MARTINGALES INDEXÉES PAR $\mathbb{N}$. PROPRIÉTÉS DE REPRÉSENTATION PRÉVISIBLE ET CHAOTIQUE

Le texte qui suit correspond au premier exposé du groupe de travail « Filtration et Processus » de Poitiers. Son contenu est tout sauf original. Nous avons essayé de donner les principaux éléments de la théorie des martingales quitte à exagérer par rapport au cadre fixé — celui de $\mathbb{N}$ — pour ne pas rester trop loin de celui de $\mathbb{R}_+$.

Introduction

Motivations. — Se donner un espace probabilisé filtré, c'est se donner ses martingales. On pourrait croire qu'un tel espace est simplement la donnée d'une filtration éventuellement augmentée d'ensembles négligeables et que, dès lors, la théorie des martingales se limite essentiellement à celle des familles croissantes de tribus. Ceci est bien sûr faux puisque la probabilité ajoute une contrainte structurelle supplémentaire à la simple croissance des tribus.

Une question « naturelle » consiste à se demander comment, étant donné un espace probabilisé, est engendrée une filtration : si c'est la filtration naturelle d'une certaine famille de variables aléatoires, ou de manière plus forte, si toutes les martingales de cette filtration sont représentables à l'aide de l'une de ses martingales (éventuellement vectorielle) (propriété de représentation prévisible ou chaotique).

L'étude des filtrations et des processus indexés par $\mathbb{N}$ est le plus simple après celle des filtrations et des processus indexés par des ensembles finis. Il importe de commencer par celui-ci, ne serait-ce que pour apprécier plus tard les difficultés liées à $-\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{R}_+$.

Bibliographie commentée. — De nombreux livres exposent les rudiments de théorie des martingales. Celles que je donne correspondent à mes goûts. Pour ce qui est des propriétés de représentation, je ne donne ici que les références que j'ai fréquentées. Une liste de lectures complémentaires possibles est donnée à la fin de ces notes.

— Neveu (J.), *Martingales à temps discret*, Masson (1972). À mon avis, c'est l'ouvrage de référence sur la théorie des martingales indexées par $\mathbb{N}$. De plus, c'est un beau petit livre. Cependant, il est assez ancien et semble antérieur à la grande poussée de la théorie des martingales commencée à la moitié des années 70.

— Dellacherie (C.) et Meyer (P.-A.), *Probabilités et potentiel*, Chapitres V à VIII, Hermann (1980). Le premier chapitre du volume (chap. V) présente en détail la théorie des martingales indexées par $\mathbb{N}$. Si la présentation du bouquin est moins attractive que celle du précédent, celui-ci présente l'avantage de mettre en rapport les théories discrète et continue (et puis on y trouve tout raconté avec un style pédagogue et amical).

— Dellacherie (C.), Maisonneuve (B.) et Meyer (P.-A.), *Probabilités et potentiel*, Chapitres XVII à XXIV, Hermann (1992). On trouve aux pages 257 et 258 les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une martingale réelle indexée par $\mathbb{N}$ ait la propriété de représentation prévisible ou chaotique et leur démonstration (finalement assez peu détaillée).

— Émery (M.), « On the Azéma Martingales », *Séminaire de probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer (1989), p. 66–87. La première page pose le problème de la propriété de représentation chaotique des martingales réelles indexées par $\mathbb{R}_+$. Les deux pages suivantes règlent le cas de celles qui sont indexées par $\mathbb{N}$.

§ 1. Rappels

L'espace probabilisé fondamental est généralement noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Une variable aléatoire réelle X est une application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}))$; sa loi est la probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}))$ image de $\mathbb{P}$ par l'application X et on peut la noter $X_*\mathbb{P}$ — les autres notations m'ont toujours paru folkloriques et sources de confusion, mais celle-ci est lourde et peu lisible. L'espérance de X s'écrit

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\,(X_*\mathbb{P})(\mathrm{d}x)$$

lorsque l'une de ces intégrales a un sens (par exemple lorsque X est intégrable ou de signe constant).

Espérances conditionnelles. — Définition 1. — Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une variable aléatoire intégrable. Il existe une unique (à équivalence presque sûre près) variable aléatoire Y $\mathcal{B}$-mesurable telle que

$$\mathbb{E}[Y\,\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}_B] \qquad \text{pour tout } B \in \mathcal{B},$$

cette variable aléatoire est appelée *espérance conditionnelle* de X sachant $\mathcal{B}$ et est notée $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$.

L'application $B \in \mathcal{B} \mapsto \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}_B]$ est une mesure bornée sur $(\Omega, \mathcal{B})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. L'espérance conditionnelle n'est autre que la dérivée de Radon–Nikodym de cette mesure par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$. Intuitivement, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$ est l'idée qu'on se fait de X avec pour seules informations disponibles celles qui sont contenues dans $\mathcal{B}$.

Quelques propriétés. — (i) *Linéarité, monotonie, continuité par limite monotone, inégalité de Jensen, idempotence, ...*

(ii) *Transitivité : soient X une variable aléatoire intégrable, et $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$; on a*

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \,\big|\, \mathcal{C}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{C}] \,\big|\, \mathcal{B}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{C}] \qquad \textit{presque sûrement.}$$

(iii) *Factorisabilité : si H est une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable telle que $H \times X$ est intégrable, alors on a*

$$\mathbb{E}[H \times X \mid \mathcal{B}] = H \times \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \qquad \textit{presque sûrement.}$$

Filtrations. — DÉFINITION 2. — On appelle *filtration* de $(\Omega, \mathcal{A})$ toute suite croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus. En particulier, rien n'est imposé sur la tribu initiale $\mathcal{F}_0$, ni sur la tribu finale

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}.$$

Dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une tribu est complète si elle contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables $\mathcal{N}(\mathbb{P})$. On peut compléter toute tribu. Une filtration est complète si tous ses éléments sont complets.

Étant donnée $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires,

$$\mathcal{F}_n^{X,0} = \sigma\{X_k : k \leqslant n\}$$

définit la filtration $\mathcal{F}^{X,0}$ appelée *filtration naturelle non complétée* de X. On considère souvent

$$\mathcal{F}_n^{X} = \sigma\{X_k : k \leqslant n\} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P}),$$

auquel cas on parle de *filtration naturelle complétée*. On pourra employer l'expression *filtration naturelle* pour désigner toute filtration intermédiaire entre les filtrations naturelles non complétée et complétée.

Martingales. — DÉFINITION 3. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré. Une suite de variables aléatoires X est une *martingale* si et seulement si :

(i) pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable (adaptation) ;

(ii) pour tout n, X_n est intégrable ;

(iii) pour tout n, $\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n$ presque sûrement.

L'exemple fondamental est $X_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n]$ où $A \in \mathcal{A}$ est fixé, ou encore $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n]$ avec X_∞ une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable. Mais toutes les martingales ne sont pas de cette forme...

Remarque. — Si l'ensemble des indices n'est pas fermé à gauche, c'est-à-dire s'il n'admet pas de borne inférieure, on définira plutôt les martingales par leurs accroissements : on supposera toujours l'adaptation, mais seulement que $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ est intégrable et que $\mathbb{E}[\Delta X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = 0$ presque sûrement. Si l'ensemble des indices est fermé à gauche par, mettons, 0, on conviendra que $\Delta X_0 = 0$, *i.e.* $X_{0-1} = X_0$.

