LOIS DE PROBABILITÉ USUELLES

Dans cette note est faite une liste des lois de probabilité usuelles sur $\mathbb{R}$ — voire $\mathbb{R}^n$ — ou sur une de ses sous-parties ainsi que quelques unes de leurs propriétés (moyenne, variance, fonction caractéristique). Qualifier ces lois de probabilité d'usuelles signifie qu'elles doivent être connues de tous et non qu'elles seraient *les seules* qu'on puisse rencontrer dans un problème, un exercice et surtout dans une situation concrète. De nombreuses propriétés sont données sans démonstration. Elles peuvent être traitées en exercice.

1. **Lois discrètes usuelles**

1.1. Mesures de Dirac

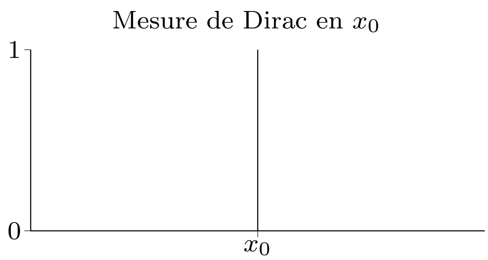
Définition 1. — Soient $(E, \mathcal{E})$ un ensemble mesurable et $x_0 \in E$ un point. L'application

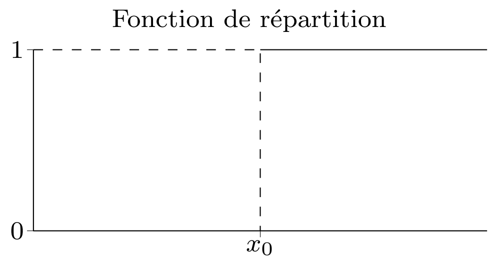
$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{E} &\longrightarrow \{0,1\} \\ B &\longmapsto \mu(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in B, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. Si le singleton $\{x_0\}$ est mesurable, l'application μ est alors dite *mesure de Dirac* en x_0, ou encore *masse de Dirac* en x_0, et est notée $\delta_{\{x_0\}}$ (la notation $\varepsilon_{\{x_0\}}$ est aussi souvent employée).

Une variable aléatoire X de loi la mesure de Dirac en $x_0 \in E$ est presque sûrement constante égale à x_0 et récipoquement : $P_X\{x_0\} = \mathbb{P}\{X = x_0\} = 1$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[X] = x_0, \qquad \mathrm{Var}(X) = 0, \qquad \varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\big[e^{i\theta X}\big] = e^{i\theta x_0}.$$





On pourra prendre pour définition :

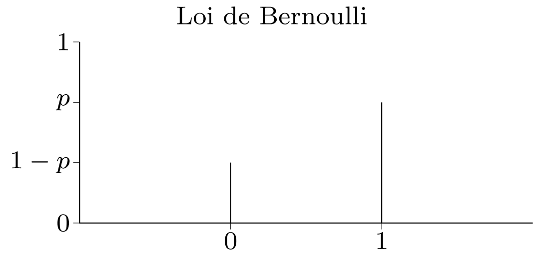
Définition. — Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable séparé (tous les singletons sont mesurables). Toute loi discrète sur $(E, \mathcal{E})$ est combinaison barycentrique finie ou dénombrable de mesures de Dirac.

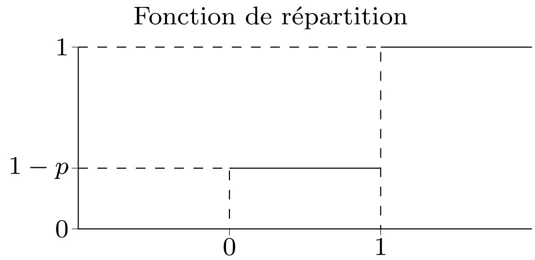
1.2. Lois de Bernoulli

Définition 2. — Soit $p \in [0,1]$. On appelle *loi de Bernoulli* de paramètre p la loi de probabilité discrète μ de support $\{0,1\}$ vérifiant

$$\mu\{0\} = 1 - p \qquad \text{et} \qquad \mu\{1\} = p.$$

Soit $\mu = (1-p)\delta_{\{0\}} + p\delta_{\{1\}}$. Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{B}(1,p)$.





Une variable aléatoire X de loi la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ est presque sûrement l'indicatrice de l'événement $\{X = 1\}$. Réciproquement, l'indicatrice d'un événement $A \in \mathcal{A}$ a pour loi la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Si X est une variable aléatoire de loi la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, alors elle admet des moments à tout ordre et on a :

$$\mathbb{E}[X^n] = p \qquad \text{pour tout } n > 0, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

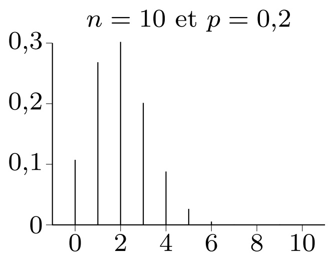
La fonction caractéristique de X est $\varphi_X(\theta) = 1 - p + p\exp(\mathrm{i}\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

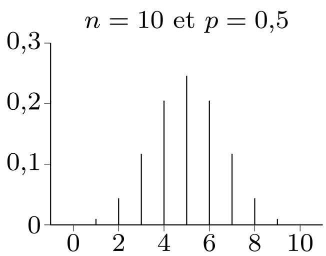
1.3. Lois binomiales

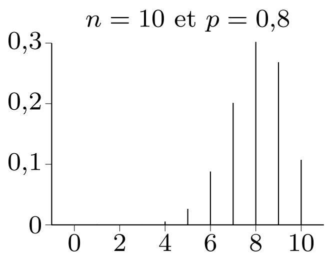
Définition 3. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On appelle *loi binomiale* de paramètres n et p la loi de probabilité discrète μ de support $\{0,1,\ldots,n\}$ vérifiant

$$\mu\{k\} = \begin{cases} C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} & \text{pour } k \in \{0,1,\ldots,n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mu = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \delta_{\{k\}}$. Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{B}(n,p)$.







Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes de loi $\mathcal{B}(1,p)$. Leur somme $X = X_1 + \cdots + X_n$ a pour loi la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Il est facile de calculer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique d'une telle somme. Comme celles-ci ne dépendent que de la loi de X, on en déduit que si la loi d'une variable aléatoire X est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{E}[X] = np, \qquad \operatorname{Var}(X) = np(1-p), \qquad \varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\big] = \big(1 - p + p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^n.$$

On pourrait aussi obtenir ces formules en se servant directement de l'expression de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Le contexte usuel d'apparition de cette loi est le suivant : considérons une suite de n épreuves indépendantes (de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ chacune ayant 2 issues (valeurs) possibles $\{0,1\}$ (ou {échec, succès}) de probabilités respectives $1-p$ et p. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre total de succès (ou d'occurrences du nombre 1). La loi de X est alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Proposition. — *Soient m, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$, et X, Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. Alors leur somme $X+Y$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(m+n,p)$.*

Démonstration. — Pour démontrer cette proposition le plus rapide est de calculer la fonction caractéristique de $X+Y$:

$$\varphi_{X+Y}(\theta) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X+Y)}\big] = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Y}\big] = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\big] \times \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta Y}\big] = \varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta)$$

par indépendance de X et de Y. Ainsi

$$\varphi_{X+Y}(\theta) = \big(1-p+p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^m \big(1-p+p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^n = \big(1-p+p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^{m+n}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$. On en déduit que $X+Y$ a pour loi $\mathcal{B}(n+m,p)$. □

Remarque. — Cette proposition s'étend immédiatement à la somme d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n_i,p)$ (avec le même p pour toutes ces lois !). L'interprétation d'une loi binomiale en terme de distribution du nombre des succès au cours d'une séquence d'épreuves éclaire ce résultat.

1.4. Lois multinomiales

Définition 4. — Soient d, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1,\dots,p_d \in [0,1]$. On appelle *loi multinomiale* de paramètres n et $p_1,\dots,p_d$ la loi de probabilité discrète μ de support $\{(n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{N}^d : n_1+\cdots+n_d = n\}$ — qui est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^d$ et donc de $\mathbb{R}^d$ — vérifiant

$$\mu\{(n_1,\dots,n_d)\} = \begin{cases} \dfrac{n\,!}{n_1\,!\dots n_d\,!}\, p_1^{n_1} \times \cdots \times p_d^{n_d} & \text{pour } (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{N}^d \\ & \text{tel que } n_1+\cdots+n_d = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{M}(n,p_1,\dots,p_d)$.

Le contexte usuel d'apparition de cette loi est le suivant : considérons une suite de n épreuves indépendantes (de n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ chacune ayant d issues (valeurs) possibles $\{e_1,\dots,e_d\}$ de probabilités respectives $p_1,\dots,p_d$. Soit X le vecteur d-dimensionnel dont les coordonnées comptent le nombre d'occurrences des issues correspondantes. La loi de X est alors la loi multinomiale $\mathcal{M}(n,p_1,\dots,p_d)$.

On constate ainsi d'une part que les lois multinomiales sont les généralisations à plus de 2 issues possibles des lois binomiales, d'autre part que les lois multinomiales apparaissent naturement en Statistique : les n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont un échantillon d'une loi discrète à support fini, le vecteur X est alors celui des effectifs empiriques.

On remarque que dans ce cas, la k-ième coordonnée de X s'écrit

$$X^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i = e_k\}}$$

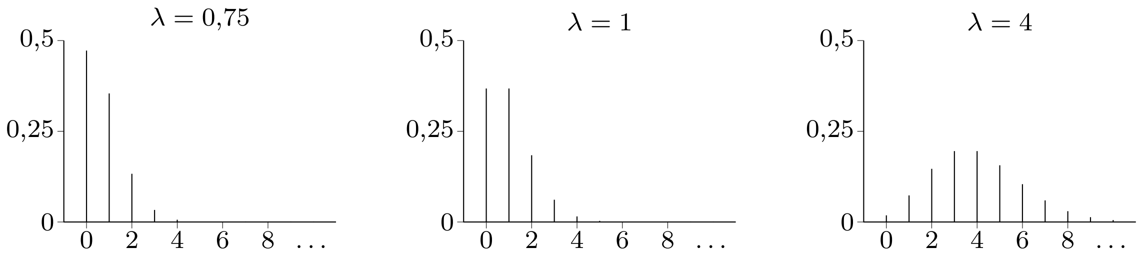
qui est une somme de variables aléatoires indépendantes de loi la loi de Bernoulli de paramètre p_k, et dont la loi est donc la loi $\mathcal{B}(n,p_k)$. Nous ne nous étenderons pas plus sur ces lois qui sont des lois de vecteurs aléatoires (l'espérance est un vecteur, la variance est une matrice [de covariance]) et pour lesquelles le théorème central limite (de Moivre–Laplace) multidimensionnel peut s'appliquer.

