SUR LES MARTINGALES D'AZÉMA

Anthony Phan, Luminy, 8 septembre 2004

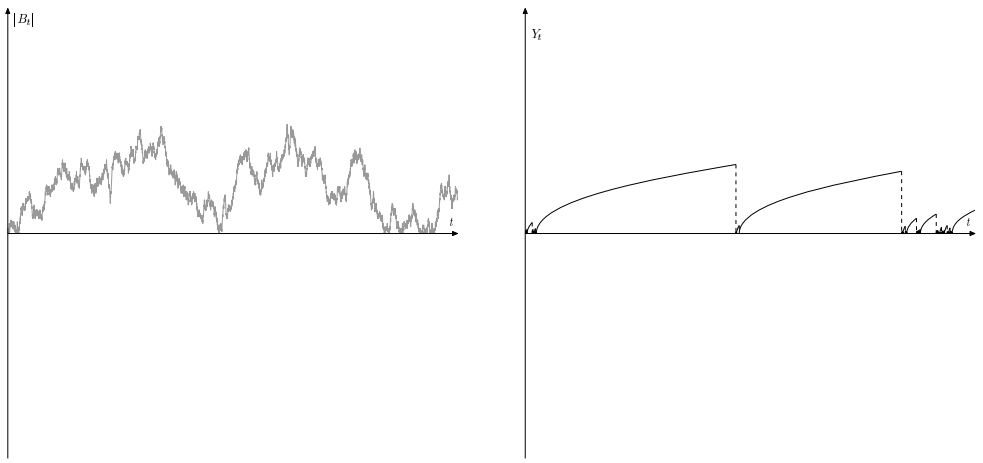
Dans son étude sur les fermés aléatoires, Jacques Azéma donne l'exemple de la projection M du mouvement brownien B sur la filtration de son signe, projection qu'il calcule explicitement :

$$M_t = \operatorname{sgn}(B_t)\,\sqrt{\pi/2}\,\sqrt{t-g_t},$$

où $g_t = \sup\{s \leqslant t : B_s = 0\}$. En posant $X_t = 2/\sqrt{\pi}\,M_t = \operatorname{sgn}(B_t)\,\sqrt{2}\,\sqrt{t-g_t}$, on obtient une martingale normale X vérifiant $\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t - X_{t-}\,\mathrm{d}X_t$ et possédant la propriété de représentation chaotique. Michel Émery a introduit une famille de martingales satisfaisant une équation de structure $\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + (q-1)X_{t-}\,\mathrm{d}X_t$ qui sont les martingales d'Azéma de paramètre q — la martingale d'Azéma originale correspondant au paramètre 0. Nous rappelons dans cet exposé les résultats obtenus par Émery ainsi que quelques autres (temps local, retournement du temps, ...) illustrés par des sorties de simulations numériques.

1. Une martingale remarquable

Dans son étude sur les fermés aléatoires [1], Jacques Azéma donne l'exemple des zéros du mouvement brownien linéaire. Dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$, soient $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien linéaire issu de 0 et $H = \{t \geqslant 0 : B_t = 0\}$. Au fermé aléatoire H on peut associer sa filtration naturelle $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geqslant 0}$[1] qui est une sous-filtration de $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ et calculer des projections optionnelles[2] : il calcule par exemple sur $\mathcal{H}$ celle de $|B| = (|B_t|)_{t\geqslant 0}$



1. Ici les filtrations sont celles qu'a défini Azéma dans [1] et non Azéma–Yor dans [2]. En particulier, $\mathcal{H}_t \subsetneq \sigma\{K_{g_t} : K \text{ processus } \mathcal{F}^B\text{-prévisible}\}$.

2. La projection optionnelle sur $\mathcal{H}$ d'un processus X mesurable, convenablement intégrable, est l'unique processus $\mathcal{H}$-optionnel Y tel que pour tout $\mathcal{H}$-temps d'arrêt borné T, $Y_T = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{H}_T]$.

