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique et que l'on désigne par G son groupe algébrique adjoint, alors $\chi(\mathfrak{g})$ est le degré de transcendance du corps des fonctions rationnelles G-invariantes de $\mathfrak{g}^*$. Par exemple, l'indice d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est égal à son rang. Cela peut être démontré de façon simple en utilisant l'isomorphisme défini entre $\mathfrak{g}$ et son dual $\mathfrak{g}^*$ via la forme de Killing.

Récemment, l'indice du quotient d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ par un idéal ad-nilpotent a été considéré dans les travaux de P. Damianou, H. Sabourin et P. Vanhaecke sur des problèmes liés aux réseaux de Toda et aux systèmes intégrables. Plus précisément, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe. Notons $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ associé à une racine α. Soit $\Phi \subset \Delta^+$ tel que $\Pi \subset \Phi$. Alors, nous pouvons montrer que Φ correspond à un système Hamiltonien si et seulement si $\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ est un idéal ad-nilpotent de $\mathfrak{b}$. Le problème est maintenant de savoir si ce système est intégrable ou non.

Pour tout idéal ad-nilpotent $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b}/\mathfrak{i})^*$ est une sous-variété de Poisson de $\mathfrak{b}^*$. Son rang de Poisson L est égal à la dimension de $\mathfrak{b}/\mathfrak{i}$ moins l'indice de $\mathfrak{b}/\mathfrak{i}$. Puisque le nombre d'équations nécessaires pour que le système Hamiltonien précédent soit intégrable est $\dim((\mathfrak{b}/\mathfrak{i})^*) - L/2$, le calcul de l'indice de $\mathfrak{b}/\mathfrak{i}$ intervient dans la résolution de ce problème.

Je travaille actuellement avec R.Yu sur la détermination de l'indice du quotient d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ par un idéal ad-nilpotent $\mathfrak{i}$. Inspirés par les résultats de A.Panov [13] et de P.Tauvel et R.Yu [27], nous avons obtenu dans [23] une borne supérieure pour l'indice de $\mathfrak{b}/\mathfrak{i}$ qui est exacte dans certains cas, en particulier en type A. Nous conjecturons qu'elle est aussi exacte dans les autres types. Nous voulons également utiliser les résultats de Panov pour trouver explicitement des générateurs de $\mathbb{C}(\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}}$.

Caractérisation des idéaux ad-nilpotents (via le groupe de Weyl)

Nous avons vu que le groupe de Weyl affine joue un rôle important dans les différentes caractérisations des idéaux ad-nilpotents établies dans [3], [4], [15] ou [20] par exemple. Se pose alors le problème de savoir si on ne pourrait pas obtenir une caractérisation de ces idéaux via le groupe de Weyl.

Pour obtenir les résultats de [23], nous avons construit à partir d'un idéal ad-nilpotent $\mathfrak{i}$ d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$, des séquences de racines positives appelées des "H-séquences". Soit $\mathbf{h} = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$ une telle H-séquence. Considérons l'élément $w_{\mathbf{h}} = s_{\theta_1} \ldots s_{\theta_s}$ du groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$, où s_{θ_i} est la réflexion de W relativement à θ_i, $i = 1, \ldots, s$. Dans [14], Panov fixe en type A un ordre total sur les racines et définie une H-séquence particulière $\mathbf{p}$ qui dépend de cet ordre. En utilisant la bijection entre le groupe de Weyl en type A et le groupe symétrique, il prouve que la longueur de $w_{\mathbf{p}}$ est exactement la dimension du quotient du radical nilpotent de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{i}$. Pour généraliser la définition de la H-séquence $\mathbf{p}$, je fixe dans [18] un ordre total sur les racines lorsque $\mathfrak{g}$ est de type D ou E. Sans utiliser le groupe symétrique, je démontre alors que qu'en type A, D et E, la longueur de $w_{\mathbf{p}}$ est aussi la dimension du quotient du radical nilpotent de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{i}$.

