Université de Poitiers
Département de Mathématiques

6L20–Intégration, Probabilités
Année 2006–07

DEVOIR N° 2

à remettre le 20 mars 2007

Problème. — Le but de ce problème est de construire une base orthonormée de l'espace de Hilbert réel $L^2([0,1]) = L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions considérées seront à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, soit $D_{n,k} = [k/2^n, (k+1)/2^n[$ le k-ième intervalle dyadique d'ordre n, et soit $\mathcal{D}_n$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\mathbb{1}_{D_{n,k}}$, $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

(i) Montrer que pour tout n, $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$.

(ii) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout entier n, on définit

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor) \end{aligned}$$

où $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière de y.

Montrer que $(f_n)_{n\in}$ converge vers f uniformément, puis dans L^2.

(iii) Soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel engendré par les $(\mathcal{D}_n)_{n\in}$ ($\mathcal{D}$ est aussi la réunion des $\mathcal{D}_n$). Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $L^2([0,1])$.

(iv) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \mathbb{1}_{[0,1/2[}(t) - \mathbb{1}_{[1/2,1[}(t)$. On définit

$$\begin{aligned} u_0 : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \mathbb{1}_{[0,1[}(t) \end{aligned}$$

et pour tous $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$,

$$\begin{aligned} u_{2^n+k} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto u(2^n t - k) = \mathbb{1}_{D_{n+1,2k}}(t) - \mathbb{1}_{D_{n+1,2k+1}}(t). \end{aligned}$$

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et un unique $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tels que $p = 2^n + k$.

b) Montrer que les fonctions $(u_p)_{p\in}$ forment un système orthogonal dans $L^2([0,1])$, c'est-à-dire que si $p_1 \neq p_2$, alors $\langle u_{p_1}, u_{p_2} \rangle = 0$, ($\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2([0,1])$).

(v) Pour $n \geqslant 0$, soit $\mathcal{H}_n$ l'espace vectoriel engendré par les u_p, $0 \leqslant p \leqslant 2^n - 1$. Montrer par récurrence que $\mathcal{H}_n = \mathcal{D}_n$.

(vi) Soit $h_0 = u_0$ et pour $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$, soit $h_{2^n+k} = 2^{n/2} u_{2^n+k}$.

Montrer que les fonctions $(h_p)_{p\in}$ forment un système orthonormé total dans $L^2([0,1])$, c'est-à-dire une base orthonormée.

(vii) Montrer que pour toutes fonctions f et g de carré intégrable sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p \geqslant 0} \left(\int_0^1 f(x)h_p(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)h_p(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

cette dernière série étant absolument convergente.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

6L20–Intégration, Probabilités
Année 2006–07

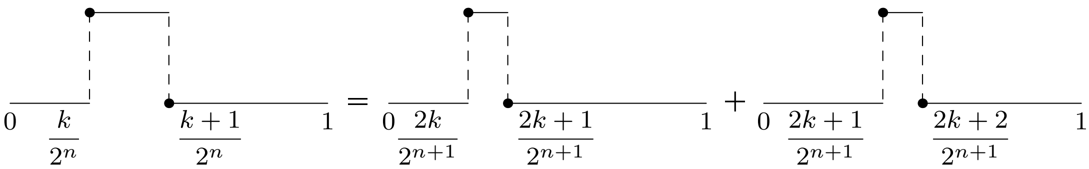
DEVOIR N° 2, CORRECTION

L'objet du problème était de découvrir « la »[1] base de Haar. Cela ne pose pas de difficulté particulière mais permet de faire sien(ne) quelques concepts plutôt sympathiques.