et obtient

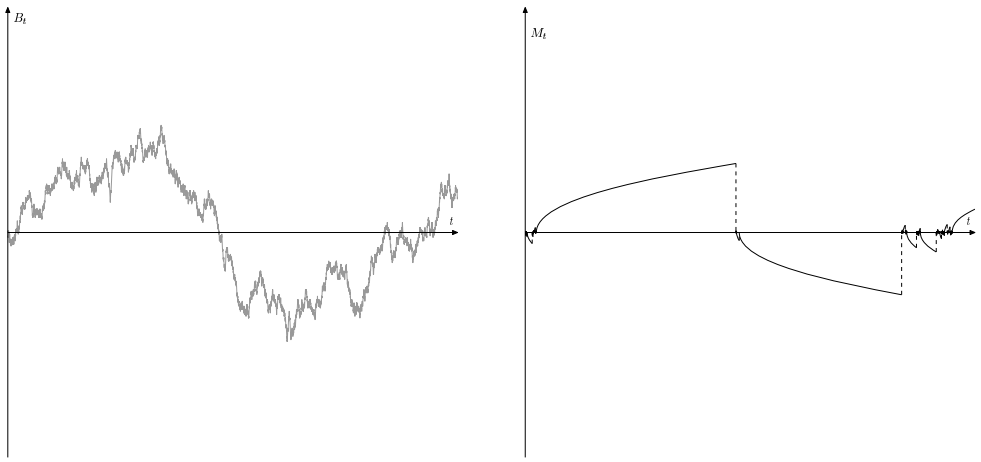
$$(|B_t|)_{t\geqslant 0} \overset{\text{projection optionnelle}}{\underset{\text{sur } \mathcal{H}}{\longrightarrow}} \left(Y_t = \sqrt{\pi/2}\sqrt{t-g_t}\right)_{t\geqslant 0}$$

où $g_t = \sup\{s \leqslant t : B_s = 0\}$, qui est une sous-martingale.

Il remarque qu'il n'existe pas de $\mathcal{H}$-martingale non triviale s'annulant sur H. Pour en obtenir, il grossit la filtration par le signe des excursions pour obtenir $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$. Il montre alors que

$$(B_t)_{t\geqslant 0} \overset{\text{projection optionnelle}}{\underset{\text{sur } \mathcal{G}}{\longrightarrow}} \left(M_t = \operatorname{sgn}(B_t)\sqrt{\pi/2}\sqrt{t-g_t}\right)_{t\geqslant 0}$$

qui est une $\mathcal{G}$-martingale s'annulant sur H.



Posons $X_t = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} M_t = \operatorname{sgn}(B_t)\sqrt{2}\sqrt{t-g_t}$. C'est une $\mathcal{G}$-martingale issue de 0 et on a

$$X_t^2 = 2\int_0^t X_{s-}\,\mathrm{d}X_s + [X,X]_t \qquad (*)$$

où $[X,X]$ est la variation quadratique (crochet droit) de X.

On peut voir que X est une martingale totalement discontinue (ce qui est lié au fait que le temps passé en 0 est nul). Alors on a

$$[X,X]_t = \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s^2 = \sum_{\substack{s\leqslant t,\\ \Delta X_s \neq 0}} 2(s-g_s) = 2g_t = 2t - 2(t-g_t) = 2t - X_t^2,$$

car c'est égal à deux fois la longueur couverte par toutes les arches achevées. Ainsi

$$X_t^2 = 2t - [X,X]_t,$$

et en reportant dans $(*)$:

$$2t - [X,X]_t = 2\int_0^t X_{s-}\,\mathrm{d}X_s + [X,X]_t,$$

soit

$$[X,X]_t = t - \int_0^t X_{s-}\,\mathrm{d}X_s, \qquad \text{ou encore} \qquad \mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t - X_{t-}\,\mathrm{d}X_t. \qquad (**)$$

On peut constater alors que la martingale X est normale ($[X,X]_t - t$, ou encore $X_t^2 - t$, définit une martingale), ce qui est le pourquoi de la normalisation de M

en X. On peut trouver dans [2] nombre de ses propriétés remarquables (dont sa propriété de représentation chaotique).

2. **Des martingales remarquables**

La relation $(**)$ a des analogues simples : X martingale telle que

$$\begin{cases} \mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t & X \text{ est un mouvement brownien linéaire (Paul Lévy). En effet on voit que } X \text{ est une martingale normale continue...} \\ \mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + c\,\mathrm{d}X_t & X \text{ est un processus de Poisson compensé, normalisé d'intensité } 1/c^2 \ (c \neq 0). \end{cases}$$

Dans [3], Émery introduit de nouvelles équations :

$$X \text{ martingale}, \qquad \mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + \Phi_t\,\mathrm{d}X_t \qquad \text{[équation de structure]}$$

avec Φ un processus prévisible.

Si une telle martingale existe, alors elle est normale et satisfait sommairement et localement :

— $\Phi_t = 0$: X_t « brownien » ;

— $\Phi_t \neq 0$: X_t « totalement discontinue » de sauts $\Delta X_t \in \{0, \Phi_t\}$ avec intensité $1/\Phi_t^2$ et de dérive vérifiant $0 = \mathrm{d}t + \Phi_t\,\mathrm{d}x$.

Les principales difficultés viennent des transitions entre ces deux cas.