THÉORÈME 1 DE CONVERGENCE DES MARTINGALES (CAS L^1). — (i) *Si la martingale X vérifie $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, alors il existe X_∞ $\mathcal{F}_\infty$-mesurable telle que X converge vers X_∞ presque sûrement.*

(ii) *Pour une martingale X, on a : la suite de variables aléatoires X est uniformément intégrable $\Leftrightarrow$ X converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $\Leftrightarrow$ $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ et il existe $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout n, $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n]$ presque sûrement $\Leftrightarrow$ il existe $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout n, $X_n = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n]$ presque sûrement.*

THÉORÈME 2 DE CONVERGENCE DES MARTINGALES (CAS L^p). — *Soient X une martingale et $p \in]1, \infty[$. Si $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ alors X converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers la limite presque sûre X_∞.*

Lorsqu'une martingale X converge dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers X_∞, on dit que cette martingale est fermée dans L^p par la variable aléatoire X_∞.

Temps d'arrêt. — Définition 4. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré où $\mathcal{F}$ est une filtration indexée par $\mathbb{N}$.. Une variable aléatoire T à valeurs dans l'ensemble des indices fermé à droite, *i.e.* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, est un *temps d'arrêt* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ (ce qui revient, dans le cas discret, à vérifier que $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Heuristiquement, si T représente l'instant de réalisation d'un phénomène donné, dire que T est un temps d'arrêt, c'est dire que la filtration est suffisamment riche pour que l'on sache à tout instant si ce phénomème est survenu ou non.

Si T est un temps d'arrêt, on note

$$\mathcal{F}_T = \big\{A \in \mathcal{A} : \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n\big\}.$$

C'est une tribu. Elle est appelée *tribu des événements antérieurs à T.*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. On note X_T la fonction définie sur $\{T < \infty\}$ par $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$, c'est la valeur du processus X au temps T. On note $X|^T = (X|^T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires $(X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$, c'est le processus X arrêté au temps T.

Quelques propriétés. — (i) *Les temps constants sont des temps d'arrêt. Si S et T sont deux temps d'arrêt, le sont aussi $S \vee T$ et $S \wedge T$. Les supremum et infimum de temps d'arrêt sont des temps d'arrêt.*

(ii) *Si S et T sont deux temps d'arrêt, $\{S \leqslant T\} \in \mathcal{F}_T$, $\{S > T\} \in \mathcal{F}_T$.*

(iii) *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée de variables aléatoires, $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable. En particulier, le processus arrêté $X|^T = (X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$-adapté.*

Remarque. — La théorie des temps d'arrêt (et tout le reste) est beaucoup plus simple quand l'ensemble des temps est discret que lorsqu'il est continu. Par exemple, dans le cas discret, une suite décroissante minorée est stationnaire. Les passages à limite dans ce cas ne posent pas de problème d'adaptation (cas de la limite inférieure). De même, il suffit de supposer que X soit adapté et que T soit un temps d'arrêt pour conclure que $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Dans le cas continu, on suppose de plus que X est progressif pour être assuré de conserver cette conclusion.

Théorème 3 d'arrêt (Doob). — *Soient X une martingale, $S \leqslant T$ deux temps d'arrêt. Si $X|^T$ est uniformément intégrable, alors*

$$\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_S] = X_S \qquad \textit{presque sûrement.}$$

En pratique il y a deux cas fréquents : ou bien le processus $X|^T$ est uniformément borné, ou bien le temps d'arrêt T est borné (de la forme $T' \wedge n$). Notamment, on en déduit que toute martingale arrêtée est une martingale. Dans l'énoncé plus haut, on aura éventuellement fermé la martingale $X|^T$ au cas où T prendrait la valeur infinie.

Classes de martingales. — Définition 5. — Soient X une martingale et $p \in [1, \infty[$.

(i) La martingale X est p-intégrable si et seulement si

$$\sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big]^{1/p} < \infty.$$

(ii) La martingale X appartient à $\mathcal{M}^p$ si et seulement si X est uniformément intégrable et

$$\sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big]^{1/p} < \infty\,;$$

la norme de X dans $\mathcal{M}^p$ est alors donnée par l'expression précédente.

(iii) La martingale X appartient à $\mathcal{H}^p$ si et seulement si

$$\mathbb{E}\big[\sup_n |X_n|^p\big]^{1/p} < \infty\,;$$

la norme de X dans $\mathcal{H}^p$ est alors donnée par l'expression précédente.

(iv) Soit $\mathcal{K}$ une classe de martingales. La martingale X appartient à $\mathcal{K}_{\mathrm{loc}}$ si et seulement si il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que pour tout n, $X|^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$ appartient à $\mathcal{K}$. On dit que X est localement dans $\mathcal{K}$, et que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réduit X ou est localisante pour X. Les éléments de $\mathcal{M}^1_{\mathrm{loc}}$ sont appelés martingales locales.

Remarques. — *a*) Certains auteurs — tels que Neveu — appellent martingale p-intégrable toute martingale X telle que $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ pour tout n. La raison est qu'ils préfèrent appeler martingales des « martingales » satisfaisant des condition d'intégrabilité plus faibles. Ils utilisent alors des espérances conditionnelles généralisées (théorème de Radon–Nikodym pour des mesures σ-finies). En fait, ces martingales généralisées sont, dans le cas discret, exactement les martingales locales (*voir* le deuxième volume de *Probabilités et Potentiel*, p. 97–98).

b) D'après les théorèmes de convergence, les espaces $\mathcal{M}^p$ sont identiques aux espaces des martingales fermées dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Lorsque $p>1$, l'hypothèse d'intégrabilité uniforme est inutile puisque c'est alors une conséquence de la bornitude des normes L^p. Il arrive qu'on identifie les éléments de $\mathcal{M}^p$ aux variables aléatoires qui les ferment (modulo, dans le cas discret, l'équivalence presque sûre, ou, dans le cas continu, l'indistinguabilité).

c) Si $\mathbb{E}[\sup_n |X_n|^p]^{1/p} < \infty$, alors X est uniformément intégrable. Notamment $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{M}^p$ pour tout $p \geqslant 1$. En fait, pour tout $p>1$, $\mathcal{H}^p = \mathcal{M}^p$ et leurs normes sont équivalentes. En effet, si X est une martingale et $p \in]1,\infty[$, alors on a l'inégalité

$$\mathbb{E}\big[\sup_n |X_n|^p\big] \leqslant \frac{p}{p-1}\sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big], \qquad \text{(inégalité de Doob)}$$

appelée inégalité de Doob, d'où on déduit l'équivalence des normes. De plus, celles-ci sont équivalentes à la norme L^p des variables terminales.

d) Les espaces $\mathcal{H}^p$ sont mieux adaptés au calcul stochastique que les espaces $\mathcal{M}^p$. Ceci provient du fait que leurs normes sont équivalentes à des normes « quadratiques » : en définissant la *variation quadratique* $[X,X]$ d'un processus X par

$$[X,X]_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k^2,$$

les inégalités de Burkhölder–Davis–Gundy affirment que

$$\frac{1}{4p}\,\mathbb{E}\big[\sup_n |X_n|^p\big]^{1/p} \leqslant \mathbb{E}\big[\big([X,X]_\infty^{1/2}\big)^p\big]^{1/p} \leqslant 6p\,\mathbb{E}\big[\sup_n |X_n|^p\big]^{1/p} \quad \text{(inégalités B.D.G.)}$$

pour toute martingale X.