(i) *Inclusion des* $(\mathcal{D}_n)_{n\geqslant 0}$. — L'espace vectoriel $\mathcal{D}_n$ est l'espace vectoriel réel engendré par les indicatrices des intervalles dyadiques d'ordre n. En passant de n à $n+1$, on divise ces intervalles par 2 et donc raffine la famille de générateurs. On peut donc remarquer que pour tout $n \geqslant 0$, $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$

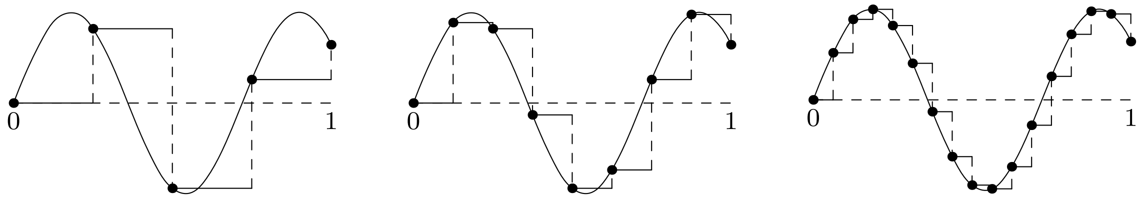
$$\mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[} = \mathbb{1}_{[2k/2^{n+1},(2k+1)/2^{n+1}[} + \mathbb{1}_{[(2k+1)/2^{n+1},(2k+2)/2^{n+1}[},$$

ce qui visuellement donne



et donc les générateurs de $\mathcal{D}_n$ sont dans $\mathcal{D}_{n+1}$, ce qui implique immédiatement l'inclusion $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$.

(ii) *Approximation de fonctions continues.* — Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = f(2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor)$, pour tout $x \in [0,1]$. La fonction $x \in [0,1] \to 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor \in [0,1]$ est constante sur les intervalles dyadiques d'ordre n ; plus précisément, si $x \in [k/2^n, (k+1)/2^n[$ pour $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, alors $2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor = k/2^n$, et ainsi $f_n(x) = f(k/2^n)$; et finalement si $x = 1$, $x = 1 = 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor$, et ainsi $f_n(1) = f(1)$.



Remarquons qu'on peut écrire

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k/2^n)\mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(x) + f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}(x) \qquad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

À cause du dernier terme, f_n ne peut être dans $\mathcal{D}_n$ que si $f(1) = 0$. Le singleton $\{1\}$ étant de mesure de Lebesgue nulle dans $[0,1]$, nous pourrons par la suite négliger ce dernier terme en écrivant par exemple

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k/2^n)\mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(x) \qquad \text{pour tout } x \in [0,1],$$

fonction qui coïncide avec f_n sur $[0,1[$.

---

1. Il est possible de généraliser cette construction. . .

La fonction f étant continue sur l'ensemble compact $[0,1]$, elle est uniformément continue (théorème de Heine). Soit $\varepsilon > 0$. Du fait de la continuité uniforme, soit $\eta > 0$ tel que pour tous x, $y \in [0,1]$, si $|x-y| \leqslant \eta$ alors $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Maintenant soit $n \geqslant 0$ tel que $1/2^n \leqslant \eta$. Alors pour tout $x \in [0,1[$, soit $k \in \{0,\dots,2^n-1\}$ tel que $x \in [k/2^n,(k+1)/2^n[$, puisque $|x-k/2^n| \leqslant /2^n \leqslant \eta$, on a $|f(x)-f_n(x)| = |f(x)-f(k/2^n)| \leqslant \varepsilon$. De plus $f(1) = f_n(1)$. Ceci montre que $\|f-f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ainsi pour tout $n \geqslant -\ln(\eta)/\ln 2$, $\|f-f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ce qui montre que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

On a évidemment

$$\|f-f_n\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)-f_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \|f-f_n\|_\infty^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|f-f_n\|_\infty.$$

Puisque le majorant de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que $\|f-f_n\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans $L^2([0,1])$.

(iii) *Densité de $\mathcal{D}$ dans $L^2([0,1])$.* — Il faut commencer par remarquer que les fonctions de $\mathcal{D}$ ne prennent chacune qu'un nombre fini de valeurs et sont donc bornées sur $[0,1]$. Elles sont donc dans $L^\infty([0,1]) \subset L^2([0,1])$. Donc $\mathcal{D} \subset L^2([0,1])$.

