Quelques généralités sur les équations de structure et les martingales d'Azéma

Anthony Phan

Niort, 20 novembre 2003

Motivations

- théorie des processus et des martingales ;
- calcul stochastique non commutatif (quantique) ;
- applications physiques, mathématiques financières, etc. ?

1. **Généralités**

- espaces probabilisés filtrés ;
- martingales ;
- martingales normales ;
- intégration par rapport à une martingale.

2. **Propriétés de représentation des martingales**

- propriété de représentation prévisible (PRP) : une martingale possède la PRP dans un espace probabilisé filtré si toute martingale M s'écrit sous la forme :

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_t^M \, \mathsf{d}X_t$$

  où H^M est un processus prévisible ;

- propriété de représentation chaotique (PRC) : une martingale possède la PRC dans un espace probabilisé filtré si toute martingale M de carré intégrable s'écrit sous la forme :

$$M_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0<t_1<\cdots<t_n\leq t} f_n^M(t_1, \ldots, t_n) \, \mathsf{d}X_{t_1} \ldots \mathsf{d}X_{t_n}$$

  où les f_n^M sont des fonctions déterministes de carré intégrable.

3. Équations de structure

Équation de structure de paramètre un processus $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ prévisible : X martingale normale telle que

$$\mathrm{d}[X, X]_t = \mathrm{d}t + \Phi_t \, \mathrm{d}X_t, \qquad t > 0.$$

Équation de structure markovienne de fonction paramètre $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne : X martingale normale telle que

$$\mathrm{d}[X, X]_t = \mathrm{d}t + \phi(X_{t-}) \, \mathrm{d}X_t, \qquad t > 0.$$

Problèmes :

- condition nécessaire et suffisante d'existence ;
- condition nécessaire et suffisante d'unicité ;
- caractérisation des solutions ayant la PRC ;

4. **Martingales d'Azéma**

Équation de structure des martingales d'Azéma de paramètre $q \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + (q-1)X_{t-}\,\mathrm{d}X_t, \qquad t > 0$$

Formule de Itô des martingales d'Azéma de paramètre $q \in \mathbb{R}$: $f \in C^2(\mathbb{R})$,

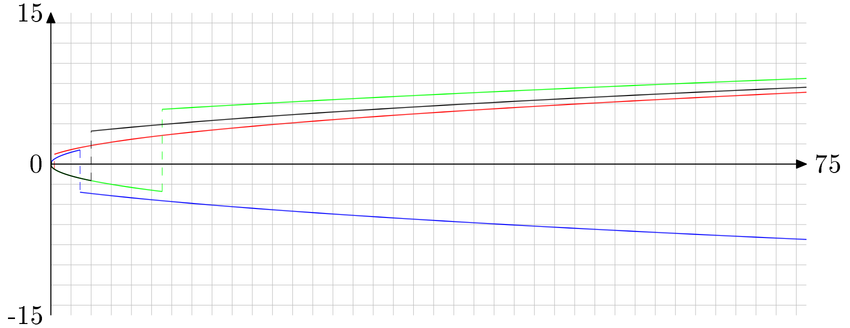
$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t D^q f(X_{s-})\,\mathrm{d}X s + \int_0^t A^q f(X_{s-})\,\mathrm{d}s$$

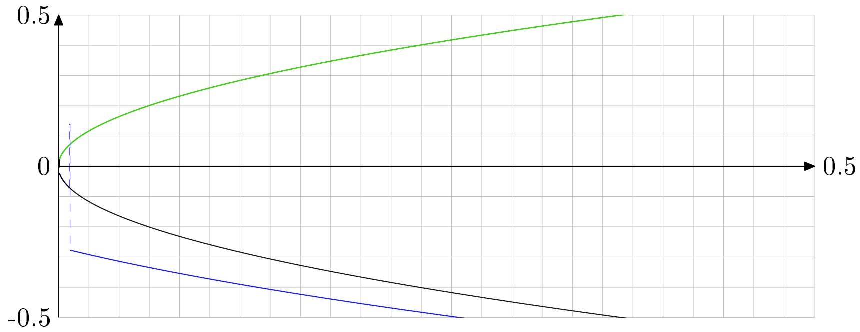
Moments d'une martingale d'Azéma de paramètre $q \in \mathbb{R}$ issue de $x \in \mathbb{R}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