e) Toutes les martingales sont des martingales locales. Il suffit en effet de prendre pour suite de temps d'arrêt $T_n = n$. Ainsi, $\mathcal{M}^1 \subset \mathcal{M}^1_{\mathrm{loc}} = \mathcal{M}^0_{\mathrm{loc}}$ où $\mathcal{M}^0$ est la classe des martingales. Une autre identité importante est la suivante :

$$\mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}} = \mathcal{M}^1_{\mathrm{loc}}.$$

Ceci montre que pour établir une propriété locale on peut se restreindre à $\mathcal{H}^1$ pour, par la suite, l'étendre à toute la classe des martingales locales.

f) Ce qui précède provient de la théorie des martingales indexées par $\mathbb{R}_+$ et est assez général (seule la définition de la variation quadratique est à revoir). Dans un cas particulier la théorie est extrêmement simplifiée, c'est celui des martingales indexées par $\mathbb{R}_+$ à trajectoires continues car celles-ci sont localement bornées : si X est une telle martingale et si

$$T = \sup\{t \geqslant 0 : |X_s| \leqslant K,\ 0 \leqslant s \leqslant t\},$$

alors T est un temps d'arrêt pour la filtration continue à droite et $X|^T \mathbb{1}_{\{T>0\}}$ est une martingale bornée par K. Ce qui implique que pour ces cas particuliers toutes les classes locales précédentes sont égales. Hélas !, rien de tel n'est vrai lorsque l'ensemble des indices est discret (ni quand un tel X n'est pas à trajectoires continues) car une variable aléatoire telle que

$$T = \sup\{k \geqslant 0 : |X_l| \leqslant K,\ 0 \leqslant l \leqslant k\}$$

n'est pas un temps d'arrêt. En effet, l'événement $\{T \leqslant n\}$ est la réunion pour $k = 0$ jusqu'à n des événements $\{T = k\} = \{|X_0| \leqslant K, \ldots, |X_k| \leqslant K,\ |X_{k+1}| > K\}$, réunion qui est seulement $\mathcal{F}_{k+1}$-mesurable. On pourra noter que dans le cas de $\mathbb{R}_+$,

$$\sup\{t \geqslant 0 : |X_s| \leqslant K,\ 0 \leqslant s \leqslant t\} = \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| > K\},$$

tandis que dans le cas $\mathbb{N}$,

$$\sup\{k \geqslant 0 : |X_l| \leqslant K,\ 0 \leqslant l \leqslant k\} = (\inf\{k \geqslant 0 : |X_k| > K\} - 1) \vee 0.$$

§ 2. Intégrales stochastiques

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ est un espace probabilisé filtré et X est une martingale ou une martingale locale. Une suite de variables aléatoires $H = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite prévisible si pour tout $n \geqslant 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable (H_0 ne nous importera pas, nous pouvons supposer que c'est une constante ou encore imposer à $\mathcal{F}_{-1}$ d'être la tribu triviale).

Intégrales stochastiques. — Définition 6. — L'*intégrale stochastique* de H par rapport à X est la suite de variables aléatoires $H \cdot X$ définie par

$$(H \cdot X)_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (H \cdot X)_n - (H \cdot X)_{n-1} = H_n\, \Delta X_n \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Évidemment, l'appellation intégrale stochastique est ici exagérée (on parle normalement de martingales transformées de Burkhölder), mais c'est bien l'analogue discret de l'intégrale stochastique dans le cas continu. Dans le cas de $\mathbb{N}$, c'est un luxe de prendre cette définition par les accroissements puisqu'on a simplement

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k\, \Delta X_k \qquad (\text{à comparer avec } \textstyle\int_{]0,t]} H_s\, \mathrm{d}X_s).$$

Bien entendu, le cas de $\mathbb{Z}$ pose d'autres problèmes.

FAIT. — *Si la martingale X et la suite prévisible H sont telles que $(H \cdot X)_n$ est intégrable pour tout n, alors $H \cdot X$ est une martingale.*

En effet, $(H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n = H_{n+1}\,\Delta X_{n+1}$ est alors intégrable et

$$\mathbb{E}[H_{n+1}\,\Delta X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = H_{n+1}\,\mathbb{E}[\Delta X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = H_{n+1} \times 0 = 0.$$

Soit X une martingale locale. Une suite prévisible H est dite *intégrable par rapport à X dans $\mathcal{H}^p$* si

$$\mathbb{E}\big[[H \cdot X, H \cdot X]_\infty^{p/2}\big] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n \geqslant 1} H_n^2\,\Delta X_n^2\right)^{p/2}\right] < \infty.$$

On constate alors que $H \cdot X$ est une martingale locale, qu'elle est uniformément intégrable, que c'est dès lors une vraie martingale, et finalement que $H \cdot X \in \mathcal{H}^p$. Réciproquement, si $H \cdot X$ appartient à $\mathcal{H}^p$ la quantité plus haut est finie.

On note $\mathcal{L}^p(X)$ l'espace vectoriel normé déduit de l'ensemble des suites prévisibles intégrables par rapport à X dans $\mathcal{H}^p$ muni de la semi-norme précédente. L'espace $\mathcal{L}^p(X)$ est isométrique à l'ensemble des intégrales stochastiques par rapport à X dans $\mathcal{H}^p$. On peut montrer que $\mathcal{L}^p(X)$ est un espace de Banach[1] pour en déduire que l'ensemble de ces intégrales stochastiques est fermé.

Représentation prévisible. — DÉFINITION 7. — Une martingale locale M admet une *représentation prévisible conditionnelle* par rapport à une martingale locale X s'il existe une suite prévisible H telle que $\Delta M_n = H_n\,\Delta X_n$ pour tout n, *i.e.* $M_n - M_0 = (H \cdot X)_n$, presque sûrement.

Un processus X possède la *propriété de représentation prévisible conditionnelle* dans la filtration $\mathcal{F}$ si X est une $\mathcal{F}$-martingale locale et si toute martingale locale admet une représentation prévisible conditionnelle par rapport à X.

Dans le cas de $\mathbb{N}$, on remarque que si X a la propriété de représentation prévisible conditionnelle, alors la filtration vérifie $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_n^X \vee \mathcal{F}_0$, où $\mathcal{F}^X$ est la filtration naturelle complétée. Démontrons-le par récurrence. Pour $n = 0$, c'est clair. Supposons que ce soit vrai pour tout $k < n$. Soit $A \in \mathcal{F}_n$. Considérons la martingale $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_k]$. Elle stationne à la valeur $\mathbb{1}_A$ et on a par propriété de représentation prévisible :

$$\mathbb{1}_A - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_0] = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\Delta X_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\,\Delta X_k + a_n\,\Delta X_n \qquad \text{presque sûrement,}$$

où a_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. On constate ainsi que $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(X_n) \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$-mesurable, c'est-à-dire, par hypothèse de récurrence $\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{F}_n^X$-mesurable. D'où la conclusion.

Remarques. — *a*) On parle de représentation prévisible lorsque la valeur initiale des martingales est presque sûrement constante. Ainsi, on exige que $\mathcal{F}_0$ soit dégénérée dans la définition de la propriété de représentation prévisible. Cette exigence permet de caractériser cette propriété en terme d'extrémalité de la loi $\mathbb{P}$ parmi les probabilités qui font de X une martingale. Le cadre est alors le cadre canonique : $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $X_n(\omega) = \omega_n$ et $\mathcal{F}$ est bien sûr la filtration naturelle (non complétée).

