2M12

Processus à Temps Discret

Anthony Phan

Chapitre premier

GÉNÉRALITÉS

Rappels et notations

Dans ce chapitre ainsi que les suivants $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé :

- Ω est un ensemble non vide ;
- $\mathcal{A}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω, c'est-à-dire un ensemble de parties de Ω contenant $\varnothing$ et Ω tout entier, stable par passage au complémentaire et stable par intersections (et réunions) au plus dénombrables ;
- $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, c'est-à-dire une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pour toute famille finie ou dénombrable $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$ (additivité dénombrable).

En analyse, la notion de tribu apparaît comme une restriction technique : on cherche à étendre une fonction additive en une mesure sur le plus grand nombre de sous-ensembles de Ω, ainsi, plus la tribu $\mathcal{A}$ est grande, mieux c'est. En probabilités, cette contrainte technique existe bien entendu : on prend dès le départ la plus grande tribu $\mathcal{A}$ sur Ω qui ait du sens par rapport au problème posé. Mais ensuite on peut regarder des sous-tribus : une sous-tribu $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω telle que pour tout $A \in \mathcal{A}'$, on a $A \in \mathcal{A}$, autrement dit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Par exemple, si $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable et $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ est une variable aléatoire, c'est-à-dire une application $X : \Omega \to E$ vérifiant

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \qquad \text{pour tout } B \in \mathcal{E},$$

la tribu $\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathcal{E}\}$ engendrée par X est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ formée par les événements s'exprimant à l'aide de, ou portant sur, la variable aléatoire X seulement.

Exercice. — Montrer que $\sigma(X)$ est une tribu sur Ω et que c'est la plus petite tribu sur Ω tel que $X : \Omega \to E$ est mesurable, la tribu $\mathcal{E}$ sur E étant fixée.

Les exercices qui parsèment ces notes de cours ne sont là que pour se donner le temps d'une respiration pour vérifier qu'on a compris ce qui précède.

1. Filtrations et processus

Définition 1. — Soit $(\mathbb{T}, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On appelle *filtration* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ toute suite croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Un espace probabilisé muni d'une filtration est appelé *espace probabilisé filtré* et peut être noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. Pour $t \in \mathbb{T}$, la tribu $\mathcal{F}_t$ est appelée *tribu des événements antérieurs* à t.

Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est *complète* si pour tout $t \in \mathbb{T}$, la tribu $\mathcal{F}_t$ contient l'ensemble des négligeables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des parties $A \subset \Omega$ telles qu'il existe $A' \in \mathcal{A}$, $A \subset A'$ et $\mathbb{P}(A') = 0$. Toute filtration $\mathcal{F}$ peut être complétée en considérant la filtration $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ définie par $\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $t \in \mathbb{T}$.

Remarque. — Le complété d'une tribu ou d'une filtration se note de manière diverse en fonction du contexte. Lorsqu'une seule mesure de probabilité sur Ω est considérée, la notation $\bar{\mathcal{F}}$ convient. En revanche, lorsque plusieurs mesures de probabilité interviennent, une notation semblable à celle que nous avons utilisé s'impose. Cependant, lorsque la filtration est engendrée par un processus (*voir* plus loin), on peut se retrouver avec deux exposants, l'un signifiant l'origine de la filtration, l'autre la complétion. Heureusement, les situations rencontrées sont généralement suffisamment simples pour pouvoir adopter des notations pas trop surchargées, quitte à préciser les choses au début.

Rappelons qu'une relation d'ordre $\leqslant$ sur un ensemble $\mathbb{T}$ est une relation réflexive ($x \leqslant x$), transitive (si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$) et antisymétrique (si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$).