D'après le cours, pour toute fonction $g \in L^2([0,1])$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\|g-f\|_2 \leqslant \varepsilon/2$. Les fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ construites précédemment approchent uniformément f, et les fonction $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 0}$ sont dans $\mathcal{D}$. Soit $n \geqslant 0$ tel que $\|f-f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$. On a alors

$$\|f-\hat{f}_n\|_2 = \|f-f_n\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)-f_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \|f-f_n\|_\infty^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|f-f_n\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, $\|g-\hat{f}_n\|_2 \leqslant \|g-f\|_2 + \|f-\hat{f}_n\|_2 \leqslant \varepsilon$. Puisque pour tout $\varepsilon > 0$, on peut approcher n'importe quel élément de $L^2([0,1])$ par un élément de $\mathcal{D} \subset L^2([0,1])$ pour la norme $\|\,.\,\|_2$, ce qui signifie que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble dense de $L^2([0,1])$ pour la norme $\|\,.\,\|_2$.

(iv) *Construction de la base de Haar.* — *a*) La suite géométrique $(2^n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante de 1 à ∞. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $p \in \{2^n,\dots,2^{n+1}-1\}$ car les ensembles $(\{2^n,\dots,2^{n+1}-1\})_{n\in}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. En posant $k = p-2^n$, on a $k \in \{0,\dots,2^n-1\}$ puisque $(2^{n+1}-1)-2^n = 2^{n+1}-2^n-1 = 2^n(2-1)-1 = 2^n-1$. L'écriture est évidemment unique.

b) Montrons que les fonctions $(u_p)_{p\in}$ forment un système orthogonal dans $L^2([0,1])$. Évacuons le cas de u_0 : pour tout $p \geqslant 1$, $p = 2^n+k$ selon l'écriture précédente,

$$\begin{aligned}\langle u_0,u_p\rangle &= \int_0^1 u_0(t)u_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(\mathbb{1}_{D_{n+1,2k}}(t) - \mathbb{1}_{D_{n+1,2k+1}}(t)\big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \mathbb{1}_{D_{n+1,2k}}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathbb{1}_{D_{n+1,2k+1}}(t)\,\mathrm{d}t = 2^{n-1}-2^{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Considérons maintenant deux entiers strictement positifs $p_1 = 2^{n_1}+k_1$ et $p_2 = 2^{n_2}+k_2$. Le support de u_{p_i}, $i = 1, 2$, est D_{n_i,k_i} ; cette fonction vaut 1 sur la première moitié de cet intervalle, -1 sur la seconde moitié, et est nulle ailleurs. De plus il n'y a que deux possibilités pour les intervalles D_{n_1,k_1} et D_{n_2,k_2} : ou bien ils sont disjoints, auquel cas on a clairement

$$\langle u_{p_1},u_{p_2}\rangle = \int_0^1 u_{p_1}(t)u_{p_2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0\,;$$

ou bien l'un est strictement inclus dans l'autre (le cas d'égalité étant exclu puisque $p_1 \neq p_2$). Dans ce dernier cas, supposons par exemple que $p_1 \geqslant p_2$. Alors D_{n_1,k_1} est inclus dans l'une des moitiés (fermées à gauche, ouvertes à droite) de D_{n_2,k_2}. Alors $\langle u_{p_1},u_{p_2}\rangle = \pm\int_0^1 u_{p_1}(t)\,\mathrm{d}t =$

$\pm 0 = 0$ (le signe $\pm$ dépendant du fait que le support de u_{p_1} soit inclus dans la première ou la seconde moitié du support de u_{p_2}).

Finalement, pour tout $p_1 \neq p_2$ dans $\mathbb{N}$, on a $\langle u_{p_1}, u_{p_2} \rangle = 0$. La famille de fonctions $(u_p)_{p\in}$ forme donc bien un système orthogonal dans $L^2([0,1])$.