1. JACOD (J.) et YOR (M.), « Étude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales », *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, n° 38 (1977), pages 86 et 87.

b) L'affirmation selon laquelle la propriété de représentation prévisible implique que, aux négligeables près, la filtration soit la filtration naturelle devient fausse dans le cas de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}_+$ comme l'indiquent des exemples de Vershik[2] et de Dubins–Feldman–Smorodinski–Tsirelson[3] respectivement.

c) Pour démontrer qu'une martingale X possède la propriété de représentation prévisible, il suffit de montrer que toute martingale de $\mathcal{H}^1$ admet une représentation prévisible par rapport à X, le passage aux classes locales est alors immédiat.

§ 3. Représentation chaotique

Définition 8. — Une martingale locale X est dite *normale* si et seulement si, pour tout n, $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = 1$ presque sûrement.

Une définition équivalente consiste à dire qu'une martingale normale est un processus tel que, pour tout n, $\mathbb{E}[\Delta X_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n] = 1$ et $\mathbb{E}[\Delta X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = 0$ presque sûrement. On constate immédiatement que si X_0 est intégrable, alors c'est une martingale (sinon ce n'est qu'une martingale locale). Une troisième définition équivalente consiste à demander que $(X_n - X_0)_{n\geqslant 0}$ et $((X_n - X_0)^2 - n)_{n\geqslant 0}$ soient des martingales.

Exemple. — Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées

$$(\xi_n)_*\mathbb{P} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$$

— on parle alors de suite de Rademacher. Alors $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ forme une martingale normale dans sa filtration naturelle appelée marche de Bernoulli symétrique.

Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de cardinal n. Nous définissons $\ell^2(\mathcal{P})$ comme étant l'ensemble des applications $a : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|a\|^2 = \sum_{A\in\mathcal{P}} a_A^2 < \infty.$$

On peut voir $\mathcal{P}_n$ comme le n-simplexe

$$\mathcal{P}_n = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n : 0 < i_1 < \cdots < i_n\}$$

— qui est dénombrable — et $\mathcal{P}$ comme la réunion disjointe des $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ est une espace probabilisé filtré et X est une martingale normale. Pour $A \in \mathcal{P}$, on note

$$\Delta X_A = \prod_{n\in A} \Delta X_n,$$

un produit vide étant égal à 1. Nous avons déjà comparé ΔX_n à l'élément différentiel d'une intégrale stochastique. C'est donc sans surprise que ΔX_A sera assimilé à l'élément de volume d'une intégrale stochastique multiple.

---

2. Vershik (A. M.), « The theory of decreasing sequences of measurable partitions », *St. Petersburg Math. J.*, n° 6 (1995), p. 705–761.

3. Dubins (L.), Feldman (J.), Smorodinski (M.) et Tsirelson (B.), « Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion », *Annals of Probability*, n° 24 (1996), p. 882–904

PROPOSITION. — *La famille de variables aléatoires $(\Delta X_A)_{A\in\mathcal{P}}$ est une famille orthonormale dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Le sous-espace fermé qu'elle engendre est isométrique à $\ell^2(\mathcal{P})$ par l'application*

$$a \in \ell^2(\mathcal{P}) \longmapsto \sum_{A\in\mathcal{P}} a_A\,\Delta X_A \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}).$$

Démonstration. — Montrons, par récurrence sur $\operatorname{Card} A$, que

$$\mathbb{E}[\Delta X_A^2 \,|\, \mathcal{F}_{\min A-1}] = 1$$

presque sûrement, ce qui impliquera que $\mathbb{E}[\Delta X_A^2] = 1$. Si $\operatorname{Card} A = 0$, c'est-à-dire $A = \varnothing$, $\Delta X_\varnothing = 1$, donc $\mathbb{E}[\Delta X_\varnothing^2 \,|\, \mathcal{F}_\infty] = 1$. Pour $\operatorname{Card} A = 1$, c'est simplement la définition de la normalité. Supposons la propriété vraie au rang $n-1 \geqslant 1$, et soit $A \in \mathcal{P}$, $\operatorname{Card} A = n$. L'ensemble A est la réunion de son plus grand et de ses $n-1$ autres éléments, ce que nous notons $A = A' \cup \{\max A\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta X_A^2 \,|\, \mathcal{F}_{\min A-1}] &= \mathbb{E}\Big[\prod_{n\in A} \Delta X_n^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_{\min A-1}\Big] \\
&= \mathbb{E}[\Delta X_{A'}^2 \times \Delta X_{\max A}^2 \,|\, \mathcal{F}_{\min A'-1}] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\Delta X_{A'}^2 \times \Delta X_{\max A}^2 \,|\, \mathcal{F}_{\max A-1}] \;\big|\; \mathcal{F}_{\min A'-1}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\Delta X_{A'}^2 \times \mathbb{E}[\Delta X_{\max A}^2 \,|\, \mathcal{F}_{\max A-1}] \;\big|\; \mathcal{F}_{\min A'-1}\big] \\
&= \mathbb{E}[\Delta X_{A'}^2 \times 1 \,|\, \mathcal{F}_{\min A'-1}] \\
&= 1 \qquad \text{presque sûrement,}
\end{aligned}$$

où on se sera servi du fait que tous les facteurs sont positifs, que $\min A = \min A'$, et que $\Delta X_{A'}^2$ est $\mathcal{F}_{\max A-1}$-mesurable ; ce qui achève la récurrence.

Soient $A, B \in \mathcal{P}$ avec $A \neq B$. En pensant à des listes croissantes d'entiers, écrivons $A = A' \cup C$, $B = B' \cup C$ où $\max A' < \min C$, $\max B' < \min C$, et $\max A' \neq \max B'$. Cette écriture est obtenue de la manière suivante :

```
A':=A;  B':=B; C:=∅;% ∅:={};
while max A' = max B' do
  C :={max A'} & C;
  A':=A' \ {max A'};
  B':=B' \ {max B'};
enddo
```

Comme $A \neq B$, cette procédure s'arrête avant que A' et B' soient tous les deux vides — ce qui ne peut arriver que si $A = B$. Évidemment, $C = \varnothing$ si et seulement si $\max A \neq \max B$.

Comme $\max A' \neq \max B'$, on supposera par exemple $\max A' > \max B'$. En

notant que $\Delta X_A \Delta X_B$ est intégrable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta X_A \Delta X_B] &= \mathbb{E}[\Delta X_{A'} \Delta X_{B'} \Delta X_C^2] \\
&= \mathbb{E}\big[\Delta X_{A'} \Delta X_{B'}\, \mathbb{E}[\Delta X_C^2 \mid \mathcal{F}_{\min C - 1}]\big] \\
&= \mathbb{E}[\Delta X_{A'} \Delta X_{B'} \times 1] \\
&= \mathbb{E}[\Delta X_{A' \setminus \{\max A'\}} \Delta X_{\{\max A'\}} \Delta X_{B'}] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\Delta X_{A' \setminus \{\max A'\}} \Delta X_{\{\max A'\}} \Delta X_{B'} \mid \mathcal{F}_{\max A' - 1}]\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\Delta X_{A' \setminus \{\max A'\}}\, \mathbb{E}[\Delta X_{\{\max A'\}} \mid \mathcal{F}_{\max A' - 1}] \Delta X_{B'}\big] \\
&= \mathbb{E}[\Delta X_{A' \setminus \{\max A'\}} \times 0 \times \Delta X_{B'}] = 0,
\end{aligned}$$

ce qui finit de montrer que $(\Delta X_A)_{A \in \mathcal{P}}$ est une famille orthonormale, et le dernier point de la proposition en découle immédiatement. □