Il est des situations intéressantes pour lesquelles l'ordre n'est pas total (ou complet), c'est-à-dire que tous les éléments de $\mathbb{T}$ ne sont pas comparables. C'est, par exemple, le cas lorsque $\mathbb{T}$ est l'ensemble des parties d'un ensemble avec pour ordre celui déduit de l'inclusion. Ainsi, si on se donne des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et on pose $\mathcal{F}_I = \sigma\{X_i : i \in I\}$ pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, alors $(\mathcal{F}_I)_{I \subset \{1,\ldots,n\}}$ est une filtration.

Cependant nous n'envisagerons que les cas suivants :

- $\mathbb{T}$ est partie de $\mathbb{Z}$ (temps discret), soit, à bijection strictement croissante près, $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ fini, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ borné inférieurement, $\mathbb{T} = -\mathbb{N}$ borné supérieurement, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$;
- $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (temps continu), soit, à bijection continue strictement croissante près, $\mathbb{T} = [0, T]$ fermé, $\mathbb{T} = [0, \infty[= \mathbb{R}_+$ fermé à gauche, $\mathbb{T} =]-\infty, 0] = \mathbb{R}_-$ fermé à droite, $\mathbb{T} =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ ouvert.

Dans les cas que nous rencontrerons, l'ordre sera donc l'ordre usuel sur les réels qui est total, et l'ensemble $\mathbb{T}$ sera considéré comme le temps. La notion de filtration s'interprète alors comme décrivant l'acquisition progressive d'informations au cours du temps sur le déroulement d'un phénomène aléatoire. Les éléments de $\mathbb{T}$ seront fréquemment appelé « temps », « instants », voire « dates ». On doit noter que dès le départ nous imposons une dissymétrie en donnant une direction au temps : on dispose de l'information passée et on regarde vers le futur.

Le besoin ou non de disposer de tribus complètes est assez technique et ne s'impose généralement pas en temps discret, alors que c'est une condition qu'on retrouve fréquemment en temps continu, souvent avec la condition suivante :

DÉFINITION 2 (TEMPS CONTINU). — Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ est *continue à droite* si pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

Nous avons bien entendu $\mathcal{F}_{t+} \supset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, et il est toujours possible de « rendre » une filtration $\mathcal{F}$ continue à droite en la remplaçant par la filtration $\mathcal{F}_+$. Pour des raisons techniques en temps continu, il est fréquent de supposer la filtration continue à droite et complète. Ce sont les *conditions habituelles*.

La notion symétrique de continuité à gauche n'a pas de sens en théorie des processus. La filtration $\mathcal{F}_-$ définie par

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s$$

peut cependant présenter de l'intérêt (la tribu $\mathcal{F}_{t-}$ est la tribu des événements strictement antérieurs à t et est égale à la tribu engendrée par $\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s$, réunion qui n'est généralement pas une tribu).

En temps discret, une quelconque notion de continuité est hors de propos et on pourra convenir dans ce cadre que $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}$. En revanche, la filtration $\mathcal{F}_- = (\mathcal{F}_{t-1})_{t \in \mathbb{T}}$ (avec, lorsque par exemple $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$) demeure à distinguer de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 3. — Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On appelle *processus* à valeurs dans l'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ et indexé par $\mathbb{T}$ toute famille $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de variables aléatoires $X_t : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$, $t \in \mathbb{T}$.

À un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, on associe une filtration $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathbb{T}}$ définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \leqslant t\}$. Elle est appelée *filtration naturelle* du processus X ou encore filtration engendrée par le processus X.

Exercice. — Montrer que $\mathcal{F}^X$ est une filtration.