Émery montre la formule du changement de variables : pour toute application $f \in C^2(\mathbb{R})$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_s^\Phi f(X_{s-}\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t A_s^\Phi f(X_{s-})\,\mathrm{d}s$$

avec

$$L_s^\Phi f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+\Phi_s) - f(x)}{\Phi_s} & \text{si } \Phi_s \neq 0, \\ f'(x) & \text{si } \Phi_s = 0, \end{cases}$$

et

$$A_s^\Phi f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+\Phi_s) - f(x) - \Phi_s f'(x)}{\Phi_s^2} & \text{si } \Phi_s \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}\, f''(x) & \text{si } \Phi_s = 0, \end{cases}$$

et on peut montrer que, lorsque Φ est localement borné, l'équation de structure équivaut au problème de martingales associé à A^Φ sur un ensemble de fonctions régulières ($C_c^\infty(\mathbb{R})$ par exemple).

Dans [8], Meyer montre que pour $\Phi = \phi(X_-)$ avec $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, il existe des solutions pour toute condition initiale.

Dans [3, 4], Émery montre l'unicité en loi de telles solutions si ϕ est une fonction affine en s'intéressant plus particulièrement à

$$X \text{ martingale}, \qquad \mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + (q-1)X_{t-}\,\mathrm{d}X_t$$

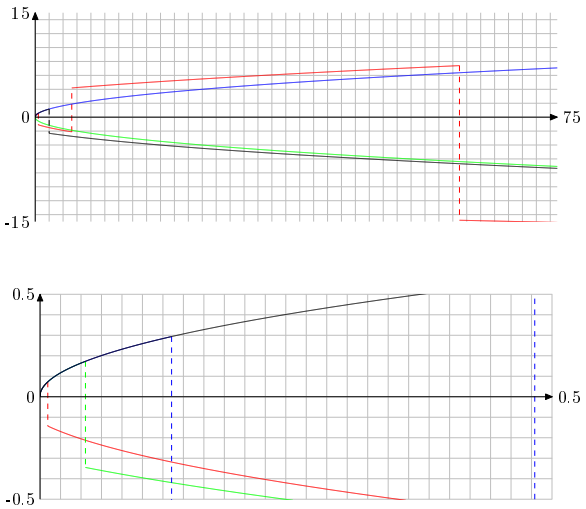
dont les solutions sont nommées martingales d'Azéma de paramètre q. (Pour $q = 0$, on retrouve la martingale du début ; pour $q = 1$, c'est le mouvement brownien.) En outre, à q fixé, les lois solutions vérifient :

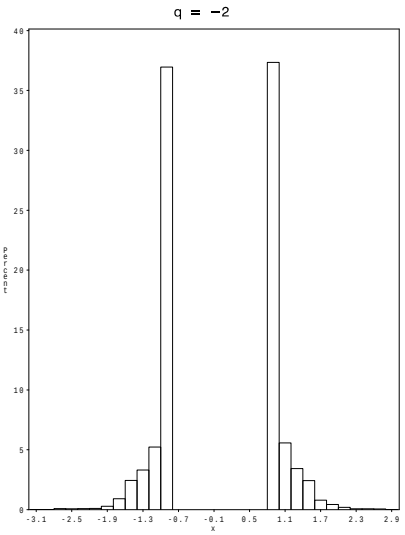
— la propriété de scaling brownien ;

— la propriété de Feller.

On note L^q et A^q les opérateurs correspondants, $(P_t^q)_{t\geqslant 0}$ le semi-groupe de Feller (A^q est le générateur, L^q la bonne racine carré de l'opérateur carré du champ). Une propriété importante est que P_t^q(polynôme(x) de degré n) = polynôme(x,t) de degré n en x, de degré $[n/2]$ en t^3, où $[\,.\,]$ est la partie entière, et que L^q et A^q abaissent le degré.

2.1. Martingales d'Azéma de paramètre $q = -2$





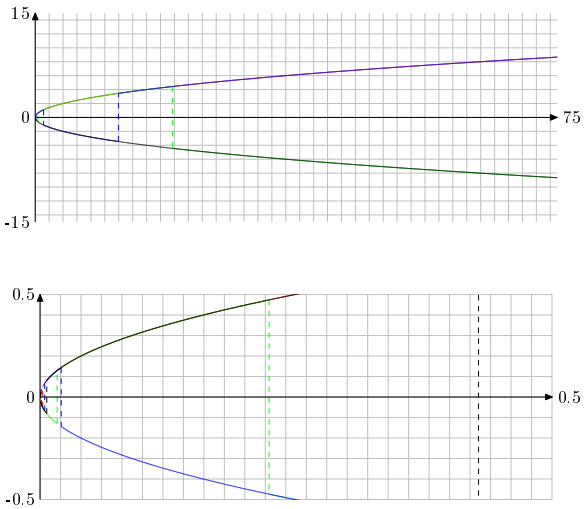
2.2. Martingales d'Azéma de paramètre $q = -1$ (martingale parabolique)