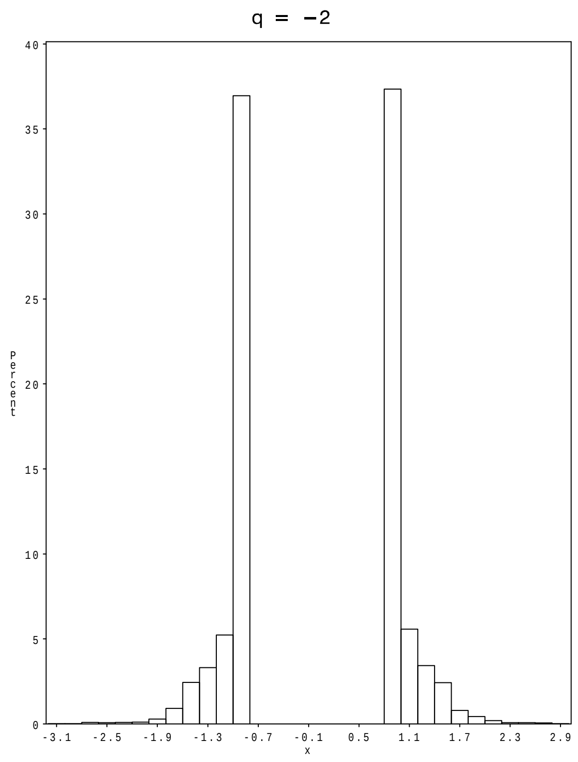
$$\mathbb{E}_q^x[(X_t)^{2n}] = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{q^{2i} - 1 - 2i(q-1)}{(q-1)^2} \right) \frac{t^{n-k} x^{2k}}{(n-k)!},$$

$$\mathbb{E}_q^x[(X_t)^{2n+1}] = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{q^{2i+1} - 1 - (2i+1)(q-1)}{(q-1)^2} \right) \frac{t^{n-k} x^{2k+1}}{(n-k)!}.$$

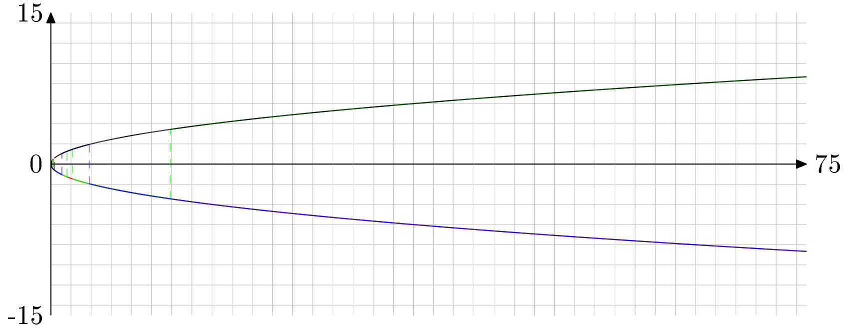
4.1. *Martingales d'Azéma de paramètre* $q = -2$