En type A, D et E, les H-séquences du genre $\mathbf{p}$ donnent ainsi une caractérisation des idéaux ad-nilpotents de $\mathfrak{b}$ via le groupe de Weyl, et non plus via le groupe de Weyl affine de $\mathfrak{g}$. Je voudrais démonter la conjecture suivante :

Conjecture : Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type A, D ou E et $\mathbf{h}$ une H-séquence quelconque associée à $\mathfrak{i}$. La longueur de $w_{\mathbf{h}}$ est la dimension du quotient du radical nilpotent de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{i}$.

J'aimerais également étendre ces résultats aux autres types.

Caractérisation des idéaux ad-nilpotents d'une super-algèbre de Lie classique

Dans un travail commun avec Pierluigi Möseneder Frajria et Paolo Papi, nous cherchons à encoder et énumérer les idéaux ad-nilpotents et abéliens d'une sous-algèbre de Borel d'une super algèbre de Lie classique i.e. d'une super-algèbre de Lie de dimension finie $G = G_0 \oplus G_1$ telle que G_0 soit réductive. Dans ce cas, la théorie des systèmes de racines est bien définie et il est donc naturel de se demander si les caractérisations obtenues dans le cas d'une algèbre de Lie simple peuvent se généraliser. Le premier résultat de notre analyse établit une interaction avec le cas d'une sous-algèbre parabolique :

Théorème [16]**.** *Pour toutes paires (G, B), où G est une super-algèbre de Lie basique et B une sous-algèbre de Borel de G, il existe une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ et une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ elles que les idéaux ad-nilpotents (resp. abéliens) de B soient énumérés par les idéaux idéaux ad-nilpotents (resp. abéliens) de $\mathfrak{p}$.*

Notons $\mathfrak{l}$ un facteur de Lévi de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{n}$ son radical nilpotent. La démonstration du théorème se fait en établissant pour chaque type une bijection entre les racines de G et les plus bas poids de la décomposition de $\mathfrak{n}$ en sous-module irréductible de plus bas poids. Nous voudrions maintenant, entre autre, uniformiser cette démonstration et essayer de comprendre le cas d'une super-algèbre de Lie classique étrange.

Objets combinatoires liés aux idéaux ad-nilpotents

Diagrammes de Young

Pour déterminer le nombre d'idéaux abéliens lorsque $\mathfrak{g}$ est de type B ou D, et le nombre d'idéaux ad-nilpotents dans les cas classiques, nous adaptons la correspondance au cas par cas par des diagrammes de [24] (également reformulé dans [3]). L'idée est de disposer l'ensemble des racines positives dans un diagramme de forme adéquate. La forme et le remplissage du diagramme dans chaque type sont choisis de telle sorte que nous obtenons une bijection entre les idéaux ad-nilpotents et les sous-diagrammes "nord-ouest". Dans les cas où $\mathfrak{g}$ est de type exceptionnel, l'énumération est obtenue en utilisant le logiciel GAP (voir [21], [22]). Une partie de ma recherche actuelle est de trouver une formule uniforme, comme il en existe pour le cas Borel.

Soit $\mathfrak{i}$ un idéal ad-nilpotent d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_I$. Soit

$$\mathfrak{i}^1 = \mathfrak{i} \text{ et } \mathfrak{i}^{k+1} = [\mathfrak{i}^k, \mathfrak{i}],$$

pour $k \geqslant 0$, la série centrale descendante. Rappelons que l'indice de nilpotence de $\mathfrak{i}$ est le plus petit entier k tel que $\mathfrak{i}^{k+1} = \{0\}$ (*i.e.* le nombre de termes non nuls dans la série centrale descendante). Dans [19, 21], nous donnons le nombre d'idéaux ad-nilpotents ayant un indice de nilpotence fixé lorsque $\mathfrak{g}$ est de type A ou C. L'idée est de construire une application entre des systèmes de racines de rang différent et d'utiliser les outils de [1].

Chemins de Dyck

Un chemin de Dyck de longueur $2n$ peut être défini comme un mot de $2n$ lettres u ou d, ayant le même nombre de u et de d, et tel qu'il y ait toujours plus de u que de d à gauche d'une lettre. Lorsque $\mathfrak{g}$ est de type A, il existe une bijection naturelle entre les idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre de Borel et les chemins de Dyck de longueur $2\ell + 2$.