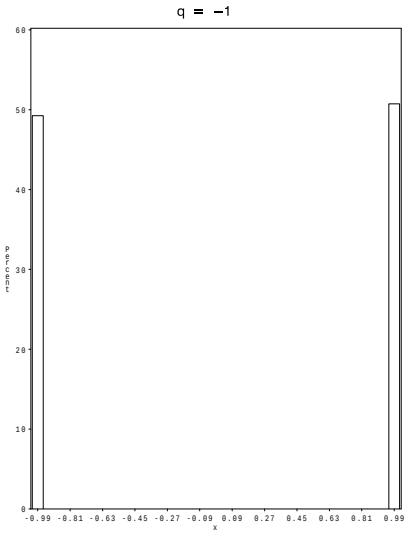
---

3. Plus précisément, les moments d'une martingale d'Azéma de paramètre $q \in \mathbb{R}$ issue de $x \in \mathbb{R}$ sont donnés par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

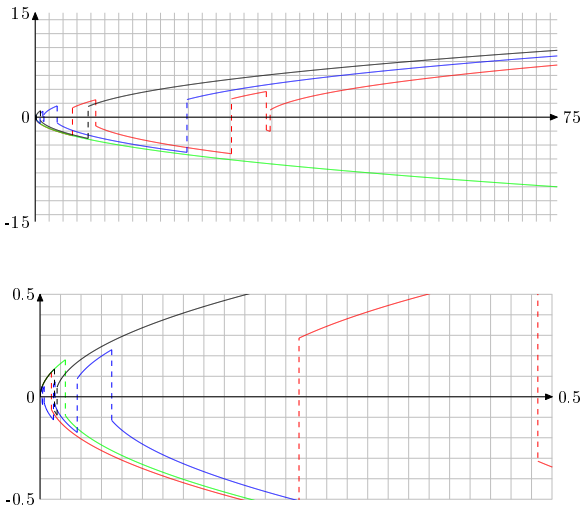
$$\mathbb{E}_q^x[(X_t)^{2n}] = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{q^{2i} - 1 - 2i(q-1)}{(q-1)^2} \right) \frac{t^{n-k} x^{2k}}{(n-k)!},$$

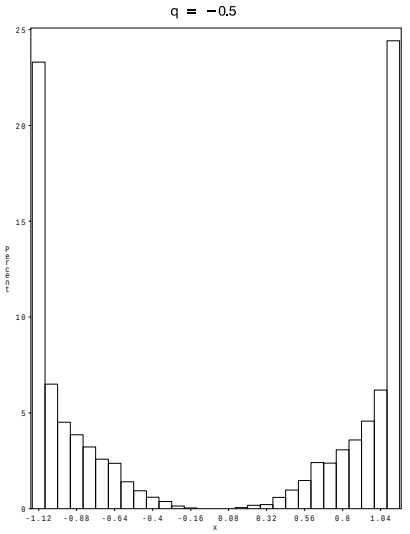
$$\mathbb{E}_q^x[(X_t)^{2n+1}] = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{q^{2i+1} - 1 - (2i+1)(q-1)}{(q-1)^2} \right) \frac{t^{n-k} x^{2k+1}}{(n-k)!}.$$



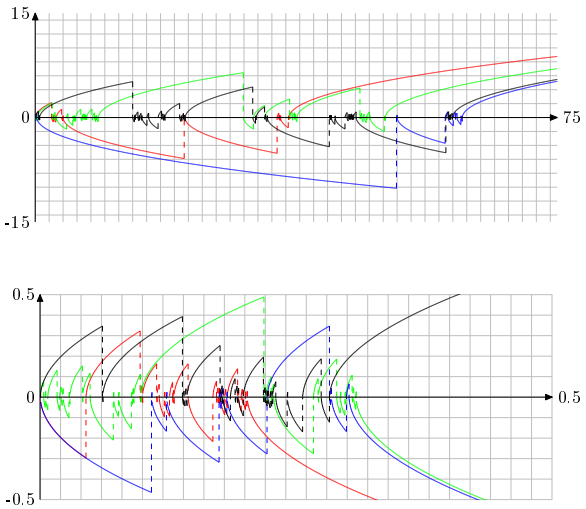


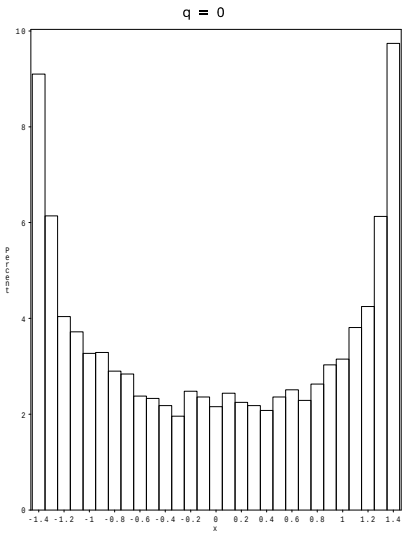
2.3. Martingales d'Azéma de paramètre $q = -0{,}5$