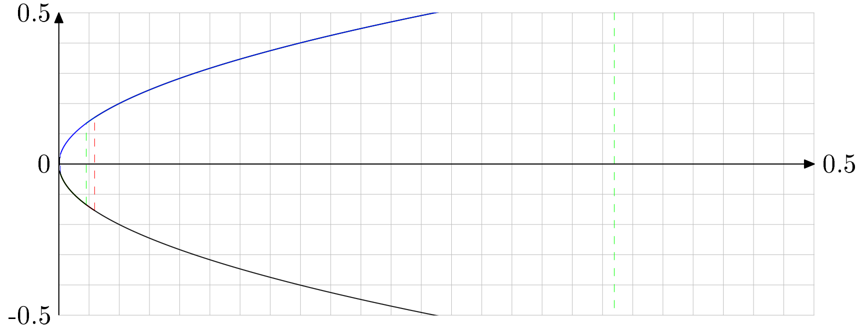


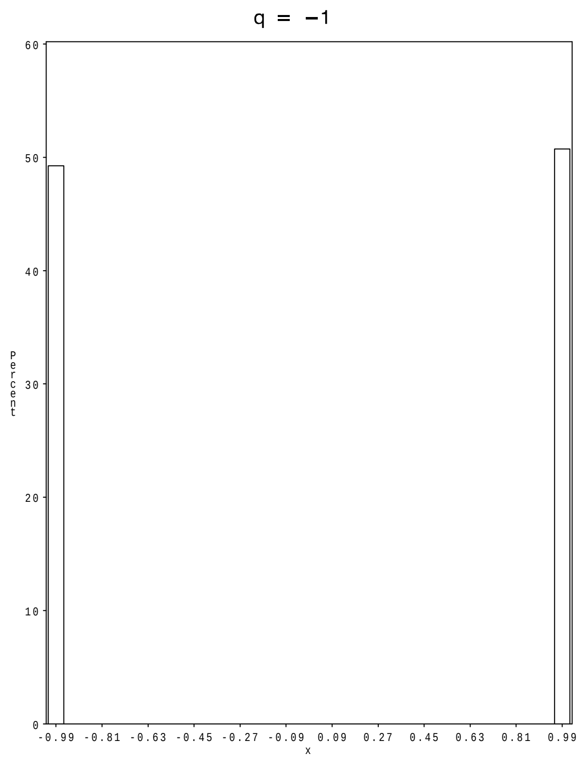




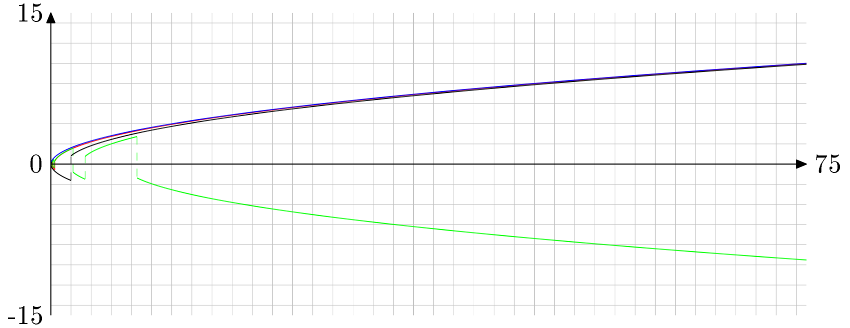
4.2. *Martingales d'Azéma de paramètre $q = -1$ (martingale parabolique)*