Définition 9. — On appelle *espace chaotique* de la martingale X l'image $\mathcal{C}(X)$ de $\ell^2(\mathcal{P})$ par l'injection isométrique précédente :

$$\mathcal{C}(X) = \left\{ \sum_{A \in \mathcal{P}} a_A \, \Delta X_A \;\middle|\; a \in \ell^2(\mathcal{P}) \right\}.$$

On appelle *k-ième chaos* de la martingale X l'espace :

$$\mathcal{C}^k(X) = \left\{ \sum_{A \in \mathcal{P}_k} a_A \, \Delta X_A \;\middle|\; a \in \ell^2(\mathcal{P}) \right\} = \left\{ \sum_{A \in \mathcal{P}_k} a_A \, \Delta X_A \;\middle|\; a \in \ell^2(\mathcal{P}_k) \right\}.$$

L'espace $\mathcal{C}^0(X)$ est celui des variables aléatoires constantes et $\mathcal{C}(X)$ est la somme hilbertienne des espaces $(\mathcal{C}^k(X))_{k \in \mathbb{N}}$.

Ces espaces de variables aléatoires de carré intégrable s'identifient à des espaces de martingales de carré intégrable. Ainsi, si $M_\infty \in \mathcal{C}(X)$ correspondant à $m \in \ell^2(\mathcal{P})$,

$$M_n = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{A \in \mathcal{P}} m_A \, \Delta X_A \;\middle|\; \mathcal{F}_n \right] = \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ \max A \leqslant n}} m_A \, \Delta X_A.$$

On est tenté d'introduire des espaces supplémentaires $\mathcal{C}_n(X)$ et $\mathcal{C}_n^k(X)$ reflétant la structure filtrée :

$$\mathcal{C}_n^k(X) = \left\{ \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}_k \\ \max A \leqslant n}} a_A \, \Delta X_A \;\middle|\; a \in \ell^2(\mathcal{P}_k) \right\}$$

et

$$\mathcal{C}_n(X) = \left\{ \sum_{\substack{A \in \mathcal{P} \\ \max A \leqslant n}} a_A \, \Delta X_A \;\middle|\; a \in \ell^2(\mathcal{P}) \right\} = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathcal{C}_n^k(X).$$

Notons — et c'est une particularité du cas de $\mathbb{N}$ — que $\mathcal{C}_n^k(X)$ est réduit à $\{0\}$ dès que $k > n$.

On note que tous les espaces chaotiques introduits précédemment sont des images par une isométrie d'espaces de Banach. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels fermés de l'espace de Banach $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$.

DÉFINITION 10. — Une martingale normale X possède la *propriété de représentation chaotique* (inconditionnelle) si et seulement si $\mathcal{C}(X) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$.

Remarques. — *a*) Comme pour la définition de la propriété de représentation prévisible, on peut introduire la *propriété de représentation chaotique conditionnelle* en considérant des coefficients dépendant de la tribu initiale $a : \mathcal{P} \times \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables pour la tribu produit de celle de $\mathcal{P}$ (grossière) avec $\mathcal{F}_0$ et tels que $\sum_{A\in\mathcal{P}} \mathbb{E}[a_A^2] < \infty$.

b) *Si X a la propriété de représentation chaotique, la filtration est la filtration naturelle.* Il suffit pour le voir de considérer l'indicatrice d'un événement $E \in \mathcal{F}_n$. Par propriété de représentation chaotique

$$\mathbb{1}_E = \sum_{A\in\mathcal{P}} e_A \, \Delta X_A \qquad \text{presque sûrement,}$$

et comme $\mathbb{E}[\mathbb{1}_E \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{1}_E$, on en déduit que $e_A = 0$ dès que $\max A > n$ et donc que $\mathbb{1}_E$ est $\mathcal{F}_n^X$-mesurable.

c) *La propriété de représentation chaotique implique la propriété de représentation prévisible.* Soient $M \in \mathcal{H}^2$, et m la famille de coefficients de la décomposition chaotique de sa valeur terminale M_∞. On a

$$M_n = \sum_{\substack{A\in\mathcal{P}\\ \max A\leqslant n}} m_A \, \Delta X_A = m_\varnothing + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{A\in\mathcal{P}\\ \max A=k}} m_A \, \Delta X_{A\setminus\{k\}} \right) \Delta X_k .$$

En posant

$$H_k = \sum_{\substack{A\in\mathcal{P}\\ \max A=k}} m_A \, \Delta X_{A\setminus\{k\}},$$

on définit bien une suite prévisible, et on a bien $M - M_0 = H \cdot X$.

Il nous faut montrer que cette propriété se prolonge aux martingales de $\mathcal{H}^1$ puis ensuite aux martingales locales. Nous nous contentons d'en indiquer la preuve : le sous-espace de $\mathcal{H}^1$ formé par les intégrales stochastiques $H \cdot X$ est fermé, l'est aussi la somme directe de cet espace et de $\mathbb{R}$ (on rajoute les valeurs initiales) ; puisqu'il contient $\mathcal{H}^2$ qui est dense dans $\mathcal{H}^1$,[4] on en déduit qu'il est égal à $\mathcal{H}^1$. Considérons une martingale locale M nulle en 0. Elle est localement dans $\mathcal{H}^1$, c'est donc localement une intégrale stochastique, et, finalement, c'est une intégrale stochastique.

d) Faisons la comparaison avec le cas continu. Un processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale normale si c'est une martingale locale et si $X_t^2 - t$ définit une martingale locale, ou encore si $(X_t - X_0)_{t\geqslant 0}$ et $((X_t - X_0)^2)_{t\geqslant 0}$ sont des martingales. Étant données une telle martingale et une suite de fonctions de carré intégrable $f_k : \mathbb{R}_+^k \mapsto \mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^k$ (pour $k = 0$, f_0 est une constante et la mesure est la mesure de Dirac en l'élément ensemble vide),

$$M = f_0 + \int_{0<t_1} f_1(t_1) \, \mathrm{d}X_{t_1} + \cdots + \int_{0<t_1<\cdots<t_k} f_n(t_1, \ldots, t_k) \, \mathrm{d}X_{t_1} \ldots \mathrm{d}X_{t_k} + \cdots$$

4. DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.-A.), *Probabilités et potentiel*, Chapitres V à VIII, Hermann (1980), page 294.

définit une variable aléatoire de carré intégrable. Ici $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}_+^*$ et plus précisément la réunion disjointe des simplexes k-dimensionnels $\mathcal{P}_k = \{0 < t_1 < \cdots < t_k\}$ munis de la mesure de Lebesgue. Alors, se donner les restrictions aux simplexes de fonctions comme plus haut, c'est considérer $f \in L^2(\mathcal{P})$, et la série d'intégrales stochastiques multiples s'écrit

$$M = \int_{A\in\mathcal{P}} f(A)\,\mathrm{d}X_A.$$

Dans le cas de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{A\in\mathcal{P}} a_A\,\Delta X_A \\ &= a_\varnothing + \sum_{A\in\mathcal{P}_1} a_A\,\Delta X_A + \cdots + \sum_{A\in\mathcal{P}_k} a_A\,\Delta X_A + \cdots \\ &= a_\varnothing + \sum_{0<i_1} a_{i_1}\,\Delta X_{i_1} + \cdots + \sum_{0<i_1<\cdots<i_k} a_{\{i_1,\ldots,i_k\}}\,\Delta X_{i_1}\ldots\Delta X_{i_k} + \cdots \end{aligned}$$

L'analogie est donc pleine. Il y a bien entendu quelques difficultés supplémentaires dans le cas continu que nous n'avons pas évoquées : définition de l'intégrale stochastique, choix de versions prévisibles, associativité de l'intégrale... Elles sont traitées en détail dans le cinquième volume de *Probabilités et Potentiel*.