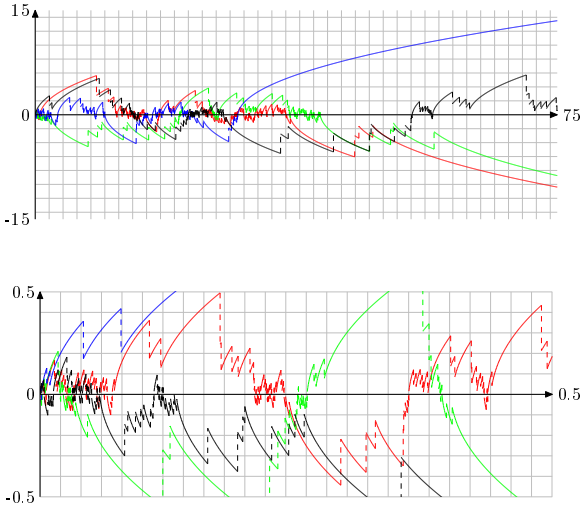


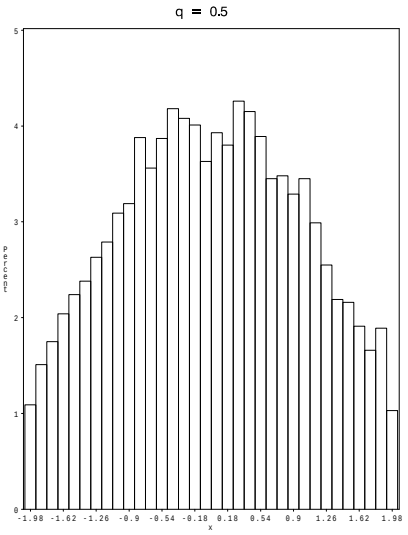
2.4. Martingales d'Azéma de paramètre $q = 0$ (la martingale d'Azéma)



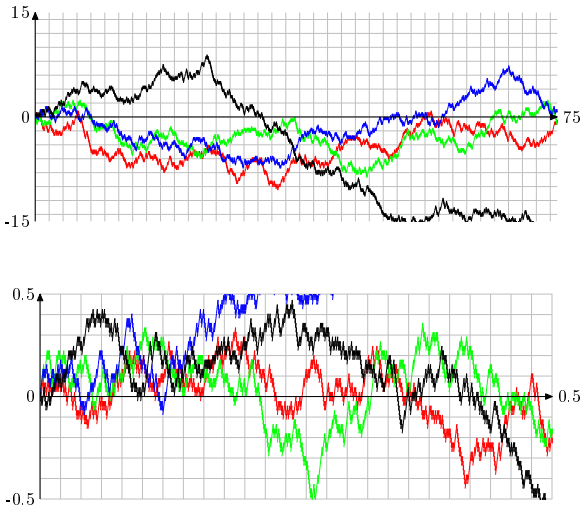


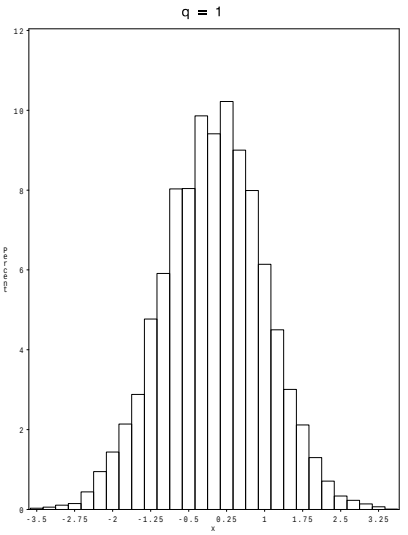
2.5. Martingales d'Azéma de paramètre $q = 0{,}5$