(v) *L'égalité $\mathcal{H}_n = \mathcal{D}_n$.* — Procédons ainsi que demandé. Pour $n = 0$, on a $\mathcal{H}_0 = \operatorname{Vect}\{u_0\} = \operatorname{Vect}\{\mathbb{1}_{D_{0,0}}\} = \mathcal{D}_0$. Pour $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{H}_n = \mathcal{D}_n$. On a, pour $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$,

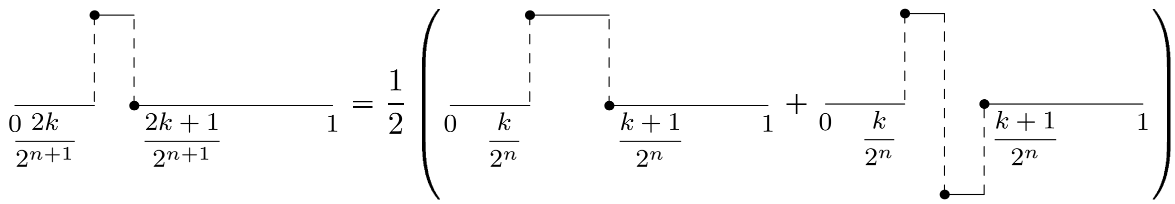
$$u_{2^n+k} = \mathbb{1}_{D_{n+1,2k}} - \mathbb{1}_{D_{n+1,2k+1}}$$

comme le précise l'énoncé. Ces fonctions sont donc dans $\mathcal{D}_{n+1}$, pour tout $p = 2^n + k$ avec $p \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Puisque pour $0 \leqslant p \leqslant 2^n - 1$, on a $u_p \in \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$, on a alors $\mathcal{H}_{n+1} = \operatorname{Vect}\{u_p : 0 \leqslant p \leqslant 2^{n+1} - 1\} \subset \mathcal{D}_{n+1}$.

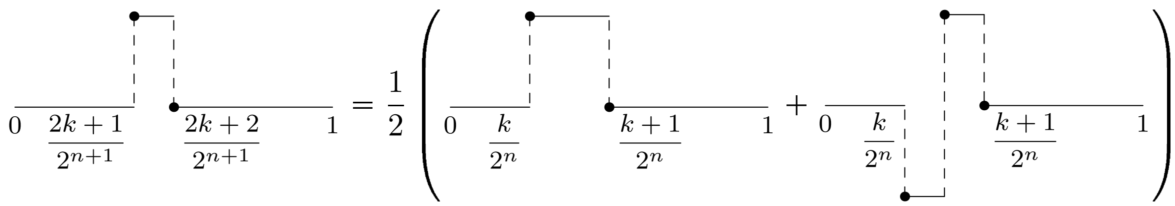
Passons à l'inclusion réciproque. Par hypothèse, les générateurs $\{\mathbb{1}_{D_{n,k}} : 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\}$ de $\mathcal{D}_n$ sont dans $\mathcal{H}_n$ et donc dans $\mathcal{H}_{n+1}$. On constate que si $0 \leqslant 2k \leqslant 2k+1 \leqslant 2^{n+1} - 1$, on a

$$\mathbb{1}_{D_{n+1,2k}} = \frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_{D_{n,k}} + u_{2^n+k}\big) \in \mathcal{H}_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{D_{n+1,2k+1}} = \frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_{D_{n,k}} - u_{2^n+k}\big) \in \mathcal{H}_{n+1}$$

ce qui visuellement donne



et



On a donc $\mathcal{D}_{n+1} = \operatorname{Vect}\{\mathbb{1}_{D_{n+1,k}} : 0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1} - 1\} \subset \mathcal{H}_{n+1}$. Avec la première inclusion, on en déduit que $\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{H}_{n+1}$.