§ 4. Caractérisation des propriétés de représentation prévisible et chaotiques

Dans cette section nous allons caractériser les propriétés de représentation chaotique et prévisible pour des martingales indexées par $\mathbb{N}$.

Théorème. — (i) *Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale locale. Alors, X possède la propriété de représentation prévisible si et seulement si X_0 est déterministe, la filtration est la filtration naturelle de X et il existe une suite prévisible $(U_n^1, U_n^2)_{n\geqslant 1}$ telle que $\Delta X_n \in \{U_n^1, U_n^2\}$ presque sûrement, pour tout $n \geqslant 1$.*

(ii) *Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale normale. Alors, X possède la propriété de représentation chaotique si et seulement si X_0 est déterministe, la filtration est la filtration naturelle de X et il existe une suite prévisible $(U_n^1, U_n^2)_{n\geqslant 1}$ telle que $\Delta X_n \in \{U_n^1, U_n^2\}$ et $U_n^1 \neq U_n^2$ presque sûrement, et $\mathbb{P}\{\Delta X_n = U_n^i \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\} > 0$ presque sûrement, pour tout $n \geqslant 1$.*

L'énoncé de ce théorème signifie qu'il y a propriété de représentation prévisible si et seulement si la filtration est au plus dyadique, c'est-à-dire qu'on rajoute à chaque pas au plus un bit d'information, et qu'il y a propriété de représentation chaotique si et seulement si la filtration est dyadique, c'est-à-dire qu'on rajoute à chaque pas exactement un bit d'information. La formulation à l'aide de suites prévisibles se résume en disant que, sachant $\mathcal{F}_{n-1}$, ΔX_n prend au plus, respectivement exactement, deux valeurs distinctes.

Démonstration. — Supposons que la propriété de représentation prévisible ait lieu. Nous savons alors que X_0 est déterministe et que $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle.

Donnons une première démonstration de l'implication en supposant les accroissements ΔX_n de carré intégrable. Nous pouvons alors poser $V_n = \mathbb{E}[\Delta X_n^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}]$

et constater que $\Delta X_n^2 - V_n$ est l'accroissement d'une martingale. Du fait de la propriété de représentation prévisible, il existe une suite prévisible H telle que $\Delta X_n^2 - V_n = H_n \, \Delta X_n$ presque sûrement, pour tout $n \geqslant 1$. Les racines $\{U_n^1, U_n^2\}$ de cette équation du second degré sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et on a $\Delta X_n \in \{U_n^1, U_n^2\}$ presque sûrement, comme annoncé.

La démonstration générale de l'implication nous a été donnée par Marc Arnaudon. Raisonnons conditionnellement à $\mathcal{F}_{n-1}$, ce qui revient ici à remplacer $\mathcal{F}_{n-1}$ par une première tribu $\mathcal{G}_0$ essentiellement triviale, à considérer une seconde tribu $\mathcal{G}_1 = \sigma(\Delta X_1)$, et à montrer que si toutes les variables aléatoires ΔM_1 centrées $\mathcal{G}_1$-mesurables — elles correspondent à des accroissements de martingales — s'écrivent sous la forme $\Delta M_1 = c \, \Delta X_1$ pour un certain réel c alors ΔX_1 prend au plus 2 valeurs. Par contraposée, supposons que ΔX_1 prenne au moins 3 valeurs. Comme ΔX_1 est centrée,[5] on peut alors trouver $a < 0 < b$ tels que $p_1 = \mathbb{P}\{\Delta X_1 \in]-\infty, a]\} > 0$, $p_2 = \mathbb{P}\{\Delta X_1 \in]a, b]\} > 0$ et $p_3 = \mathbb{P}\{\Delta X_1 \in]b, +\infty[\} > 0$. En posant

$$\Delta M_1 = 0 \times \mathbb{1}_{\{\Delta X_1 \in]-\infty, a]\}} - p_3 \times \mathbb{1}_{\{\Delta X_1 \in]a,b]\}} + p_2 \times \mathbb{1}_{\{\Delta X_1 \in]b, +\infty[\}},$$

on obtient une variable aléatoire centrée qui ne peut pas être, par construction, un multiple de ΔX_1.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite prévisible $(U_n^1, U_n^2)_{n \geqslant 1}$ telle que $\Delta X_n \in \{U_n^1, U_n^2\}$ presque sûrement, pour tout $n \geqslant 1$. Soit M une martingale (l'extension aux martingales locales se faisant par localisation). Nous voulons montrer qu'il existe une suite prévisible H telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $\Delta M_n = H_n \, \Delta X_n$. Or, ΔM_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Il existe alors une application $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mesurable, telle que

$$\Delta M_n = f_n(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_n) \qquad \text{presque sûrement.}$$

Posons $F_n(x) = f_n(\Delta X_1, \ldots, \Delta X_{n-1}, x)$. On a donc

$$\Delta M_n \in \{F_n(U_n^1), F_n(U_n^2)\} \qquad \text{presque sûrement.}$$

Puisque seules, conditionnellement à $\mathcal{F}_{n-1}$, les valeurs en deux points de F_n nous intéressent, nous pouvons remplacer F_n par toute application affine $\widetilde{F}_n$, $\widetilde{F}_n(x) = A_n \, x + B_n$, avec A_n et B_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables, vérifiant

$$\widetilde{F}_n(U_n^1) = A_n \, U_n^1 + B_n = F_n(U_n^1),$$
$$\widetilde{F}_n(U_n^2) = A_n \, U_n^2 + B_n = F_n(U_n^2).$$

Puisque ΔM_n est l'accroissement d'une martingale,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[\Delta M_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[F_n(\Delta X_n) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\widetilde{F}_n(\Delta X_n) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[A_n \, \Delta X_n + B_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = A_n \, \mathbb{E}[\Delta X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] + B_n = B_n, \end{aligned}$$

— la dernière identité se justifiant en terme d'espérances conditionnelles généralisées. On en déduit que $\Delta M_n = A_n \, \Delta X_n$, ce qui prouve la réciproque.

Supposons maintenant la propriété de représentation chaotique. Puisque celle-ci implique la propriété de représentation prévisible, nous avons déjà une partie de la conclusion, notamment que conditionnellement à $\mathcal{F}_{n-1}$, ΔX_n prend au plus deux

---

5. Ceci serait probablement faux si nous n'étions pas dans un contexte discret. Il faut rappeler que ΔX_1 n'est que l'accroissement (conditionnel) d'une martingale locale.

valeurs. Mais puisque $\mathbb{E}[\Delta X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ et $\mathbb{E}[\Delta X_n^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] = 1$, on en déduit que conditionnellement à $\mathcal{F}_{n-1}$, ΔX_n prend exactement deux valeurs.