1.5. Lois de Poisson

Définition 5. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On appelle *loi de Poisson* de paramètre λ la loi de probabilité discrète μ de support $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\mu\{n\} = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n\,!} & \text{pour } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mu = \sum_{n\geqslant 0} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n\,!}\,\delta_{\{n\}}$. Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{P}(\lambda)$.



Le calcul des moments d'une loi de Poisson de paramètre λ se fait assez aisément en regardant les expressions à calculer comme des séries entières en λ mais encore plus facilement en réduisant des fractions... Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on montre que

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda, \qquad \varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\big[e^{i\theta X}\big] = e^{\lambda(\exp(i\theta)-1)}.$$

Les lois de Poisson apparaissent dans des questions d'approximation de lois binomiales pour n grand (tendant vers l'infini) et np (ou encore $n(1-p)$) voisin d'une valeur fixe finie λ (*voir* une section de cours sur la convergence en loi). Elles apparaissent aussi dans la théorie des files d'attente : considérons $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ (*voir* section suivante) ; soient $t > 0$ et

$$X_t = \max\{n \in \mathbb{N} : T_1 + \cdots + T_n \leqslant t\}\,;$$

alors on peut montrer que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre λt. Typiquement, T_n représente le temps d'attente entre le passage de la $(n-1)$-ième et la n-ième voiture à un péage et X_t le nombre de voitures qui sont déjà passées à la date t.

Proposition. — *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ pour λ, $\mu \in \mathbb{R}_+$. Alors leur somme $X+Y$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.*

Démonstration. — Pour démontrer cette proposition le plus rapide est de calculer la fonction caractéristique de $X+Y$:

$$\varphi_{X+Y}(\theta) = \mathbb{E}\big[e^{i\theta(X+Y)}\big] = \mathbb{E}\big[e^{i\theta X}\times e^{i\theta Y}\big] = \mathbb{E}\big[e^{i\theta X}\big]\times\mathbb{E}\big[e^{i\theta Y}\big] = \varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta)$$

par indépendance de X et de Y. Ainsi

$$\varphi_{X+Y}(\theta) = e^{\lambda(\exp(i\theta)-1)}\,e^{\mu(\exp(i\theta)-1)} = e^{(\lambda+\mu)(\exp(i\theta)-1)}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On en déduit que $X+Y$ a pour loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. $\square$

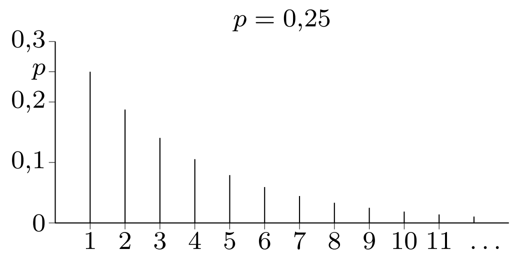
Remarque. — Cette proposition s'étend immédiatement à la somme d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_i)$.

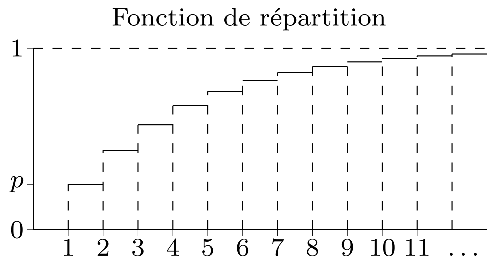
1.6. Lois géométriques

Définition 6. — Soit $p \in]0,1]$. On appelle *loi géométrique* de paramètre p la loi de probabilité discrète μ de support $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\mu\{n\} = \begin{cases} p(1-p)^{n-1} & \text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mu = \sum_{n \geqslant 1} p(1-p)^{n-1}\, \delta_{\{n\}}$. Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{G}(p)$.





Le calcul des moments d'une loi géométrique de paramètre p se fait assez aisément en regardant les expressions à calculer comme des séries entières en $(1-p)$ et en utilisant l'identité géométrique. Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$, on montre que si $p \in]0,1]$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \qquad \varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\big] = \frac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-(1-p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

Ces lois apparaissent dans la situation suivante (schéma de Bernoulli infini) : considérons une suite infinie $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(1,p)$ et soit

$$X = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 1\}\,;$$

alors la loi de X est la loi géométrique de paramètre p — on l'interprète comme étant le premier rang d'apparition d'un succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli.

Remarques. — *a*) Les lois géométriques sont parfois appelées lois de Pascal (Blaise). Hélàs !, certains auteurs définissent ces lois légèrement différemment :

$$\mu\{k\} = p(1-p)^k \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Nous recommandons à ce propos une certaine prudence bien que nous restons fermement convaincu que notre définition est la seule à retenir.

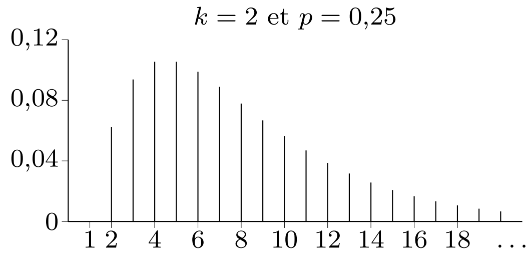
b) Le cas $p = 0$ est particulier puisque le seul sens qu'on puisse donner à $\mathcal{G}(0)$ est d'être la mesure de Dirac en $+\infty$. En effet, ceci revient dans un schéma de Bernoulli infini à presque toujours perdre, si bien que le premier instant de succès est presque sûrement infini. De plus, il est possible de justifier de plusieurs manières analytiques que les lois $\mathcal{G}(p)$ pour $p > 0$ convergent vers $\delta_{\{\infty\}}$ quand p tend vers 0.