Exemples de processus. — Déjà en théorie élémentaire du Calcul des Probabilités, on rencontre des processus et une partie de leur problématique. Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi.

a) Le processus formé par la suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ est dans certains contextes appelée « bruit blanc » (en particulier lorsque la loi des variables est la loi normale centrée réduite).

b) le processus $X = (X_n)_{n \geq 0}$ défini par $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, est une « marche aléatoire » ou processus à accroissements indépendants, où X_0 est une variable aléatoire réelle quelconque, souvent constante ou indépendante des $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$.

c) $\bar{\xi}_n = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est la suite des moyennes empiriques. On sait par la loi du 0–1 que si cette suite converge presque sûrement, sa limite est une variable aléatoire constante, et, par la loi forte des grands nombres, que cette suite converge presque sûrement vers une constante si et seulement si les ξ_n sont intégrables auquel cas cette constante est égale à $\mathbb{E}[\xi_n]$. Ce résultat est un résultat de type *ergodique*.

d) Le Théorème Central Limite[1] affirme que si les ξ_n sont de carré intégrable, et en posant pour $n \geqslant 1$,

$$Z_n = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - n \times m}{\sqrt{n}\,\sigma}, \qquad \text{où } m = \mathbb{E}[\xi_n] \text{ et } \sigma^2 = \mathrm{Var}(\xi_n),$$

le processus $Z = (Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que la suite des lois de $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\mathcal{N}(0,1)$.

DÉFINITION 4. — Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. On appelle trajectoire du processus X, associée à l'aléa, ou réalisation, $\omega \in \Omega$, l'application $t \in \mathbb{T} \mapsto X_t(\omega)$.

Lorsque $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et E un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, des questions de régularité peuvent se poser sur les trajectoires : mesurabilité, continuité à droite ou à gauche, existence de limites, ... Par exemple, le processus sera dit à trajectoires continues à droite, si pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire associée à ω est continue à droite ; à trajectoires limitées à gauche si pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire associée à ω admet des limites à gauche en tout point $t \in \mathbb{T}$; à trajectoires *càdlàg*[2] si pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire associée à ω est continue à droite et limitée à gauche, ...

Lorsque $\mathbb{T}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, aucune considération de régularité n'est faite ($\mathbb{Z}$ est muni implicitement de sa topologie et de sa tribu discrètes). Seules d'éventuelles considérations de monotonies, de signe, communes aussi au cas où $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, sont faites. On parle de processus monotone, croissant, décroissant, à trajectoires stationnaires (ici, la précision du fait que l'adjectif s'applique aux trajectoires est important).

1. George Polya, « Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem, » Mathematische Zeitschrift, 8 (1920).

2. Un bel adjectif invariable qui semble tomber, hélas !, en désuétude.

DÉFINITION 5. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ est $\mathcal{F}$-adapté si pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-mesurable.

Remarque. — Pour $t \in \mathbb{T}$, nous notons temporairement $t] = \{s \in \mathbb{T} : s \leqslant t\}$, $\mathcal{T}$ la tribu de $\mathbb{T}$ et $\mathcal{T}_t$ la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur $t]$. Un processus X est *mesurable* si l'application $(t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est $\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}$-mesurable. Un processus X est *progressif* si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'application $(s, \omega) \in t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega) \in E$ est $\mathcal{T}_t \otimes \mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-mesurable.

Lorsque $\mathbb{T}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_t$ sont des tribus discrètes et les deux dernières notions n'apportent rien : tout processus est alors mesurable, et tout processus adapté est progressif (tout processus progressif est adapté). Ça n'est pas le cas en temps continu, ou plus de subtilité est nécessaire quant aux questions de mesurabilité.

Exercice. — Un processus X est $\mathcal{F}$-adapté si et seulement si sa filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ est une sous-filtration de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

DÉFINITION 6. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On appelle *lois finies dimensionnelles*, ou *lois temporelles*, les lois de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E^n, \mathcal{E}^{\otimes n})$, pour $t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{T}$, $n \geqslant 1$.

Deux processus définis sur des espaces probabilisés éventuellement différents mais ayant même espace d'états et même ensemble des temps sont dits *équivalents*, ou *versions l'un de l'autre*, s'ils ont même lois finies dimensionnelles (temporelles).