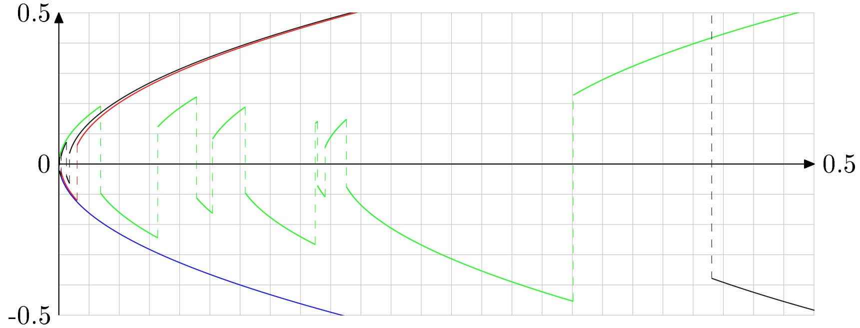


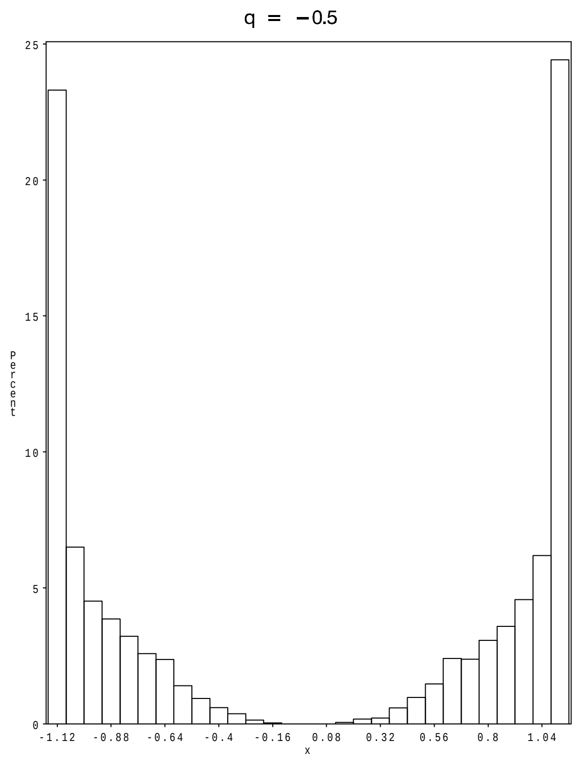




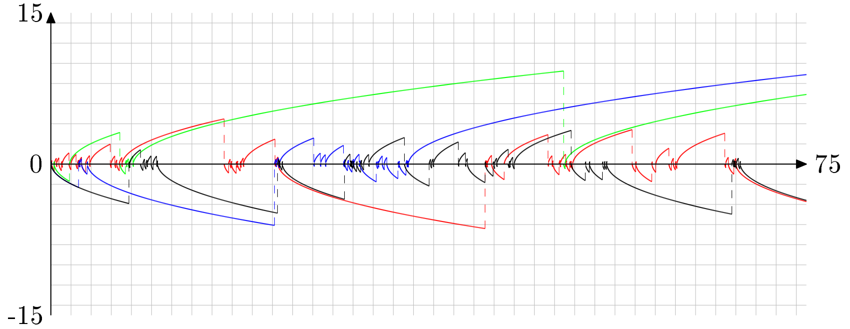
4.3. *Martingales d'Azéma de paramètre* $q = -0{,}5$