Réciproquement, supposons X_0 déterministe et fixons $n > 0$. La tribu $\mathcal{F}_n^X = \sigma\{\Delta X_k \,|\, 0 \leqslant k \leqslant n\} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P})$ comporte essentiellement 2^n atomes. Oublions les négligeables. Alors l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_n^X$ mesurables est un espace vectoriel de dimension 2^n. L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}_n^X, \mathbb{P})$ est alors au plus de dimension 2^n. Or l'espace $\mathcal{C}_n^k(X)$ est de dimension C_n^k, donc $\mathcal{C}_n(X)$ est de dimension 2^n et ainsi $\mathcal{C}_n(X) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_n^X, \mathbb{P})$.

Donnons une justification du passage à la limite sur n. L'espace $\mathcal{C}(X)$ est fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, \mathbb{P})$ puisque c'est l'image par une isométrie d'un espace de Banach donc lui-même sous-espace de Banach d'un espace de Banach. Soit M_∞ appartenant à l'orthogonal de $\mathcal{C}(X)$, alors M_∞ est orthogonale à $\mathcal{C}_n(X)$ et on en déduit que $M_n = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathcal{F}_n]$ est orthogonale à $\mathcal{C}_n(X)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_n^X, \mathbb{P})$:

$$0 = \mathbb{E}[M_\infty N_n] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[M_\infty N_n \,|\, \mathcal{F}_n]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathcal{F}_n] N_n\big] = \mathbb{E}[M_n N_n]$$

pour toute N_n dans $\mathcal{C}_n(X)$. Puisque $\mathcal{C}_n(X) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_n^X, \mathbb{P})$, on a $M_n = 0$. D'après les théorèmes de convergence des martingales, M_n tend vers M_∞ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, \mathbb{P})$. On en déduit que $M_\infty = 0$ et donc que $\mathcal{C}(X) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, \mathbb{P})$. □

§ 5. Autres questions

Chaoticité et marche de Bernoulli. — Que la filtration soit dyadique laisse à penser que le modèle de martingales discrètes possédant la propriété de représentation chaotique serait la marche de Bernoulli symétrique. Ceci est erroné de bien des points de vue.

Peut-on trouver une suite de variables aléatoires indépendantes engendrant une telle filtration ? Rappelons qu'alors on considère la probabilité fixée. Pour voir que c'est généralement impossible, il suffit de regarder le cas de deux tribus : soient A et B deux événements non indépendants, $\mathcal{G}_1 = \sigma\{A\} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ et $\mathcal{G}_2 = \sigma\{A, B\} = \{\varnothing, A, B, A^c, B^c, \ldots, \Omega\}$; on constate alors que les seuls $C \in \mathcal{G}_2$ indépendants de A et donc de $\mathcal{G}_1$ sont $\varnothing$ et Ω qui ne peuvent pas engendrer $\mathcal{G}_2$ à partir de $\mathcal{G}_1$.

Peut-on changer raisonnablement de probabilité pour obtenir une marche de Bernoulli ? Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété de représentation chaotique, les tribus $\mathcal{F}_n$ sont engendrées par des partitions croissantes à 2^n éléments. En attribuant à chaque élément d'une telle partition la probabilité $1/2^n$, on définit une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ de restriction à $\mathcal{F}_n$ équivalente à la restriction de $\mathbb{P}$. Le processus X n'est plus une martingale sous $\mathbb{Q}$, mais on peut facilement construire H prévisible tel que $H \cdot X$ soit une marche de Bernoulli sous $\mathbb{Q}$. Ce qui n'est pas raisonnable est qu'en général les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas équivalentes.

Itération de la propriété de représentation prévisible. — Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété de représentation prévisible, alors toute variable aléatoire M_n $\mathcal{F}_n$-mesurable se décompose sous la forme

$$M_n = \sum_{A\subset\{1,\ldots,n\}} m_A \, \Delta X_A,$$

avec $m_A \in \mathbb{R}$. On constate tout d'abord qu'une telle variable aléatoire prend au plus 2^n valeurs, qu'elle est alors intégrable. C'est donc la valeur terminale d'une martingale. Procédons par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité plus haut dit seulement que

M_0 est une constante. Soit $n \geqslant 1$ et supposons que pour tout $k < n$ la propriété soit vraie. Soit M_n une variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-mesurable. Par propriété de représentation prévisible,

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k \, \Delta X_k.$$

Chaque H_k étant $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurables, ils s'écrivent sous la forme

$$H_k = \sum_{A \subset \{1,\dots,k-1\}} h_A^k \, \Delta X_A.$$

D'où

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{A \subset \{1,\dots,k-1\}} h_A^k \, \Delta X_A \, \Delta X_k,$$

ce qui bien de la forme annoncée.

Il n'y a cependant pas de structure hilbertienne ni d'isométrie dans ce type de décomposition. Cependant, ces décompositions donnent l'occasion d'insister sur le fait (hautement non général !) que, lorsque X est une martingale normale indexée par $\mathbb{N}$, la propriété de représentation prévisible implique la propriété de représentation chaotique.

Encore d'autres questions. — J'aurais pu essayer de rédiger l'équivalence entre extrémalité de lois de martingales et propriété de représentation prévisible (*voir* le deuxième volume de *Probabilités et Potentiel*, p. 381), ou encore essayer de rédiger quelque chose sur les grossissements de filtrations au plus dyadiques en filtrations dyadiques, préciser qu'une filtration exactement dyadique est la filtration naturelle d'une martingale normale...

Remerciement. — Nous remercions Stéphane Laurent pour les commentaires et les corrections qu'il a apportés à cette note.

§ 6. Notices du Séminaire de Probabilités

Les notices bibliographiques qui suivent ont été récupérées sur le site du Séminaire de Probabilités :

`http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/semproba/index.shtml`

`http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/SemProba/SP3/index_kwd.html`

La requête portait sur le mot-clef « previsible representation ».

[805] Dellacherie (C.), « Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson », *Séminaire de Probabilités VIII*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This paper shows that the previsible representation property of Brownian motion and the (compensated) Poisson processes is a consequence of the Wiener and Poisson measures being unique solutions of martingale problems.
Comment. — A gap in the proof is filled in [928]. This is a very important paper, opening the way to a series of investigations on the relations between previsible representation and extremality. See Jacod-Yor, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **38**, 1977 and Yor [1221]. For another approach to the restricted case considered here, see Ruiz de Chavez [1821].

[906] CHOU (C.) and MEYER (P.), « Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels », *Séminaire de Probabilités IX*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — Dellacherie has studied in [405]the filtration generated by a point process with one single jump. His study is extended here to the filtration generated by a discrete point process. It is shown in particular how to construct a martingale which has the previsible representation property.
Comment. — In spite or because of its simplicity, this paper has become a standard reference in the field.

[928] DELLACHERIE (C.), « Correction "Intégrales stochastiques par rapport..." », *Séminaire de Probabilités IX*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This paper completes a gap in the simple proof of the previsible representation property of the Wiener and Poisson processes, given by Dellacherie [805].
Comment. — Another way of filling the same gap is given by Ruiz de Chavez [1821].

[1001] BRÉMAUD (P.), « La méthode des semi-martingales en filtrage quand l'observation est un processus ponctuel marqué », *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This paper discusses martingale methods (as developed by Jacod, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **31,** 1975) in the filtering theory of point processes.
Comment. — The author has greatly developed this topic in his book *Poisson Processes and Queues,* Springer 1981.

