QUELQUES JOLIS PETITS MONSTRES

Introduction

Le mot français « monstre » provient du verbe latin *mŏnĕo, ŭi, ĭtum, ēre* qui signifie, entre autres, annoncer, avertir. À la fin du XIX^{e} siècle quelques objets imprévus furent découverts : l'ensemble de Cantor, la courbe de Péano, etc. Ceux-ci allaient apporter un grand trouble dans la communauté mathématique mais surtout constituer une planche d'appel vers les mathématiques du XX^{e} siècle, en particulier vers la topologie et la théorie descriptive des ensembles telles qu'elles ont été étudiées par l'école polonaise (*voir* Kuratowski [1]), et vers la théorie abstraite de la mesure due principalement à Lebesgue — sans oublier notre cher, feu, ministre de la Marine Émile Borel. Ces objets qui furent au départ considérés comme effrayants entrèrent dans le Panthéon esthétique des mathématiciens. Avec eux vinrent les trajectoires browniennes (*voir* Perrin [4]), les ensembles de Fatou–Julia, et Mandelbrot, etc. Dans les Années 80 (du XX^{e} siècle), grâce aux progrès de l'imagerie informatique, le grand public accéda à ces formes pour lui nouvelles (*voir* Mandelbrot [2], Peitgen–Richter [3]). Elles étaient, comme tout ce qui est séduisant, un peu terrifiantes. Actuellement, ces images sont devenues banales : elles font partie des formes auxquelles nous sommes, ou devrions être, couramment habitués. Faire une petite revue de certaines de ces images et des objets mathématiques qu'elles représentent n'est pas nécessairement inutile.

§ 1. Quelques ensembles lacunaires

1.1. *L'ensemble tryadique de Cantor.* — Dans $\mathbb{R}$ nous savons que tout ouvert est la réunion d'une liste au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Les ouverts ont donc une description extrèmement simple. Que dire des fermés qui ne sont jamais que des complémentaires d'ouverts ? Nous pourrions croire qu'il existe une description directe des ensembles fermés aussi simple que celle des ouverts. De plus, tout fermé est l'image réciproque de $\{0\}$ par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (considérer pour $F \subset \mathbb{R}$ fermé la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \inf\{z \in F : |x - z|\}$ qui est la fonction distance à ce fermé). Si on a d'une fonction continue l'image régulière d'une courbe tracée à la craie sur un tableau noir, un ensemble fermé ne devrait être que la réunion disjointe de points isolés et d'intervalles fermés. Mais la réalité est bien plus complexe : un ensemble fermé peut contenir des sous-intervalles fermés, des points isolés, des points d'accumulation de points isolés, des points d'accumulation de points d'accumulation de points isolés, etc.

Un exemple à la fois simple et merveilleux (peut-être par sa simplicité) est l'ensemble tryadique de Cantor. Notons $C_0 = [0, 1]$ l'intervalle unité. Nous définissons C_1 comme l'intersection des fermés C_0 et $]1/3, 2/3[^c$ qui est encore un fermé compact, c'est-à-dire que nous enlevons à C_0 son sous-intervalle ouvert central de longueur tiers de celle de C_0. L'ensemble C_1 est la réunion de deux intervalles fermés de longueur $1/3$ auxquels nous enlevons leurs sous-intervalles ouverts centraux de longueur tiers pour obtenir C_2. Nous poursuivons ainsi pour obtenir la suite $(C_n)_{n\geqslant 0}$

décroissante d'ensembles fermés bornés, donc compacts, et non vides. Leur intersection $C_\infty = \bigcap_{n\geqslant 0} C_n$ est donc un ensemble compact non vide : c'est l'*ensemble tryadique de Cantor*.

FIG. 1. — Construction de l'ensemble de Cantor

Il est immédiat que la mesure de Lebesgue (longueur totale) de C_n est $(2/3)^n$ ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, *la mesure de* C_∞, qui est la limite de celles des $(C_n)_{n\geqslant 0}$, *est nulle*. On peut voir que C_∞ est *totalement discontinu*, c'est-à-dire que pour tous x, $y \in C_\infty$, $[x, y] \not\subset C_\infty$. En effet il y a toujours un rang dans la construction où on enlève un intervalle dans l'intérieur de $[x, y]$.