Un invariant intéressant d'un idéal ad-nilpotent $\mathfrak{i}$ de la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{p}_\emptyset$ est l'élément maximal $I_\mathfrak{i}$ de l'ensemble $\{I \subset \Pi; \mathfrak{i}$ est un idéal ad-nilpotent de $\mathfrak{p}_I\}$. En type A_l, j'ai établi une bijection entre les idéaux ad-nilpotents $\mathfrak{i}$ tels que $\sharp I_\mathfrak{i} = r$ et les chemins de Dyck ayant de longueur $2l+2$ ayant r udu. Ces résultats combinatoires sont publiés dans [19].

En observant des calculs effectués avec le logiciel GAP dans les autres types classiques, il semblerait que le nombre d'idéaux ad-nilpotents $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{p}_\emptyset$ tels que $\sharp I_\mathfrak{i} = r$ soit le même en type B et C. Cela pourrait vouloir dire que ce nombre dépend seulement des exposants du groupe de Weyl associé à $\mathfrak{g}$. J'étudie cette question actuellement.

Antichaînes

Rappelons la définition de l'ordre partiel suivant, sur l'ensemble des racines positives Δ^+ : $\alpha \leqslant \beta$ si $\beta - \alpha$ est une somme de racines positives. Une antichaîne est un sous-ensemble de Δ^+ contenant des racines qui sont deux à deux non-comparables pour $\leqslant$.

Il existe une bijection entre les idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre de Borel et les antichaînes (voir [15],[25], [4]). Panyushev a établi dans [15] une dualité entre les antichaînes de cardinal p et celles de cardinal $\ell - p$, en types A_ℓ et C_ℓ. En considérant la bijection naturelle entre les idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre de Borel et les chemins de Dyck de longueur $2\ell+2$ en type A donnée dans [15] et la bijection de [1], nous établissons dans [19] une autre dualité. Une partie de mon travail actuel est de comprendre plus profondément le sens de ces dualités.

Pour toute antichaîne Γ, soit $\mathcal{I}(\Gamma)$ l'ensemble des racines positives qui sont plus grandes qu'un élément de Γ. Dans [17], Panyushev définit une application $\mathfrak{X}$ entre l'ensemble des antichaînes de Δ^+ : pour une antichaîne Γ, $\mathfrak{X}(\Gamma)$ est l'ensemble des éléments maximaux pour $\leqslant$ de $\Delta^+ \setminus \mathcal{I}(\Gamma)$. Il a montré que $\mathfrak{X}$ conserve sa dualité et établi plusieurs conjectures sur $\mathfrak{X}$ et sur les $\mathfrak{X}$-orbites. Puisque la définition de $\mathfrak{X}$ est assez naturelle, nous pouvons espérer que les propriétés de $\mathfrak{X}$ soient proches de celles de Δ^+. J'étudie actuellement ces conjectures en utilisant les outils développés dans l'étude des idéaux ad-nilpotents ainsi que d'autres outils plus combinatoires comme les chemins de Dyck.

$\mathfrak{u}$-cohomologie

Les résultats de Kostant dans [8], [9], [11], [10] montrent le rôle clef joué par les idéaux abéliens d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ dans les relations entre l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}$ et l'action de l'opérateur de Casimir sur elle. Dans [5], Frajria et Papi donnent une approche uniforme des résultats de Kostant. Ils utilisent les liens soulignés dans [10] entre les résultats sur la $\mathfrak{u}$-cohomologie et la généralisation au cas affine dû à Garland-Lepowsky dans [7], pour expliquer le rôle joué par les algèbres de Lie affines et leur cohomologie. Ils caractérisent complètement les espaces $\mathfrak{u}$-cohomologiques qui correspondent à des idéaux abéliens de $\mathfrak{b}$.

Une partie de mon projet de recherche est d'étudier, en utilisant les outils de [5] et les résultats de ma thèse, comment caractériser les espaces $\mathfrak{u}$-cohomologiques qui correspondent à des idéaux ad-nilpotents d'une sous-algèbre de Borel ou parabolique.

Références

[1] G. E. Andrews, C. Krattenthaler, L. Orsina and P. Papi. *Ad-nilpotent $\mathfrak{b}$-ideals in $sl(n)$ having a fixed class of nilpotence : combinatorics and enumeration.* Trans. Amer. Math. Soc. 354, 3835-3853.