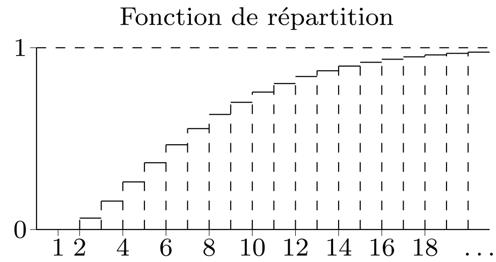
1.7. Lois binomiales négatives

Définition 7. — Soient $p \in]0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle *loi binomiale négative* de paramètres k et p la loi de probabilité discrète μ de support $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$ vérifiant

$$\mu\{n\} = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1}\, p^k (1-p)^{n-k} & \text{pour } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mu = \sum_{n \geqslant k} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \delta_{\{n\}}$. Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{B}inneg(k,p)$.





Pour $k = 1$, on retrouve la loi géométrique de paramètre p. La loi du k-ième succès dans un schéma de Bernoulli infini de paramètre p est la loi binomiale négative de paramètres k et p. On peut montrer que les écarts entre les rangs de succès sont indépendants et tous de loi géométrique de paramètre p, et que réciproquement la somme de k variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ a pour loi $\mathcal{B}inneg(k,p)$.

1.8. Lois hypergéométriques

Définition 8. — Soient n, $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ tels que $Np \in \mathbb{N}$ et $n \leqslant N$. On appelle *loi hypergéométrique* de paramètres (N,n,p) la loi de probabilité discrète μ de support inclus dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\mu\{k\} = \begin{cases} \dfrac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n} & \text{pour } \max\big(0, n - N(1-p)\big) \leqslant k \leqslant \min(n, Np), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{H}(N,n,p)$.

Considérons une urne contenant Np boules blanches et $N(1-p)$ boules noires, soit au total N boules. On tire *au hasard* n boules dans l'urne sans remise (c'est-à-dire qu'une réalisation est une partie à n éléments de cette urne et qu'on suppose toutes les réalisations équiprobables) et on note X le nombre de boules blanches correspondant. La variable aléatoire X a pour loi $\mathcal{H}(N,n,p)$.

2. **Lois absolument continues usuelles**

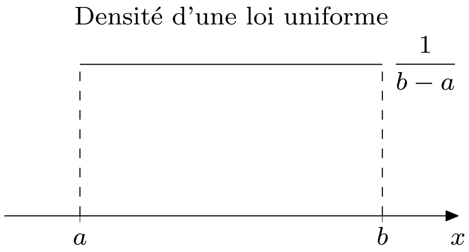
En parlant de lois absolument continues sans plus de précision nous comettons un abus : il est nécessaire de mentionner la — ou les — mesure par rapport à laquelle l'absolue continuité est affirmée. Dans toute la suite, cette mesure est la mesure de Lebesgue, celle qui aux intervalles assigne pour mesure leur longueur.

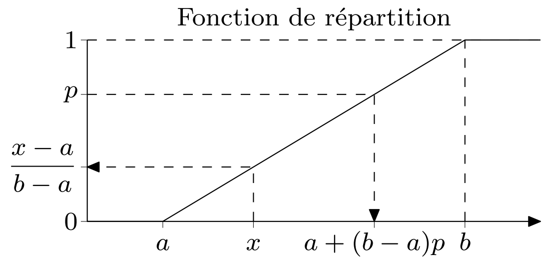
2.1. Lois uniformes

Définition 9. — Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle *loi uniforme* sur l'intervalle $[a,b]$ la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{U}([a,b])$.





Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a,b])$. Tous ses moments existent et on calcule aisément

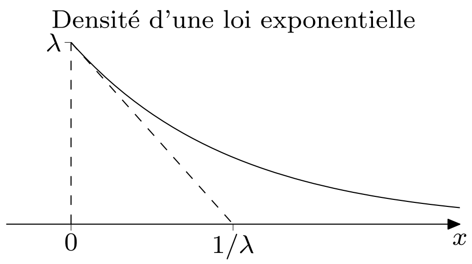
$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \varphi_X(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta b} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta a}}{\mathrm{i}\theta(b-a)}.$$

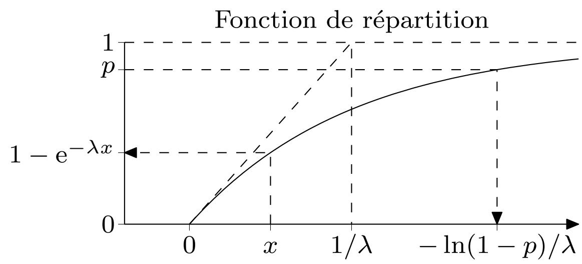
2.2. Lois exponentielles

Définition 10. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *loi exponentielle* de paramètre λ la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{E}(\lambda)$.





Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Tous ses moments existent et on calcule aisément (intégration par parties)

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \varphi_X(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}.$$

De telles lois apparaissent pour modéliser des temps d'attente de phénomènes pour lesquels il y a absence de mémoire, λ étant alors l'intensité d'arrivées. Si X est une variable de loi exponentielle de paramètre 1, pour tout $\lambda > 0$, la loi de X/λ est la loi exponentielle de paramètre λ.

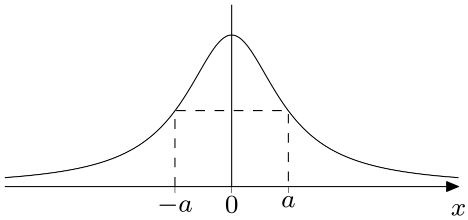
Remarque. — On appelle loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$ la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par $x \mapsto \lambda/2 \times \exp(-\lambda|x|)$.