Précisons ce qu'est C_∞. Pour $x \in [0, 1]$ nous notons $(x_n)_{n\geqslant 0} \subset \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ son expansion usuelle en base 3, c'est-à-dire que $x = \sum_{n\geqslant 0} x_n/3^n$ et que $x_0 = \operatorname{ent} x$, et pour $n \geqslant 1$, $x_n = \operatorname{ent}(3 \operatorname{frac}(3^{n-1}x))$, et qu'ainsi à 1 correspond la suite $(1, 0, 0, 0, \ldots)$, à $1/3$ la suite $(0, 1, 0, 0, \ldots)$, à $2/3$ la suite $(0, 2, 0, 0, \ldots)$, etc. Alors C_∞ est l'ensemble des réels de l'intervalle $[0, 1]$ qui, ou bien ne comportent pas de 1 dans leur expansion $(x_n)_{n\geqslant 0}$, ou bien n'en comporte qu'un seul suivi uniquement de 0. Notamment, on a $C_\infty \supset \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$. À l'aide de cette propriété il est facile de voir que C_∞ *est sans point isolé* et que *son cardinal est la puissance du continu*.

1.2. *Quelques autres ensembles lacunaires.* — Ci-dessous nous présentons quelques exemples bi et tri-dimensionnels qui satisfont des propriétés semblables à l'ensemble de tryadique Cantor — hormis que ceux-ci sont connexes (par arcs). Tous ces ensembles sont dits *lacunaires* car « pleins de vide ».

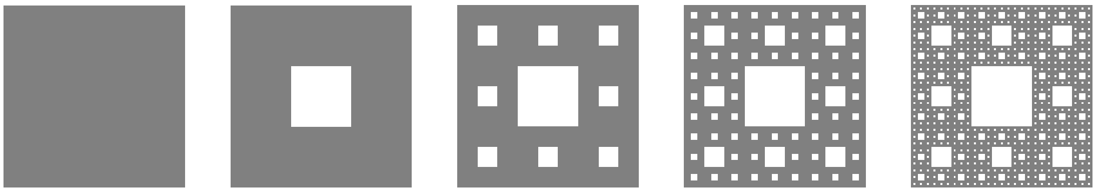

FIG. 2. — Sierpiński carpet

FIG. 3. — Sierpiński gasket

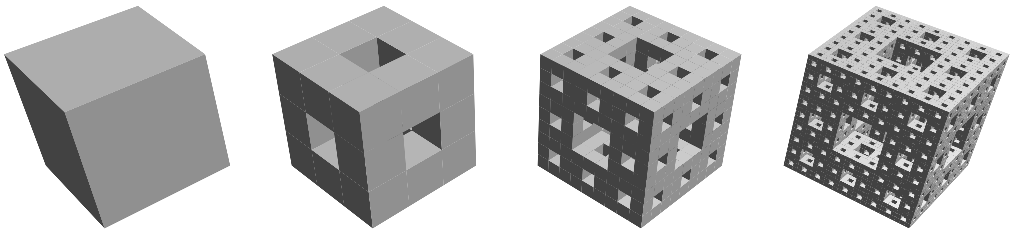

FIG. 4. — Sierpiński–Menger sponge

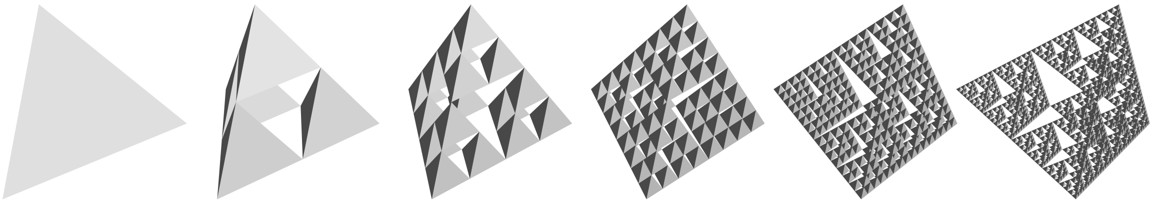

FIG. 5. — Sierpiński–Menger gasket

§ 2. Quelques courbes pas très lisses

En 1861, Weierstrass donne le premier exemple de fonction continue nulle part dérivable. La fonction est donnée par la somme d'une série de Fourier

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} b^n \cos(a^n \pi x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

où a et b sont deux réels strictement positifs fixés vérifiant $b < 1$ et $ab > 1 + 3\pi/2$. Une foule d'autres fonctions aux propriétés non moins suprenantes (pour le mathématicien du XIX$^{\text{e}}$ siècle) allaient être découvertes.