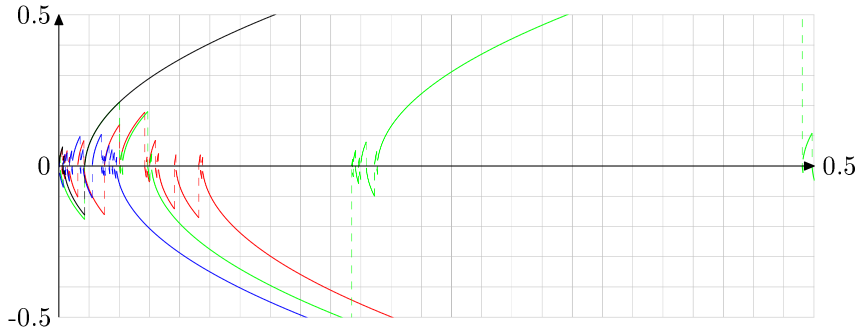


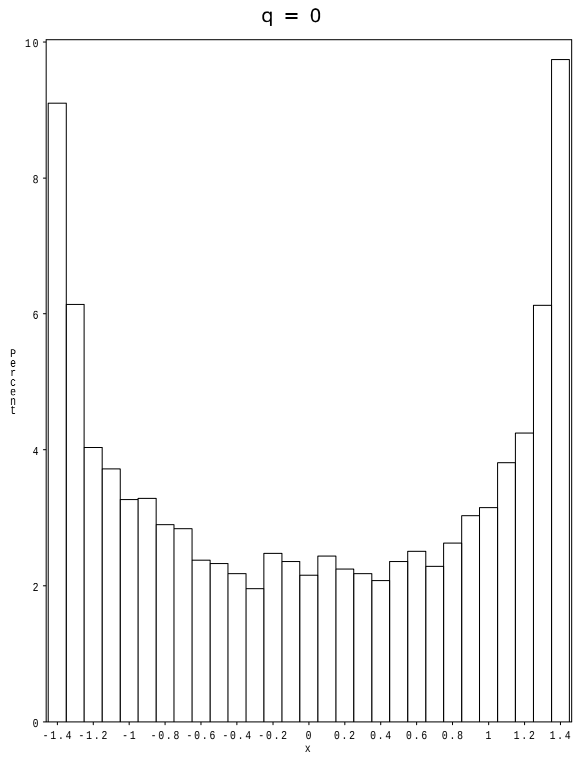




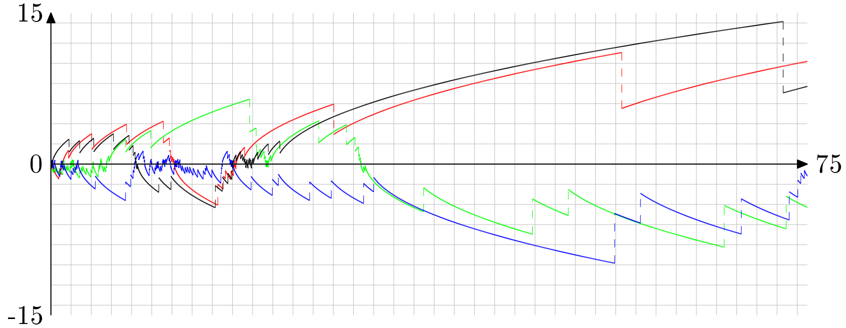
4.4. *Martingales d'Azéma de paramètre $q = 0$ (la martingale d'Azéma)*