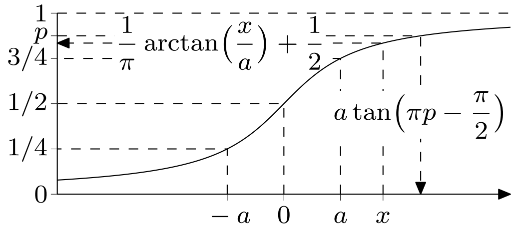
2.3. Lois de Cauchy

Définition 11. — Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *loi de Cauchy* de paramètre a la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \frac{a/\pi}{a^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{C}(a)$.





Les lois de Cauchy apparaissent naturellement en Analyse (équation de Laplace dans le demi-plan supérieur) et en Probabilités. Ce sont des lois dont tous les moments divergent. Leurs fonctions caractéristiques sont — évidemment — bien définies ; un calcul non immédiat montre que

$$\varphi(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} \times \frac{a/\pi}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-|a\theta|},$$

qui est, à un facteur multiplicatif près, la densité de la loi de Laplace de paramètre $a > 0$. On remarquera que cette transformée de Fourier n'est pas dérivable en 0 — ce qui implique, mais on le sait déjà, que la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ n'admet pas de moyenne. Notons que si la loi de X est la loi de Cauchy de paramètre 1, pour $a > 0$, la loi de aX est la loi de Cauchy de paramètre a.

Le cas le plus simple où on voit apparaître une loi de Cauchy est celui où Θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur le cercle unité et $X = a\tan\Theta$. La variable aléatoire X a alors pour loi la loi de Cauchy de paramètre a.

Un autre cas classique est celui où on considère le quotient Y/X de deux variables aléatoires X et Y de lois normales, de moyenne 0 et de variances respectives $\sigma_X^2 > 0$ et $\sigma_Y^2 > 0$. Ce quotient est presque sûrement bien défini, et sa loi est la loi de Cauchy de paramètre $a = \sigma_Y/\sigma_X$. Pour le voir, supposer dans un premier temps $\sigma_X = \sigma_Y$, puis considérer le couple (X, Y) comme une variable aléatoire dans le plan, passer en coordonnées polaires pour obtenir les coordonnées aléatoires (R, Θ), constater que Θ est de loi uniforme sur le cercle unité et que $Y/X = \tan\Theta$ a ainsi pour loi la loi de Cauchy de paramètre 1. Lorsque $\sigma_X \neq \sigma_Y$, avec $a = \sigma_Y/\sigma_X$, le quotient $(Y/a)/X$ est de loi de Cauchy de paramètre 1 d'après ce qui précède. Il est alors clair que Y/X a pour loi la loi de Cauchy de paramètre a (*voir* la section sur les lois normales).

Citons une autre propriété des lois de Cauchy : si X a pour loi la loi de Cauchy de paramètre a, alors $1/X$ a pour loi la loi de Cauchy de paramètre $1/a$. Ceci peut se voir géométriquement lorsque $a = 1$: En posant $\Theta = \arctan X$, on a $1/X = \operatorname{cotan}\Theta = \tan\Theta'$ avec Θ' de loi uniforme sur le disque unité, et ainsi $1/X$ a pour loi la loi de Cauchy de paramètre 1. Le cas où $a \neq 1$ s'en déduit aisément.

Remarque. — Il arrive parfois qu'on considère des lois de Cauchy centrées en $x_0 \neq 0$. Dans ce cas, la densité est donnée par

$$p(x) = \frac{a/\pi}{a^2 + (x - x_0)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

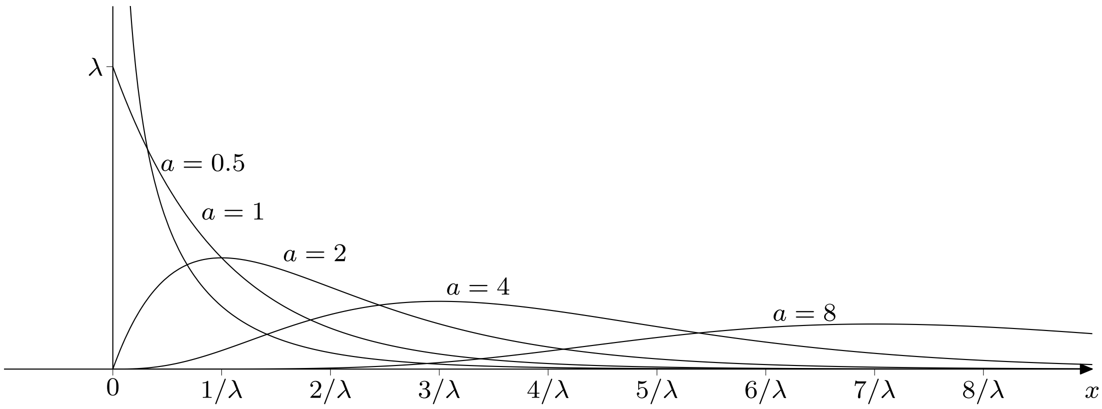
2.4. Lois Gamma

Définition 12. — Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *loi Gamma* de paramètres a et λ la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\, \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\Gamma(a, \lambda)$.

Densités de lois Gamma



Le facteur de normalisation $\Gamma(a)$ apparaissant dans la formule précédente est la valeur en $a > 0$ de la fonction Γ (Gamma) d'Euler :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Rappelons que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)\,!$ et $\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi} \times 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)/2^n$.

