FORMES DE DIRICHLET ET OPÉRATEUR CARRÉ DU CHAMP

Anthony Phan

Introduction

La théorie des processus de Markov en temps continu et plus particulièrement de Feller est généralement basée sur la théorie de Hille–Yosida qui est une théorie banachique et pour laquelle, dans la pratique, l'espace des états est un espace topologique séparé localement compact à base dénombrable (LCCB) et l'espace fonctionnel au dessus de celui-ci est celui des fonctions continues nulles à l'infini dont le dual est l'ensemble des mesures de Radon sur l'espace d'état muni de sa tribu borélienne.

Il arrive assez fréquemment qu'une fonction de transition, féllerienne, $(P_t)_{t\geqslant 0}$ admette une mesure invariante qui soit de Radon, c'est-à-dire finie sur les compacts de E. Dans ce cas, il est tentant d'abandonner l'approche banachique pour une approche hilbertienne, c'est-à-dire de considérer pour espace fonctionnel $L^2(E,\mathcal{E},\mu\,;\mathbb{R})$ (ou $L^2(E,\mathcal{E},\mu\,;\mathbb{C})$), où $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne de E et μ une telle mesure invariante — qui n'est qu'assez rarement une mesure finie. C'est l'approche à la Lumer–Philips et elle conduit à considérer ce qui est appelé forme de Dirichlet.

Dans cette note nous restons dans le cadre de la théorie de Lumer–Philips, où la donnée de départ est le générateur, pour examiner comment apparaît très naturellement son opérateur carré du champ lorsqu'on considère la forme de Dirichlet associée.

1. Généralités

Soient $\Bbbk=\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, et $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré, l'espace des états. Considérons un opérateur non borné $(A,\operatorname{Dom}A)$ à domaine dense sur $L^2(E,\mathcal{E},\mu\,;\Bbbk)$ dissipatif :

$$\operatorname{Re}\langle f,Af\rangle_\mu=\operatorname{Re}\int_E \bar f(x)Af(x)\,\mu(\mathrm{d}x)\leqslant 0\qquad\text{pour tout } f\in\operatorname{Dom}A.$$

Nous notons A^* l'opérateur adjoint de A dans $L^2(E,\mathcal{E},\mu\,;\Bbbk)$. L'opérateur A étant dense et dissipatif, il est fermable (*voir* [1], Chap. XIII, n° 13), ce qui équivaut au fait que $\operatorname{Dom}A^*$ est dense.

Définissons une forme bilinéaire B (ou hermitienne si $\Bbbk=\mathbb{C}$) par

$$\begin{aligned}B:\operatorname{Dom}A\times\operatorname{Dom}A&\longrightarrow\Bbbk\\(f,g)&\longmapsto\langle f,-Ag\rangle_\mu.\end{aligned}$$

Cette forme bilinéaire B est la forme de Dirichlet associée à $(A,\operatorname{Dom}A)$. Posons $\operatorname{Dom}\Gamma=\{(f,g)\in\operatorname{Dom}A\times\operatorname{Dom}A\,:\,\bar f g\in\operatorname{Dom}A,\text{ et }A(\bar f g)\in L^1(E,\mathcal{E},\mu\,;\Bbbk)\}$ et, pour $(f,g)\in\operatorname{Dom}\Gamma$,

$$\Gamma(f,g)=\frac{1}{2}\big(A(\bar f g)-A\bar f\times g-\bar f\times Ag\big)$$

qui est alors, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, dans $L^1(E, \mathcal{E}, \mu\,; \Bbbk)$. L'opérateur $(\Gamma, \operatorname{Dom}\Gamma)$ est l'opérateur carré du champ de $(A, \operatorname{Dom} A)$. Finalement, posons

$$\operatorname{Dom}_0 \Gamma = \left\{ (f,g) \in \operatorname{Dom}\Gamma : \int_E A(\bar{f}g)(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = 0 \right\}.$$

Alors si $(f,g) \in \operatorname{Dom}_0 \Gamma$,

$$\begin{aligned} B(f,g) = \langle f, -Ag\rangle_\mu &= \int_E -\bar{f}(x)Ag(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_E \big(2\Gamma(f,g)(x) - A(\bar{f}g)(x) + A\bar{f}(x)g(x)\big)\,\mu(\mathrm{d}x). \\ &= \int_E \big(2\Gamma(f,g)(x) + A\bar{f}(x)g(x)\big)\,\mu(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $(f,g) \in \operatorname{Dom}_0 \Gamma$, et comme $A\bar{f} = \overline{Af}$,

$$2\int_E \Gamma(f,g)(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \langle f, -Ag\rangle_\mu + \langle -Af, g\rangle_\mu. \tag{1}$$

Si de plus $g \in \operatorname{Dom} A^*$, on obtient immédiatement que

$$\int_E \Gamma(f,g)(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \left\langle f, -\frac{A + A^*}{2}\, g \right\rangle_\mu \tag{2}$$

En particulier lorsque l'opérateur $(A, \operatorname{Dom} A)$ est symétrique, c'est-à-dire lorsque $\operatorname{Dom} A \subset \operatorname{Dom} A^*$ et A et A^* coïncident sur $\operatorname{Dom} A$, on a

$$\int_E \Gamma(f,g)(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \langle f, -Ag\rangle_\mu = B(f,g). \tag{3}$$

Notons que lorsque $\Bbbk = \mathbb{R}$ le signe de conjugaison complexe peut être oublié.

2. **Situation courante**

La situation courante est celle où on part d'une fonction de transition $(P_t)_{t\geqslant 0}$ sur un espace topologique LCCB E admettant une mesure invariante de Radon μ. Alors $(P_t)_{t\geqslant 0}$ induit un semi-groupe sur $L^2(E, \mathcal{E}, \mu \;\; \mathbb{R})$. Le générateur étendu est défini à l'aide des résolvantes dans l'ensemble des fonctions universellement mesurable de E et son domaine est une algèbre dès qu'il contient une algèbre pleine (par exemple une algèbre de fonctions régulières). Dans ce cas les différents domaines dans $L^2(E, \mathcal{E}, \mu \;\; \mathbb{R})$ rencontrées précédemment contiennent un même sous-espace dense et les égalités (1) et (2) sont valides sur un espace de fonctions assez large.

L'exemple usuel consiste à regarder le brownien linéaire (ou euclidien). La mesure μ est alors la mesure de Lebesgue, et la relation (3) est une intégration par parties élémentaire.

Références

[1] Dellacherie (C.) & Meyer (P.-A.), *Probabilités et Potentiel*, Chapitres xii à xiv, Hermann (1987).

[2] Meyer (P.-A.), « Inégalités de Littlewood–Paley 'harmoniques' pour des semi-groupes généraux », *Séminaire de Probabilités* (1974/75).

[3] Meyer (P.-A.), « Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood–Paley. Exposé II : l'opérateur carré du champ », *Séminaire de Probabilités* (1974/75).