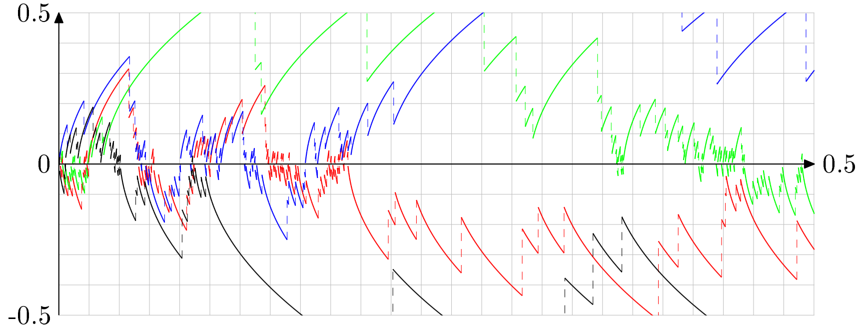


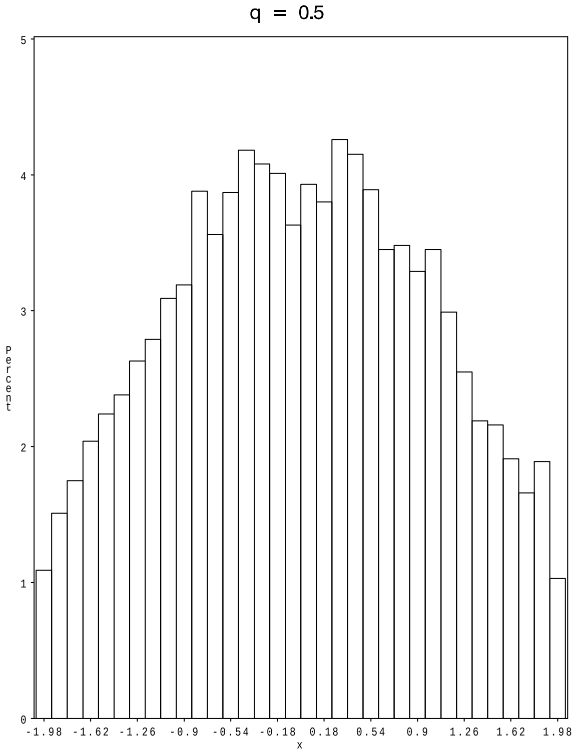




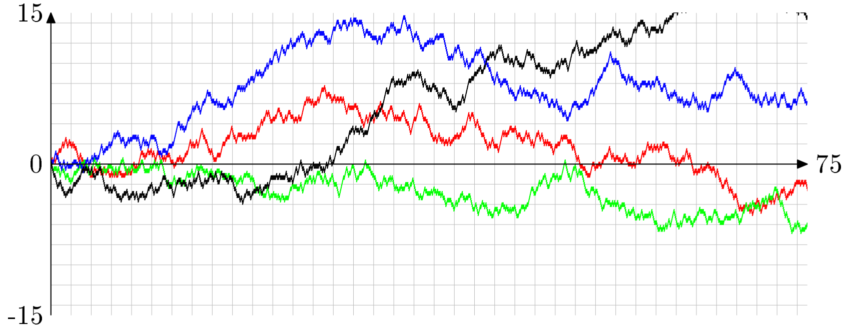
4.5. *Martingales d'Azéma de paramètre* $q = 0{,}5$