2.1. *Courbes de von Koch.* — La courbe de von Koch (1902) est construite comme suit : on part d'un motif affine par morceaux, qui est la courbe initiale, et à chaque rang on remplace les segments de la courbe par le motif.

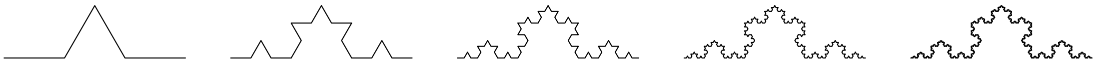

FIG. 6. — Construction de la courbe de von Koch

Cette construction pourrait être décrite de manière fonctionnelle — comme définition d'une suite de fonctions affines par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ —, ce qui permettrait de constater que la suite de fonctions correspondante est uniformément de Cauchy et donc converge vers une fonction continue (la condition clef étant que la longueur des arêtes du motif doient être strictement inférieures à 1). Évidement la fonction limite n'est nulle part dérivable (ou encore, la courbe limite n'admet de tangente en aucun de ses points), et on peut constater que sa longueur est infinie.

Une figure bien agréable est obtenue en recopiant la courbe de von Koch sur les trois côtés d'un triangle équilatéral :

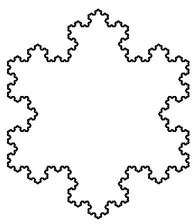

FIG. 7. — Flocon de neige

c'est le flocon de neige de von Koch.

2.2. *Courbes de Péano.* — De nombreuses courbes « à la von Koch » peuvent être obtenues en changeant simplement le motif qui est itéré. Pour la courbe de péano, ce motif peut être décrit de la manière suivante :

```
(0,0)--(1/3,0)--(1/3,1/3)--(2/3,1/3)--(2/3,0)
                 --(1/3,0)--(1/3,-1/3)--(2/3,-1/3)--(2/3,0)--(1,0).
```

Après quelques itérations on obtient apparemment un remplissage presque complet d'un carré dans le plan :

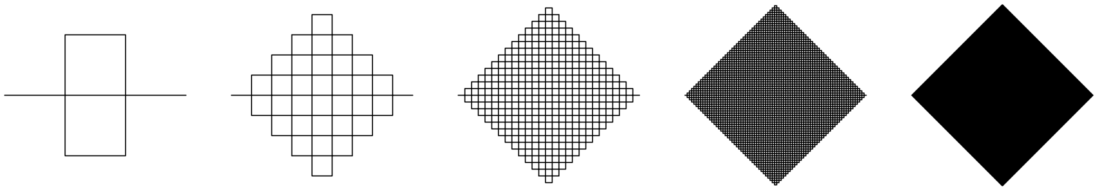

Fig. 8. — Construction de la courbe de Péano

Ce remplissage est bien réel. Vu de manière fonctionnelle, cela correspond à une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la limite — qui est toujours une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ — a pour image le carré en question.

Ce qui est pour le moins troublant est que la dimension topologique de l'espace de départ est 1 et celle de son image est 2. Si on part du principe selon lequel la dimension de l'image est inférieure ou égale à celle de l'espace de départ, on aboutit à une flagrante contradiction ! En fait une des principales propriétés que ne satisfait pas cette fonction limite est l'injectivité. Elle ne saurait être alors un homéomorphisme sur son image — qui sont des applications préservant la dimension.

Références

[1] Kuratowski (C.), *Topologie I*, quatrième édition, Polska Akad. Nauk (1958).

[2] Mandelbrot (B.), *Les objets fractals*, troisième édition, Flammarion (1989).

[3] Peitgen (O.-H.), Richter (P. H.), *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag (1986).

[4] Perrin (J.), *Les atomes*, réédition, Champs, Flammarion (1991).

[5] Peterson (I.), *The Mathematical Tourist*, W. H. Freeman and Company (1988).