[1003] JACOD (J.) and MÉMIN (J.), « Un théorème de représentation des martingales pour les ensembles régénératifs », *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — The natural filtration of a regenerative set M is that of the corresponding "age process". There is a natural optional random measure μ carried by the right endpoints of intervals contiguous to M, each endpoint carrying a mass equal to the length of its interval. Let ν be the previsible compensator of μ. It is shown that, if M has an empty interior the martingale measure $\mu - \nu$ has the previsible representation property in the natural filtration.
Comment. — Martingales in the filtration of a random set (not necessarily regenerative) have been studied by Azéma in [1932]. In the case of the set of zeros of Brownian motion, the martingale considered here is the second "Azéma's martingale" (not the well known one which has the chaotic representation property).

[1017] MEYER (P.), « Un cours sur les intégrales stochastiques (6 chapters) », *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This is a systematic exposition of the theory of stochastic integration with respect to semimartingales, with the exception of stochastic differential equations. Chapter I is devoted to a quick exposition of the general theory of processes, and of the trivial stochastic integral with respect to a process of finite variation. Chapter II is the Kunita-Watanabe theory of square integrables martingales, angle and square bracket, stable subspaces, compensated sums of jumps, and the corresponding L^2 theory of stochastic integration. Chapter III studies a restricted class of semimartingales and introduces the Ito formula, with its celebrated applications due to Watanabe, to Brownian motion and the Poisson process. Chapter IV localizes the theory and gives the general definitions of semimartingales and special semimartingales, and studies the stochastic exponential, multiplicative decomposition. It also sketches a theory of multiple stochastic integrals. Chapter V deals with the application of the spaces H^1 and BMO to the theory of stochastic integration, and to martingales inequalities (it contains the extension to continuous time

of Garsia's "Fefferman implies Davis implies Burkholder" approach). Chapter VI contains more special topics: Stratonovich integrals, Girsanov's theorem, local times, representation of elements of BMO.
Comment. — This set of lectures was well circulated in its time, an intermediate stage between a research paper and a polished book form. See also [1131]. Now the material can be found in many books.

[1135] Yor (M.), « Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques », *Séminaire de Probabilités XI*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — The main result on the relation between the previsible representation property of a set of local martingales and the extremality of their joint law appeared in a celebrated paper of Jacod-Yor, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **38**, 1977. Several concrete applications are given here, in particular a complete proof of a "folklore" result on the representation of local martingales of a Lévy process, and a discussion of the commutation problem of [1123].
Comment. — This is an intermediate paper between the Jacod-Yor results and the definitive version of previsible representation, using the theorem of Douglas, for which see [1221].

[1221] Yor (M.) and Sam lazaro (J.), « Sous-espaces denses dans L^1 ou H^1 et représentation des martingales », *Séminaire de Probabilités XII*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This paper was a considerable step in the study of the general martingale problem, i.e., of the set $\mathcal{P}$ of all laws on a filtered measurable space under which a given set $\mathcal{N}$ of (adapted, right continuous) processes are local martingales. The starting point is a theorem from measure theory due to R.G. Douglas (*Michigan Math. J.* 11, 1964), and the main technical difference with preceding papers is the systematic use of stochastic integration in H^1. The main result can be stated as follows: given a law $P \in \mathcal{P}$, the set $\mathcal{N}$ has the previsible representation property, i.e., $\mathcal{F}_0$ is trivial and stochastic integrals with respect to elements of $\mathcal{N}$ are dense in H^1, if and only if P is an extreme point of $\mathcal{P}$. Many examples and applications are given.
Comment. — The second named author's contribution concerns only the appendix on homogeneous martingales.

[1329] Jeulin (T.) and Yor (M.), « Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis », *Séminaire de Probabilités XIII*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — The main purpose of this paper is to warn against "obvious" statements which are in fact false. Let $(\mathcal{G}_t)$ be an enlargement of $(\mathcal{F}_t)$. Assume that $\mathcal{F}$ has the previsible representation property with respect to a martingale X which is a $\mathcal{G}$-semimartingale. Then it does not follow that every $\mathcal{F}$-martingale Y is a $\mathcal{G}$-semimartingale. Also, even if Y is a $\mathcal{G}$-semimartingale, its $\mathcal{G}$-compensator may have bad absolute continuity properties. The counterexample to the first statement involves a detailed study of the initial enlargement of the filtration of Brownian motion $(B_t)_{t \leqslant 1}$ by the random variable B_1, which transforms it into the Brownian bridge, a semimartingale. Then the stochastic integrals with respect to B which are $\mathcal{G}$-semimartingales are completely described, and this is the place where the classical Hardy inequality appears.
Comment. — None.

[1540] Stroock (D.) and Yor (M.), « Some remarkable martingales », *Séminaire de Probabilités XV*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This is a sequel to a well-known paper by the authors (*Ann. ENS,* **13**, 1980) on the subject of pure martingales. A continuous martingale (M_t) with $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ is pure if the time change which reduces it to a Brownian motion (B_t) entails no loss of information, i.e., if M is measurable w.r.t. the σ-field generated by B. The first part shows the purity of certain stochastic integrals. Among the striking examples considered, the sto-

chastic integrals $\int_0^t B_s^n dB_s$ are extremal for every integer n, pure for n odd, but nothing is known for n even. A beautiful result unrelated to purity is the following: complex Brownian motion Z_t starting at z_0 and its (Lévy) area integral generate the same filtration if and only if $z_0 \neq 0$.
Comment. — None.

[1541] Lépingle (D.), Meyer (P.) and Yor (M.), « Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales purement discontinues », *Séminaire de Probabilités XV*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This paper consists roughly of two parts. First, the study of a filtration in which all martingales are purely discontinuous, and jump on a given well-ordered optional set. Then under a simple separability assumption, one can construct one single martingale which generates the filtration. The second part deals with the same problem as in [1540], but replacing continuous martingales by purely discontinuous martingales with unit jumps, and Brownian motion by a Poisson process. It is shown that the situation is much simpler, purity and extremality being equivalent in this case.
Comment. — None.

[1542] Itmi (M.), « Processus ponctuels marqués stochastiques. Représentation des martingales et filtration naturelle quasicontinue gauche », *Séminaire de Probabilités XV*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — This paper contains a study of the filtration generated by a point process (multivariate: taking values in a Polish space), and in particular of its quasi-left continuity, and previsible representation.
Comment. — None.

[1618] Stricker (C.), « Les intervalles de constance de $\langle X, X\rangle$ », *Séminaire de Probabilités XVI*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — For a continuous (local) martingale X, the constancy intervals of X and $\langle X, X\rangle$ are exactly the same. What about general local martingales? It is proved that X is constant on the constancy intervals of $\langle X, X\rangle$, and the converse holds if X has the previsible representation property.
Comment. — None.

[1630] He (S.) and Wang (J.), « The total continuity of natural filtrations », *Séminaire de Probabilités XVI*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
Description. — Total continuity of a filtration $\mathcal{F}$ means that $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$ at every stopping time T, not necessarily previsible. It is shown that the filtration of a Lévy process without fixed discontinuities is totally continuous if and only if the jump size is a deterministic function of the jump time. Similarly, the natural filtration of a quasi-left continuous jump process is totally continuous if and only if the size of the n-th jump is a deterministic function of the jump times up to the n-th. It is shown that under the usual (here called "strong") previsible representation property, quasi-left continuity of the filtration implies total continuity.
Comment. — None.

Département de Mathématiques
Téléport 2 – BP 30179
Boulevard Marie et Pierre CURIE
86 962 Futuroscope Chasseneuil cedex
phan@mathlabo.univ-poitiers.fr