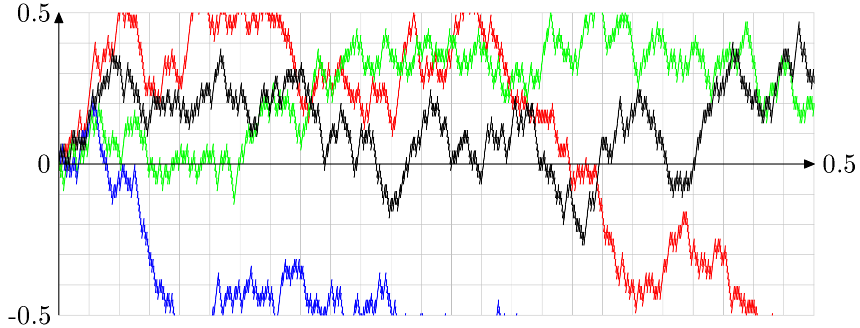


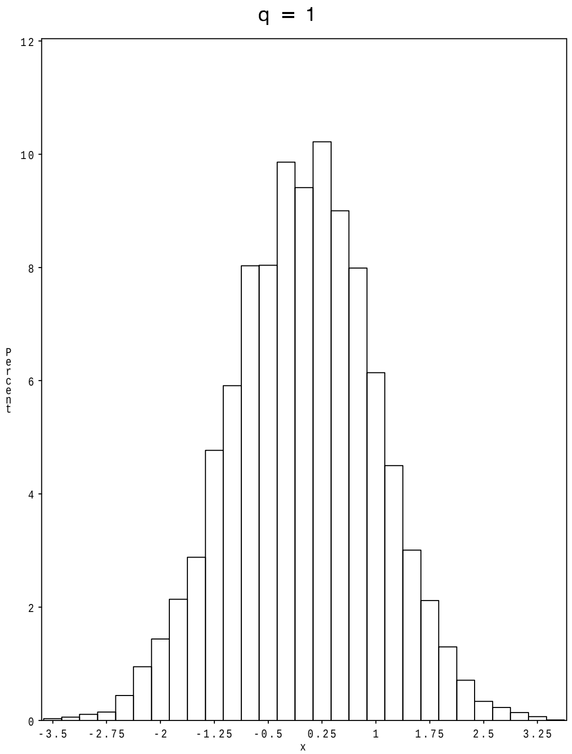




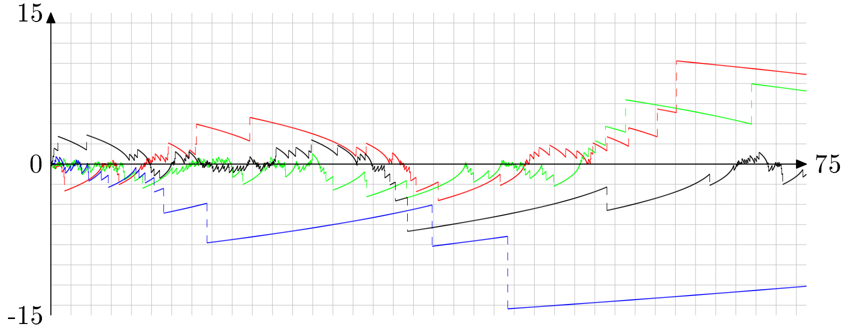
4.6. *Martingales d'Azéma de paramètre* $q = 1$ *(processus de Wiener)*

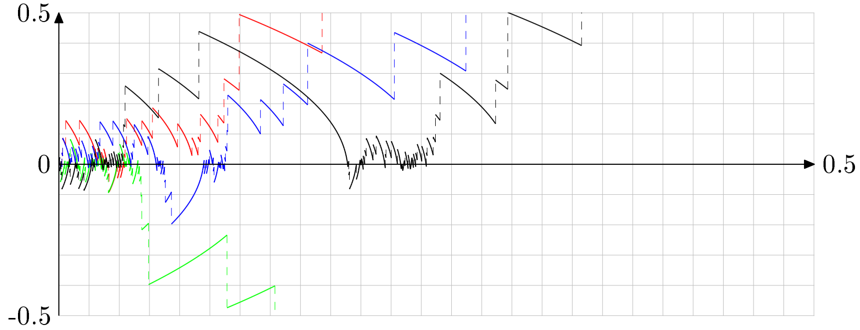


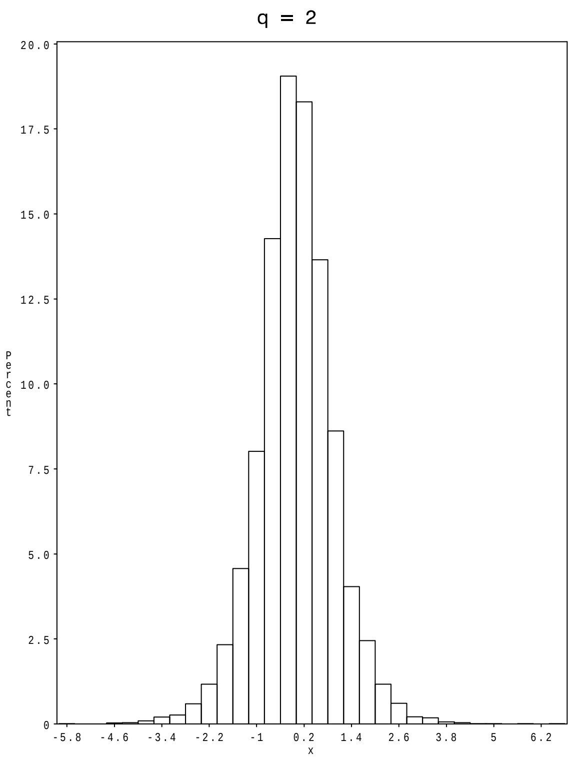




4.7. *Martingales d'Azéma de paramètre* $q = 2$







Principaux résultats connus :

- existence pour toute valeur de $q \in \mathbb{R}$ et toute condition initiale ;
- unicité pour toute valeur de $q \in \mathbb{R}$ et toute condition initiale ;
- fellériennité pour toute valeur de $q \in \mathbb{R}$;
- dualité des semi-groupes de paramètres q et $1/q$ (à un changement de temps linéaire près) pour tout $q > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- PRC pour tout $q \in [-1, 1]$.

Problèmes :

- problème des moments pour $q \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$;
- PRC pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$;
- absolue continuité de $(X_1)_* \mathbb{P}_q^0$ pour $q \neq -1$ (vrai pour $q \in]-1, 1]$) ;
- interprétation et applications ?