Ces familles de lois de probabilité vérifient une propriété de consistance : si pour $I \subset \mathbb{T}$ fini, μ_I désigne la loi finie dimensionnelle correspondante, alors pour $J \subset I$, $\mu_J = p_{I,J}(\mu_I)$ où $p_{I,J}$ désigne la projection canonique de E^I dans E^J. En particulier, si $\mathbb{T}$ est fini, la donnée de $\mu_\mathbb{T}$ suffit. Dans ce cas, la loi de X est sans équivoque possible $P_X = \mu_\mathbb{T}$.

Plus généralement, un processus X peut être vu comme une application de Ω dans $E^\mathbb{T}$, auquel cas on souhaiterait définir sa loi comme une mesure de probabilité sur $E^\mathbb{T}$ muni d'une tribu convenable comme l'image de $\mathbb{P}$ par l'application $\omega \in \Omega \mapsto X_\cdot(\omega)$, application qui est mesurable dès que chaque X_t est mesurable et $E^\mathbb{T}$ muni de la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$. Cette mesure de probabilité est bien définie et complètement caractérisée par les distributions finies dimensionnelles. Dans *Probabilités et Potentiel, vol. A*, elle est nommée *loi temporelle* du processus X.

Exemple. — Soit $\xi = (\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ, alors ses lois finies dimensionnelles d'ordre n sont $\mu^{\otimes n}$ et sa loi est la loi produit $\mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$, et reciproquement.

Remarques. — *a*) Considérons des processus à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et indexés par $\mathbb{T}$. Le cadre canonique consiste à considérer $\Omega = E^\mathbb{T}$ pour ensemble fondamental, $X_t : \Omega \to E$, $\omega \mapsto \omega(t)$, $t \in \mathbb{T}$, le processus canonique, ou processus des coordonnées, $\mathcal{F}$ la filtration naturelle de ce processus, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leqslant t\}$, $t \in \mathbb{T}$, et $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$ la tribu produit. Dans ce cadre sans probabilité, le processus canonique X est mesurable et adapté.

Étant donné un processus indexé par $\mathbb{T}$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, la réalisation canonique de ce processus consiste à considérer le cadre précédent avec pour loi de probabilité $\mathbb{P}$ la loi temporelle du processus considéré (avec une filtration éventuellement complétée et rendue continue à droite). Changer de processus, ou considérer d'autres aspects du processus revient dans ce cadre à changer de mesure de probabilité.

Deux processus ayant même réalisation canonique sont donc versions l'un de l'autre (ou équivalents) et réciproquement.

b) La notion de réalisation canonique d'un processus est sans ambigüité en temps discret. En temps continu, c'est plus délicat, car les éléments $\omega \in \Omega$ sont naturellement vus comme les trajectoires possibles du processus. Si les trajectoires peuvent être supposées continues (resp. càdlàg), on prendra $\Omega = C(\mathbb{T}, E)$ (resp. $D(\mathbb{T}, E)$) l'ensemble des applications continues (resp. càdlàg) de $\mathbb{T}$ dans E, etc.

c) Deux processus X et Y définis sur un même espace probabilisé sont dits être une *modification* l'un de l'autre si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $X_t = Y_t$ presque sûrement, ou encore

$$\forall t \in \mathbb{T}, \qquad \exists A_t \in \mathcal{A},\, \mathbb{P}(A_t) = 1, \qquad X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in A_t.$$

Deux processus X et Y sont dits *indistinguables* si presque sûrement, $X_t = Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, ou encore

$$\exists A \in \mathcal{A},\, \mathbb{P}(A) = 1, \qquad X_t(\omega) = Y_t(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in A \text{ et tout } t \in \mathbb{T}.$$

La notion d'indistinguabilité est plus forte que celle de modification qui est elle-même plus forte que celle de version.

En temps discret, l'ensemble $\mathbb{T}$ est dénombrable, et indistinguabilité et modification sont alors deux notions identiques.

Citons pour finir cette section un résultat de mesurabilité très pratique en temps continu.