On constate que la loi Gamma de paramètres 1 et λ est la loi exponentielle de paramètre λ. Si X est une variable de loi Gamma de paramètre a et 1, pour tout $\lambda > 0$, la loi de X/λ est la loi Gamma de paramètres a et λ. On peut montrer, par convolution de densités exponentielles, que la loi d'une somme de $k \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ est la loi Gamma de paramètres k et λ. Plus généralement, la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(a', \lambda)$ a pour loi $\Gamma(a + a', \lambda)$. Ainsi, si X est une variable aléatoire de loi $\Gamma(k, \lambda)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{k}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{k}{\lambda^2}, \qquad \varphi_X(\theta) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\right)^k$$

— ces formules étant aussi vraies lorsque $k > 0$ est réel. De telles lois apparaissent en théorie des files d'attentes : on attend que k phénomènes successifs surviennent, les durées séparant leur apparition étant supposées indépendantes et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$; le temps d'attente total a alors pour loi $\Gamma(k, \lambda)$.

Les lois Gamma sont parfois nommées *lois de Erlang*. Les valeurs de leurs fonctions de répartition s'obtiennent à partir de celles des fonctions Gamma incomplètes

$$\int_0^x t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

dont le calcul nécessite le plus souvent le recours à la machine.

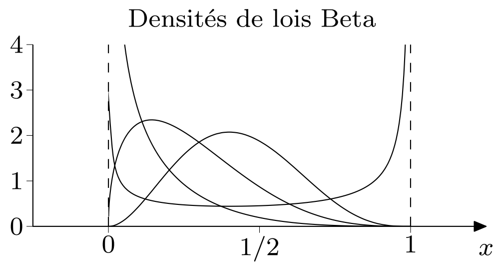
Remarque. — Les lois Gamma peuvent paraître compliquées et sont souvent méconnues des débutants. Elles sont pourtant liées aux lois normales, aux lois de Poisson, aux lois du χ^2, ...

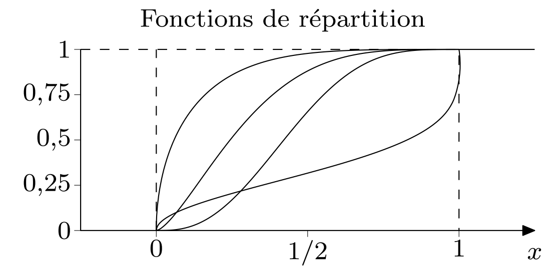
2.5. Lois Beta

Définition 13. — Soient a et $b \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *loi Beta* de paramètres a et b la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\, \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\mathrm{B}(a,b)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathrm{Beta}(a,b)$.





Le facteur de normalisation $\mathrm{B}(a,b)$ apparaissant dans la formule précédente est la valeur en a et b de la fonction B (Beta) d'Euler :

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Rappelons qu'elle est liée à la fonction Gamma par $\mathrm{B}(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

Remarque. — Les lois Beta peuvent paraître compliquées et sont souvent méconnues des débutants. Elles sont pourtant liées aux lois de Student, de Fisher, aux lois binomiales, ...

3. **Lois normales et lois associées**

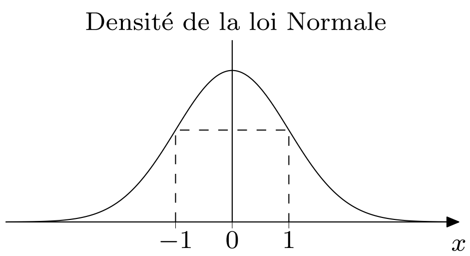
Les lois de probabilité que nous abordons à présent sont les lois normales unidimensionnelles et les lois dites associées, voire dérivées, de lois normales. Elles sont absolument continues et apparaissent principalement en Statistique comme lois de variables $f(X_1, \ldots, X_n)$ où $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, une loi normale.

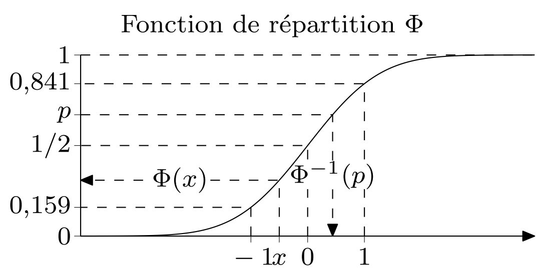
3.1. Lois normales

Définition 14. — Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *loi normale* de moyenne m et de variance σ^2 la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. La loi de probabilité $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée *loi normale standard* ou *loi Normale*. On a coutume de noter Φ sa fonction de répartition.

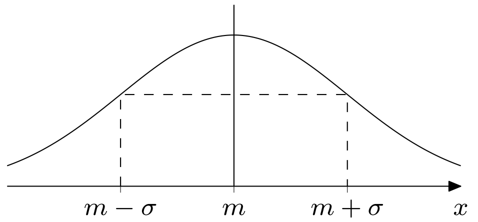




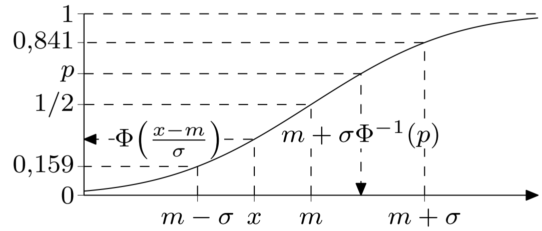
Remarques. — *a*) On convient qu'une variable aléatoire constante égale à m a pour loi la loi normale $\mathcal{N}(m,0)$.

b) Les lois normales sont aussi appelées *lois de Gauss* ou lois gaussiennes, ou encore *lois de Laplace–Gauss* bien qu'on devrait plutôt employer l'expression lois de « de Moivre–Laplace–Gauss ».