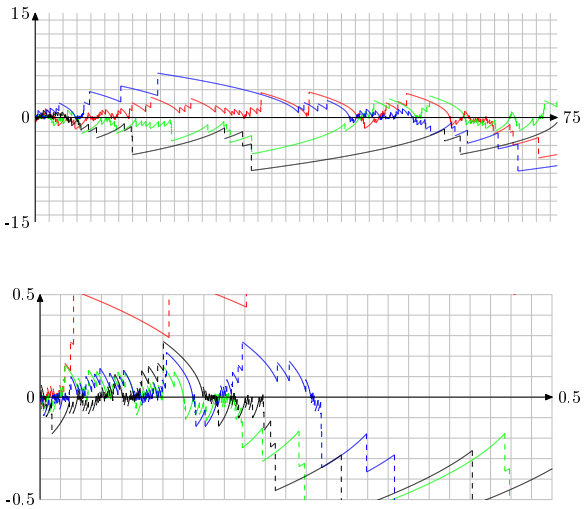


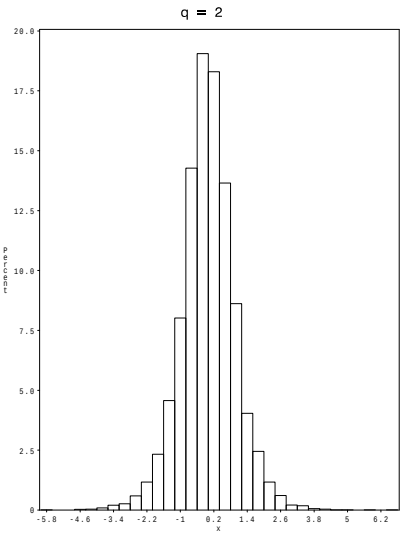
2.6. Martingales d'Azéma de paramètre $q = 1$ (processus de Wiener)





2.7. Martingales d'Azéma de paramètre $q = 2$





Pour toutes ces illustrations la condition initiale est ici $X_0 \equiv 0$.

Pour $-1 < q \leqslant 1$, et toujours pour une condition initiale nulle, Parthasarathy a montré l'existence de densités (*voir* [9]), c'est-à-dire $P_t^q(0, \mathrm{d}y) \ll \mathrm{d}y$ (leurs expressions sont bien connues pour $q \in \{0, 1\}$. Pour $q = -1$, ceci n'est plus satisfait $(P_t^q(0, \mathrm{d}y) = (\delta_{-\sqrt{t}} + \delta_{\sqrt{t}})/2)$. Enfin on peut noter que, pour tout $-1 \leqslant q < 1$, la loi de X_t est à support dans

$$\left[-\sqrt{\frac{2t}{1-q}}\,, \sqrt{\frac{2t}{1-q}}\right].$$

3. **Quelques propriétés**

Temps locaux. — Précisons le comportement asymptotique de ces processus :

— si $q < q_* \approx 0{,}278$, on ne revient jamais en 0 et le processus tend en valeur absolue vers l'infini ;

— si $q = q_*$, 0 est finement récurrent (le processus passe une infinité de fois dans tout voisinage de 0) ;

— si $q > q_*$, 0 est ponctuellement récurrent.

Le temps local en a, ℓ^a, apparaît dans la formule de Tanaka–Meyer :

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_{]0,t]} \mathbb{1}_{\{Xs->a\}}\, \mathrm{d}X_s + \sum_{0<s\leqslant t} \left(\mathbb{1}_{\{X_{s-}>a\}}(X_s - a)^- \mathbb{1}_{\{X_{s-}\leqslant a\}}(X_s - a)^+\right) + \frac{1}{2}\,\ell_t^a.$$

Rappelons que le processus ℓ^a est continu, croissant, de mesure dérivée portée par $\{t : X_t = a\}$.

On a pour les martingales d'Azéma :

— pour tout $q \neq 1$, pour tout $a \neq 0$, $\ell^{q,a} \equiv 0$;

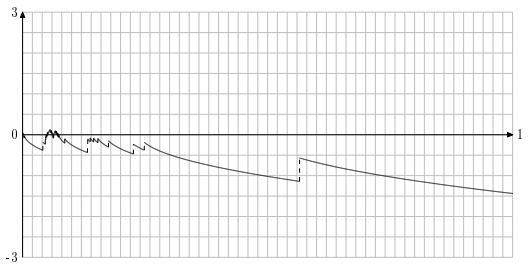
— $q < 0$ si et seulement si $\ell^{q,a} \neq 0$.

Ainsi, quand $q \geqslant 0$, $q \neq 1$, on a des exemples de martingales dont le temps local n'admet pas de version régulière ($a \mapsto \ell_t^a$ continue à droite), la condition $\sum_{0<s\leqslant t} |\Delta X_s| < \infty$ n'est pas vérifiée (*voir* [6, 11, 12]).