Théorème 1 (temps continu). — *Soit E un espace métrisable, X un processus à valeurs dans E, adapté à la filtration $\mathcal{F}$. Si X est à trajectoires continues à droite (resp. continues à gauche), alors le processus X est progressif par rapport à la filtration $\mathcal{F}$.*

Démonstration (facultative). — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X^n_t = X_{(k+1)/2^n}$ si $t \in [k/2^n, (k+1)/2^n[$. Ce pocessus est progressif par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})_{t\in\mathbb{T}}$ dès que $\varepsilon > 1/2^n$. Par continuité à droite, pour tous $t \in \mathbb{T}$, $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X^n_t$, et donc X est progressif par rapport à $\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Puisque c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et que X est adapté, on constate que X est progressif. □

2. Temps d'arrêt

Nous noterons $\overline{\mathbb{T}}$ l'ensemble $\mathbb{T}$ fermé à droite par $+\infty$ si nécessaire.

Définition 7. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré. Une application $T : \Omega \to \overline{\mathbb{T}}$ est un *temps d'arrêt*, ou $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, si et seulement si

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{T}, \qquad \{T \leqslant t\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Notons $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par la filtration $\mathcal{F}$, encore appelée *tribu terminale* de la filtration $\mathcal{F}$. On a bien entendu $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$.

Théorème 2. — *Un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt $T : \Omega \to \overline{\mathbb{T}}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. Si de plus T est majoré par $t \in \mathbb{T}$, alors T est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Démonstration. — On constate que les intervalles $t] = \{s \in \mathbb{T} : s \leqslant t\}$ engendrent la tribu sur $\overline{\mathbb{T}}$, que le temps soit discret ou continu. Ainsi, pour que $T : \Omega \to \overline{\mathbb{T}}$ soit mesurable, il suffit que les images réciproques de ces intervalles soient mesurables pour la tribu considérée sur Ω. D'après la définition, il est clair que celles-ci sont toutes dans $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$, d'où la première partie du théorème. Supposons de plus que T est majoré par $t \in \mathbb{T}$: pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega) \leqslant t$. Dans ce cas, pour $s \leqslant t$, $\{T \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, et, pour $s \geqslant t$, $\{T \leqslant s\} = \{T \leqslant t\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$. D'où la deuxième partie de l'énoncé. □

Exemple. — Considérons un jeu infini de pile ou face (schéma de Bernoulli infini), c'est-à-dire une suite de variables aléatoires $\xi_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \{0, 1\}$, $n \geqslant 1$, indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(1, p)$, avec $p \in [0, 1]$. Posons $T = \inf\{n \geqslant 1 : \xi_n = 1\}$, avec $\inf \varnothing = \infty$. Alors, T est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle $\mathcal{F}^\xi$ du processus ξ. En effet, pour $n \geqslant 1$,

$$\{T \leqslant n\} = \{\text{il existe } 1 \leqslant k \leqslant n : \xi_k = 1\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\xi_k = 1\} \in \mathcal{F}_n^\xi.$$

Notons que

- si $p = 0$, alors $T = \infty$ presque sûrement ($\mathbb{P}\{T = \infty\} = 1$) ;
- si $0 < p < 1$, alors la loi de T est la loi géométrique de paramètre p ($\mathbb{P}\{T = n\} = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$) ;
- si $p = 1$, alors $T = 1$ presque sûrement ($\mathbb{P}\{T = 1\} = 1$).