Densité de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$



Fonction de répartition $F(x)=\Phi((x-m)/\sigma)$



Proposition. — *Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.*

(i) *La variable aléatoire $(X-m)/\sigma$ suit la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.*

(ii) *La variable aléatoire X admet des moments de tous ordres, en particulier $\mathbb{E}[X]=m$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$. De plus, sa fonction caractéristique est donnée par*

$$\varphi_X(\theta)=\exp\bigl(\mathrm{i}m\theta-\sigma^2\theta^2/2\bigr)\qquad \textit{pour tout } \theta\in\mathbb{R}.$$

Démonstration. — Le point (i) se démontre par changement de variable :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{(X-m)/\sigma\leqslant x\}&=\mathbb{P}\{X\leqslant m+\sigma x\}\\&=\int_{-\infty}^{m+\sigma x}\mathrm{e}^{-(y-m)^2/2\sigma^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}=\cdots=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi}}=\Phi(x),\end{aligned}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi $(X-m)/\sigma$ a pour fonction de répartition la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc sa loi est $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour le point (ii) on peut se limiter au cas de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, les autres s'obtenant aisément par transformation affine. Pour les calculs de moments, il s'agit encore d'intégrations par parties, pour celui de la fonction caractéristique, on dérive φ pour obtenir une équation différentielle dont on sait déterminer l'unique solution (donnée par l'énoncé plus haut). □

Il n'est certainement pas nécessaire d'épiloguer sur les lois normales tant elles se rencontrent dans de nombreux modèles physiques ou sociaux. Une des justification de cette omniprésence tient dans l'énoncé du théorème central limite. En particulier, ces lois permettent d'approcher des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ pour n grand ($n\geqslant 50$) et p ni trop petit, ni trop grand ($np\geqslant 10$ et $n(1-p)\geqslant 10$).

Proposition. — *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ pour m_1, $m_2\in\mathbb{R}$ et σ_1, $\sigma_2\in\mathbb{R}_+$. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels. Alors la combinaison linéaire $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\lambda_1m_1+\lambda_2m_2,\lambda_1^2\sigma_1^2+\lambda_2^2\sigma_2^2)$*

Démonstration. — Pour démontrer cette proposition le plus rapide est de calculer la fonction caractéristique de $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2$:

$$\varphi_{\lambda_1X_1+\lambda_2X_2}(\theta)=\varphi_{\lambda_1X_1}(\theta)\varphi_{\lambda_2X_2}(\theta)$$

par indépendance de λ_1X_1 et de λ_2X_2. Ainsi

$$\varphi_{\lambda_1X_1+\lambda_2X_2}(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1m_1\theta+\lambda_1^2\sigma_1^2\theta^2/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2m_2\theta+\lambda_2^2\sigma_2^2\theta^2/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_1m_1+\lambda_2m_2)\theta+(\lambda_1^2\sigma_1^2+\lambda_2^2\sigma_2^2)\theta^2/2}$$

qui est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \lambda_1^2\sigma_1^2 + \lambda_2^2\sigma_2^2)$. On en déduit que $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ a pour loi $\mathcal{N}(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \lambda_1^2\sigma_1^2 + \lambda_2^2\sigma_2^2)$. □

Remarque. — Cette proposition s'étend immédiatement à toute combinaison linéaire (ou affine) d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$. Par ailleurs on constate que le résultat est cohérent avec les valeurs de la moyenne et de la variance de $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$.

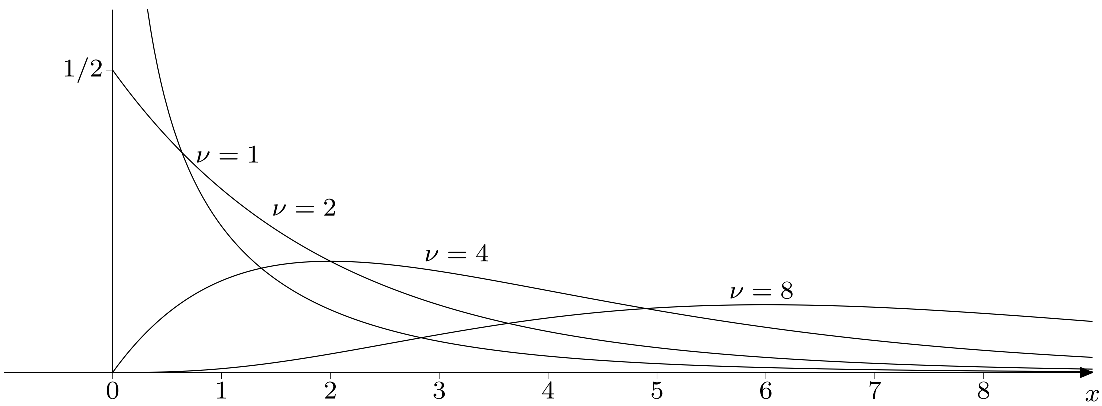
3.2. Lois de Pearson

Définition 15. — Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$. On appelle *loi de Pearson*, ou *loi du* χ^2, à ν degrés de liberté la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\,x^{\nu/2-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cette mesure est identifiée par la notation $\chi^2(\nu)$.