[2] C.A. Athanasiadis. *On noncrossing and nonnesting partitions for classical reflection groups.* Electronic J. of Comb. 5 (1998) $\sharp$R42

[3] P. Cellini, P. Papi. *Ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra.* J. Algebra 225 (2000), 130-140.

[4] P. Cellini, P. Papi. *Ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra II.* J. Algebra 258 (2002), 112-121.

[5] P. Möseneder Frajria, P. Papi. *Casimir operators, abelian subspaces and $\mathfrak{u}$-cohomology.* ArXiv :0705.2096v2.

[6] S. Fomin, A. Zelevinsky. *Y-systems and generalized associahedra.* Ann. of Math. 158 (2003), 977-1018.

[7] H. Garland, J. Lepowsky. *Lie algebra homology and Macdonald-Kac Formulas.* Invent. Math. 34 (1976), no. 7, 37-76.

[8] B. Kostant. *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil Theorem* Ann. Math. 74 (1961), 329-387.

[9] B. Kostant. *Eignevalues of the Laplacian and commataive Lie subalgebras* Topology 3 (1965), 147-159.

[10] B. Kostant. *The set of Abelian ideals of a Borel subalgebra, Cartan decompositions, and discrete series representations.* Int. Math. Res. Not. 5 (1998), 225-252.

[11] B. Kostant. *On $\wedge\mathfrak{g}$ for a semisimple algebra $\mathfrak{g}$, as an equivariant module over symmetric algebra $S(\mathfrak{g})$*, Analisys on homogeneous spaces and representation theory of Lie groups, Okyama-Kyoto (1997), Adv. Stud. Pure Math. 26, Math. Soc. Japan, Tokyo (2000), 129-144.

[12] B. Kostant. *Powers of the Euler product and commutative subalgebras of a complex simple Lie algebra.* Invent. Math. 158 (2004), 181-226.

[13] A.N. Panov. *On the index of certain nilpotent Lie algebras.* J. of Math. Sci. 161 (2009) 122-129.

[14] A.N. Panov. *Diagram method in research on coadjoint orbits.* arXiv :0902.4584.

[15] D.I. Panyushev. *Ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra : generators and duality.* J. Algebra 274 (2004), 822-846.

[16] Pierluigi Möseneder Frajria, Paolo Papi, Céline Righi. *Ad-nilpotent ideals of a Borel subalgebra of a Lie superalgebra*, en préparation.

[17] D.I. Panyushev. *On orbits of antichains of positive roots.* arXiv :0711.3353v1

[18] C. Righi. *On H-sequences*, en préparation.

[19] C. Righi. *Number of "udu" of a Dyck path and ad-nilpotent ideals of parabolics subalgebra of $sl_{l+1}(\mathbb{C})$.* Séminaire Lotharingien de Combinatoire 59 (2008), article B59c.

[20] C. Righi. *Ad-nilptent ideals of a parabolic subalgebra.* J. Algebra 319 (2008) 1555-2584.

[21] C. Righi. *Characterization and enumeration of ad-nilpotent ideals of a parabolic subalgebra of a simple Lie algebra.* PhD thesis. (2007)

[22] C. Righi. *Enumeration of ad-nilpotent ideals of parabolic subalgebras for exceptional types*, available on arXiv math.RT/0804.2404v1 (2008).

[23] C. Righi, R.W.T Yu. *On the index of the quotient of a Borel subalgebra by an ad-nilpotent ideal.* Journal of Lie Theory 20 (2010), 49-63.

[24] J.Y. Shi. *The number of $\oplus$-sign types.* Quart. J. Math. Oxford 48 (1997), 93-105.

[25] E. Sommers. *B-Stable Ideals in the Nilradical of a Borel Subalgebra.* Canadian Mathematical Bulletin 48 (2005), 460-472.

[26] R. Suter. *Abelian ideals in a Borel subalgebra of a complex simple Lie algebra.* Invent. Math. 156 (2004), 175-221.

[27] P. Tauvel, R.W.T.Yu. *Sur l'indice de certaines algèbres de Lie.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004), no. 6, 1793-1810 (2005).