Proposition 1 (temps discret). — *Supposons $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$. Pour qu'une application $T : \Omega \to \bar{\mathbb{T}}$ soit un temps d'arrêt, il faut et il suffit que*

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{T}, \qquad \{T = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Démonstration. — Si pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $\{T = t\} \in \mathcal{F}_t$, alors $\{T = t\} \in \mathcal{A}$, et par réunion au plus dénombrable $\{T \in \mathbb{T}\} \in \mathcal{A}$, donc par passage au complémentaire $\{T = \infty\} \in \mathcal{A}$ si un point à l'infini a été adjoint. Ce qui montre que T est une variable aléatoire discrète ($\bar{T}$ est au plus dénombrable muni de sa tribu discrète). Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'ensemble $\{s \in \mathbb{T} : s \leqslant t\}$ est au plus dénombrable et on a $\{T \leqslant t\} = \bigcup_{s \leqslant t} \{T = s\} \in \mathcal{F}_t$ puisque, pour $s \leqslant t$, $\{T = s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Réciproquement, si T est un temps d'arrêt, pour $t \in \mathbb{T}$, on a $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\{T \leqslant t-1\} \in \mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$, et ainsi $\{T = t\} = \{T \leqslant t\} \backslash \{T \leqslant t-1\} \in \mathcal{F}_t$. □

Remarques. — *a*) Cette propriété cesse d'être vraie lorsque $\mathbb{T}$ est un sous-intervalle de $\mathbb{R}$.

b) Dans le cas du jeu de pile ou face infini, on a $\{T = n\} = \{\xi_1 = 0, \ldots, \xi_{n-1} = 0, \xi_n = 1\} \in \mathcal{F}_n^\xi$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui montre que T est un temps d'arrêt et permet de déterminer immédiatement sa loi.

Théorème 3. — (i) *Toute variable aléatoire $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \bar{\mathbb{T}}$ constante est un temps d'arrêt.*

(ii) *Si $(T_k)_k$ est une famille non vide au plus dénombrable de temps d'arrêt, alors $\sup_k(T_k)$ est un temps d'arrêt. De même, si $(T_k)_k$ est une suite croissante de temps d'arrêt, sa limite T est un temps d'arrêt.*

(iii) *Si $(T_k)_k$ est une famille non vide au plus dénombrable de temps d'arrêt, bornée inférieurement ou telle que $\inf_k(T_k)$ est à valeurs dans $\bar{\mathbb{T}}$. Alors, en temps discret, $\inf_k(T_k)$ est un temps d'arrêt, et, en temps continu, $\inf_k(T_k)$ est un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}_+$.*

De même, si $(T_k)_k$ est une suite décroissante de temps d'arrêt, bornée inférieurement ou de limite une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{T}}$, sa limite est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt en temps discret, $\mathcal{F}_+$-temps d'arrêt en temps continu ; si la suite est de plus stationnaire, c'est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.

(iv) *Supposons $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ par exemple. Si $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \bar{\mathbb{T}}$ est un temps d'arrêt et $t \geqslant 0$, alors $T + t : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \bar{\mathbb{T}}$ est un temps d'arrêt.*

Démonstration. — (i) Si T est une constante, pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $\{T \leqslant t\} \in \{\varnothing, \Omega\} \in \mathcal{F}_t$.

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a

$$\left\{\sup_k(T_k) \leqslant t\right\} = \bigcap_k \{T_k \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Pour une suite croissante, remplacer $\sup_k(T_k)$ par T.

(iii) En temps discret, l'infimum, lorsqu'il est fini est nécessairement atteint ; on a alors pour $t \in \mathbb{T}$,

$$\left\{\inf_k(T_k) \leqslant t\right\} = \bigcup_k \{T_k \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t,$$

et ainsi l'infimum d'une suite de temps d'arrêt est toujours un temps d'arrêt. C'est en revanche plus subtil en temps continu puisque l'infimum n'est pas nécessairement atteint. Mais pour $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\left\{\inf_k(T_k) < t+\varepsilon\right\} = \bigcup_k \{T_k < t+\varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Or, pour $\eta > 0$,

$$\left\{\inf_k(T_k) \leqslant t\right\} = \bigcap_{0<\varepsilon<\eta} \left\{\inf_k(T_k) < t+\varepsilon\right\} \in \mathcal{F}_{t+\eta},$$

et donc

$$\left\{\inf_k(T_k) \leqslant t\right\} \in \bigcap_{\eta>0} \mathcal{F}_{t+\eta} = \mathcal{F}_{t+}.$$

Le cas d'une suite décroissante est similaire. L'hypothèse additionnelle éventuelle de stationarité garantit alors que le minimum est atteint.