Densités de lois du χ^2



Remarque. — On constate que la loi de Pearson à ν degrés de liberté est la loi Gamma de paramètres $\nu/2$ et $1/2$. En particulier, la loi de Pearson à 2 degrés de liberté est la loi exponentielle de paramètre $1/2$. L'usage de cette dénomination, même si il est presque redondant avec celui de loi Gamma, est traditionnel en particulier en Statistique.

Proposition. — *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La variable aléatoire*

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

a pour loi la loi du χ^2 à n degrés de liberté.

Le point important est que c'est par ce type d'expression que sont introduites généralement les variables aléatoires de loi $\chi^2(n)$. Il est extrêmement rare d'avoir recours à la formule de la densité. L'auteur de cette note s'en sera servi uniquement pour faire des graphiques. Dans la pratique, on se sert de tables ou de logiciels de calcul pour évaluer des probabilités liées à ces lois.

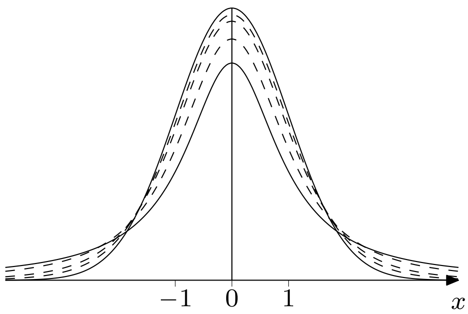
3.3. Lois de Student

DÉFINITION 16. — Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$. On appelle *loi de Student* à ν degrés de liberté la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

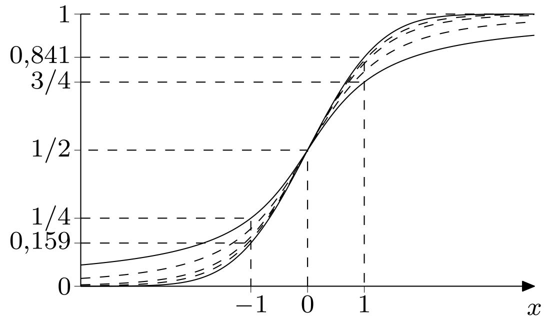
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\big((\nu+1)/2\big)}{\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note généralement cette mesure de probabilité $\mathcal{T}(\nu)$.

Densités pour $m = 1, 2, 5, 10, \infty$



Fonctions de répartition



Remarque. — La loi de Student à 1 degré de liberté est la loi de Cauchy de paramètre 1. Quand ν tend vers l'infini, $\mathcal{T}(\nu)$ tend vers la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

PROPOSITION. — *Soient X et Z deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(\nu)$. La variable aléatoire*

$$T = \frac{X}{\sqrt{Z/\nu}}$$

a pour loi la loi de Student à ν degrés de liberté.

De même que précédemment, nous n'essaierons pas d'établir la preuve de cette proposition. La formule de la densité ne sert pas pour la pratique courante et c'est souvent par cette propriété que ces lois apparaissent. On a recours généralement à des tables ou à des logiciels spécifiques pour évaluer des probabilités associées.

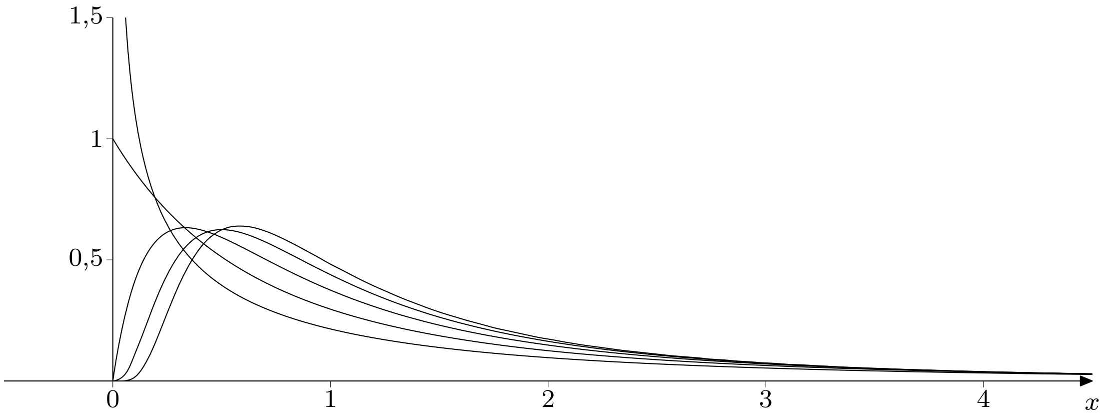
3.4. LOIS DE FISHER–SNEDECOR

DÉFINITION 17. — Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$. On appelle *loi de Fisher–Snedecor*, à (ν_1, ν_2) degrés de liberté la loi de probabilité absolument continue dont une densité est donnée par

$$p(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{\Gamma\big((\nu_1+\nu_2)/2\big)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{x^{\nu_1/2-1}}{(1+x^{\nu_1/\nu_2})^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note généralement cette mesure de probabilité $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$.

Densités de lois de Fisher–Snedecor ($\nu_1 = 1, 2, 4, 8, 16$, $\nu_2 = 4$)



Proposition. — *Soient* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives* $\chi^2(\nu_1)$ *et* $\chi^2(\nu_2)$*. La variable aléatoire*

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

a pour loi la loi de Fisher–Snedecor à (ν_1, ν_2) *degrés de liberté.*

Là encore, nous n'essaierons pas d'établir la preuve de cette proposition. Les autres remarques faites pour le cas des lois de Pearson et de Student s'appliquent aussi dans ce cas.

Table des matières