Propriété de représentation chaotique. — La propriété de représentation chaotique pour les martingales d'Azéma n'est toujours connue que pour $-1 \leqslant q \leqslant 1$ et toute condition initiale déterministe (pour $q < -1$ et $X_0 \equiv x \neq 0$, elle a aussi lieu). Ce qui rend la démonstration assez aisée dans ce cas est l'action sur les polynômes des semi-groupes et opérateurs associés et la bornitude des supports des lois quand $-1 \leqslant q < 1$ (*voir* [3]).

Retournement du temps. — Lorsqu'on dessine des trajectoires de martingales

d'Azéma, on est frappé par la symétrie entre les cas $q \in]0,1[$ et $q > 1$.



Parthasarathy avait remarqué que formellement

$$(A^q)^* = \frac{1}{q} A^{1/q} \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x).$$

Plus exactement, il a été démontré que les semi-groupes $(P_t^q)_{t\geqslant 0}$ et $(P_{t/q}^{1/q})_{t\geqslant 0}$ sont en dualité par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $q > 0$. Pouvoir remonter des générateurs aux semi-groupes repose à nouveau sur des propriétés de support des noyaux et sur leur action sur les polynômes. Cette propriété, qui est une propriété de retournement du temps, demeure encore inexploitée (*voir* [11]).

Projection sur la filtration du signe. — Rappelons sommairement que :

— pour $q < 0$, il y a changement de signe à chaque saut ;

— pour $q = 0$, il y a annulation à chaque saut ;

— pour $q > 0$, un changement de signe ne peut avoir lieu qu'avec une annulation.

Que se passe-t-il si on projette une martingale d'Azéma de paramètre q sur la filtration de son signe ?

— lorsque $q < 0$ on devrait avoir $X^q \to X^q$, plus précisément, la filtration de X^q est celle de son signe[4] ;

— lorsque $q = 1$, on a $B \to \sqrt{\pi/4}\, X^0$;

— on peut conjecturer que pour tout $q \geqslant 0$, on a $X^q \to c_q\, X^0$.

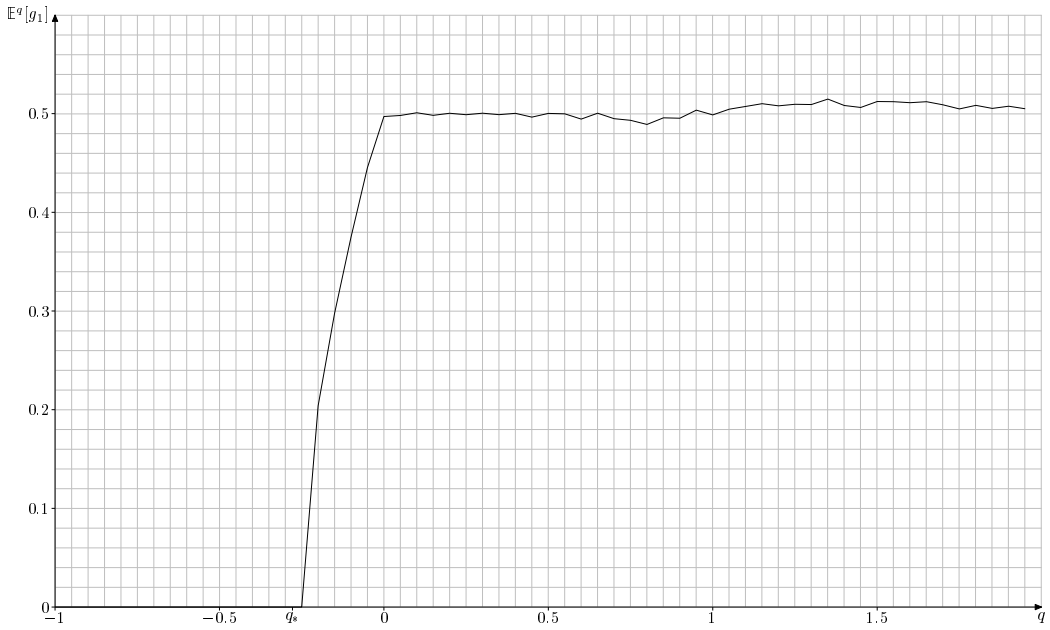
Si on suit les raisonnements de [2], cela est vrai si et seulement si

$$\mathbb{E}[g_1] = \frac{1}{2}$$

pour toute martingale d'Azéma de paramètre $q \geqslant 0$ issue de 0. Des simulations

4. Michel Émery nous a rappelé pourquoi cela est vrai pour $q \in [-1, 0]$: on peut établir pour tout $q \in [-1, 1[$ que les instants de sauts avant t déterminent complètement $(|X_s|)_{s\leqslant t}$; ainsi, si de plus $q \leqslant 0$, la connaissance du signe avant t détermine complètement $(X_s)_{s\leqslant t}$.

numériques assez grossières confirment la croyance en cette identité.[5]



Références

[1] Azéma (J.), « Sur les fermés aléatoires », *Séminaire de probabilités XIX*, Lecture Notes in Mathematics 1123, Springer (1985), p. 397–495.