Par récurrence, on a donc $\mathcal{D}_n = \mathcal{H}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(vi) *Une base orthonormée de $L^2([0,1])$.* — Puisque $(u_p)_{p\in}$ forme un système orthogonal dans $L^2([0,1])$ et que pour tout $p = 2^n + k \geqslant 0$, avec $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$,

$$\|u_p\|_2 = \left(\int_0^1 u_p(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{D_{n,k}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = (2^{-n})^{1/2} = 2^{-n/2}$$

alors $\{h_p = 2^{n/2} u_p : p = 2^n + k \geqslant 0,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1\}$ est un système orthonormal de $L^2([0,1])$. Il est total par densité de $\mathcal{D} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{D}_n = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$ dans $L^2([0,1])$ (la suite peut être omise, elle n'est là que pour rappeler comment ça marche, et est donc complètement inutile) : considérons $f \in L^2([0,1])$; posons $f_n = \sum_{p=0}^{2^n-1} \langle h_p, f \rangle h_p$ qui est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{H}_n$; par l'égalité de Pythagore, on a

$$\sum_{p=0}^{2^n-1} \langle h_p, f \rangle^2 = \|f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f - f_n\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \,;$$

cette majoration montre que la série à termes positifs $\sum_{p\geqslant 0} \langle h_p, f \rangle^2$ est majorée, donc convergente ; ainsi la série de fonctions $\sum_{p=0}^{2^n-1} \langle h_p, f \rangle h_p$ est normalement convergente dans $L^2([0,1])$ qui est complet, elle est alors convergente ; soit $f_{\mathcal{H}} = \sum_{p=0} \langle h_p, f \rangle h_p \in L^2([0,1])$; il nous reste à montrer que $f_{\mathcal{H}} = f$ dans $L^2([0,1])$; soit $\varepsilon > 0$; par convergence de la série numérique $\sum_{p\geqslant 0}\langle h_p, f\rangle^2$, soit $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\sum_{p\geqslant n+1}\langle h_p, f\rangle^2 \leqslant (\varepsilon/2)^2$; par densité de $\mathcal{D}$ dans $L^2([0,1])$, soit $n \geqslant n_1$ tel qu'il existe dans $\mathcal{H}_n$ une fonction h telle que $\|f-h\|_2 \leqslant \varepsilon/2$; toujours grâce au théorème de Pythagore, on a alors $\|f-h\|_2^2 = \|f-f_n\|_2^2 + \|f_n - h\|_2^2$, ainsi $\|f-f_n\|_2 \leqslant \varepsilon/2$; finalement, par l'inégalité triangulaire, $\|f-f_{\mathcal{H}}\|_2 \leqslant \|f-f_n\|_2 + \|f_n - f_{\mathcal{H}}\|_2 = \|f-f_n\|_2 + (\sum_{p\geqslant n+1}\langle h_p, f\rangle^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\|f - f_{\mathcal{H}}\|_2 = 0$, c'est-à-dite $f = f_{\mathcal{H}}$ dans $L^2([0,1])$.

Remarque. — Tout ceci est-il bien utile ?

(vii) *Le classique des bases de Hilbert.* — Si $(h_p)_{p\geqslant 0}$ est une base de Hilbert de l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$, on a pour tous f, $g \in L^2([0,1])$,

$$f = \sum_{p\geqslant 0}\langle f, h_p\rangle\, h_p, \qquad g = \sum_{p\geqslant 0}\langle g, h_p\rangle\, h_p, \quad \text{et} \quad \langle f, g\rangle = \sum_{p\geqslant 0}\big(\langle f, h_p\rangle \times \langle g, h_p\rangle\big),$$

série qui est absolument convergente comme on le sait. La dernière égalité s'écrit dans le présent contexte

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p\geqslant 0}\left(\int_0^1 f(x)h_p(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 g(x)h_p(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Remarque. — Doit-on réellement donner plus de justifications ?