[2] Azéma (J.) et Yor (M.), « Étude d'une martingale remarquable », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 88–130.

[3] Émery (M.), « On the Azéma Martingales », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 66–87.

[4] _____, « Sur les martingales d'Azéma (suite) », *Séminaire de probabilités XXIV*, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer (1990), p. 442–447.

[5] Azéma (J.) et Rainer (C.), « Sur l'équation de structure $\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t - X_{t-}^+ \,\mathrm{d}X_t$ », *Séminaire de probabilités XXVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer (1994), p. 236–255.

[6] Chao (T.-M.) & Chou (C.-S.), « Some remarks on the martingales satisfying the structure equation $[X,X]_t = t + \int_0^t \beta X_{s-} dX_s$ », *Séminaire de Probabilités XXXV*, Lecture Notes in Mathematics 1755, Springer (2001), p. 87–97.

[7] Kurtz (D.), « Représentation nucléaire des martingales d'Azéma », *Séminaire de Probabilités XXXVI*, Lecture Notes in Mathematics 1801, Springer (2002), p. 457–476.

[8] Meyer (P.-A.), « Construction de solutions d' "équations de structure" », *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 142–145.

5. Peu avant cet exposé, Michel Émery nous a transmis ses reflexions à ce sujet, réflexions « à la physicienne » où il démontre l'identité cherchée en calculant la fonction $q \to \mathbb{E}[g_1]$.

[9] Parthasarathy (K. R.), « Azéma martingales and quantum stochastic calculus », *Proceedings of the R. C. Bose Symposium on Probability, Statistic and Design of Experiments*, Wiley Eastern (1990), p. 551–569.

[10] _____, « Azéma martingales with drift », *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 15 (1995), p. 461–468.

[11] Phan (A.), *Contribution à l'étude des équations de structure markoviennes*, thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (2000), `http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2000/00046.shtml`.

[12] Protter (P.), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer (1990).

[13] Schürmann (M.), « The Azéma Martingales as Components of Quantum Independent Increment Processes », *Séminaire de Probabilités XXV*, Lecture Notes in Mathematics 1485, Springer (1991), p. 24–30.

[14] Yor (M.), *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recent Martingale Problems*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser (1997).

Appendice : simulation de solutions d'équations de structure

Les simulations de base de mouvement brownien et de processus de Poisson sont bien connues. Pour les premiers, on approche une trajectoire brownienne par l'interpolation linéaire par morceaux d'une marche aléatoire symétrique convenablement normalisée ; pour les seconds, on tire des temps exponentiels indépendants.

Il est tentant de mélanger les deux approches dans le cas de solutions d'équations de structure puisque celles-ci sont — en gros — un mélange convenable de comportements browniens et poissoniens.

Cependant l'approche la plus simple à mettre en œuvre est celle décrite par Meyer (*voir* [8]) pour établir l'existence de solutions : partons de l'équation de structure

$$\mathrm{d}[X,X]_t = \mathrm{d}t + \Phi_t \,\mathrm{d}X_t, \qquad t > 0;$$

discrétisons-la

$$(\Delta X_t)^2 = \Delta t + \Phi_{t-\Delta t}\,\Delta X_t, \qquad t \in \mathbb{Z}^*\Delta t = \{\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots\};$$

résolvons cette équation du second degré pour obtenir

$$X_t^{\pm} = X_{t-\Delta t} + \frac{-\Phi_{t-\Delta t} \pm \sqrt{\Phi_{t-\Delta t}^2 + 4\Delta t}}{2}.$$

et choisissons l'une des deux prochaines valeurs pour obtenir une martingale, i.e., $\mathbb{E}[\Delta X_t] = 0$, indépendamment de ce qui aura pu se passer auparavant, soit seulement en fonction de la valeur de $\Phi_{t-\Delta t}$. Ce qu'on obtient est une martingale discrète qui approche une solution du cas continu. Pour savoir si à un instant donné un saut a eu lieu ou non, il suffit de comparer le signe de ΔX_t et de $\Phi_{t-\Delta t}$: s'ils sont strictement de même signe, un saut a eu lieu, sinon l'accroissement est à considérer comme une dérive ou une variation brownienne c'est-à-dire continu.