(iv) Pour $s \in \mathbb{T}$, $\{T+t \leqslant s\} = \{T \leqslant s-t\}$ qui peut être vide si $s-t$ minore strictement $\mathbb{T}$ ou être dans $\mathcal{F}_{s-t} \subset \mathcal{F}_s$ sinon, et donc est dans les deux cas dans $\mathcal{F}_s$. □

Exercice. — Supposons que l'ensemble des temps soit $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Si S et T sont deux temps d'arrêt, montrer que $S+T$ est un temps d'arrêt.

Remarque. — Cette propriété très spécifique au temps discret n'a rien de vraiment naturel. On peut donc sereinement l'oublier.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus défini sur cet espace, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Supposons le temps $\mathbb{T}$ pourvu d'une origine $t = 0$.

Définition 8. — Soit $B \subset E$. Le *temps d'atteinte* de B par X est

$$T^B = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in B\}, \qquad \text{où } \inf \varnothing = \infty.$$

Le *temps d'entrée* de B par X est

$$T^B_{\mathrm{e}} = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}, \qquad \text{où } \inf \varnothing = \infty.$$

Théorème 4 (temps discret). — *Si le processus X est adapté et le sous-ensemble B de E est mesurable, alors les temps d'atteinte et d'entrée de B par X sont des temps d'arrêt.*

Démonstration. — Soit $t \in \mathbb{T}$, on a

$$\left\{T^B \leqslant t\right\} = \bigcup_{0\leqslant s\leqslant t} \{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t \qquad \text{et} \qquad \left\{T^B_{\mathrm{e}} \leqslant t\right\} = \bigcup_{0<s\leqslant t} \{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque ces deux ensembles sont des réunions au plus dénombrables d'éléments de $\mathcal{F}_t$. □

Le cas discret laisse envisager les difficultés qu'on doit rencontrer en temps continu.

Théorème 5 (temps continu). — *Supposons que l'espace E est un espace topologique muni de sa tribu borélienne, et le processus X adapté à trajectoires continues à droite.*

(i) *Si (E,d) est un espace métrique et $F \subset E$ est un fermé, alors T^F et T_{e}^F sont des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.*

(ii) *Si $U \subset E$ est un ouvert, alors T^U et T_{e}^U sont des $\mathcal{F}_+$-temps d'arrêt.*

(iii) *Si $B \subset E$ est un borélien, alors T^B et T_{e}^B sont des $\mathcal{F}_+^{\mathbb{P}}$-temps d'arrêt.*

Démonstration. — On se contente d'écrire sommairement les relations conduisant à la conclusion pour les temps d'atteinte. L'hypothèse de continuité à droite permet de se limiter à des instants rationnels.

(i) Pour $t \in \mathbb{T}$, on a $\{T^F \leqslant t\} = \{\omega \in \Omega : \inf_{s \in \mathbb{Q}, s \leqslant t} d(X_s(\omega), F) = 0\} \in \mathcal{F}_t$.

(ii) Pour $t \in \mathbb{T}$ et $\varepsilon > 0$, $\{T^U < t + \varepsilon\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}, s < t+\varepsilon} \{X_s \in U\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

(iii) L'argument est ici plus complexe : on utilise le fait qu'un processus adapté à trajectoires continues à droite est progressif, puis on utilise un résultat non trivial de mesurabilité du début d'un ensemble progressif. Le résultat est donc admis faute de temps. □

Remarque. — Le dernier temps de retour $L^B = \sup\{t \geqslant 0 : X_t \in B\}$ (L vient de l'anglais *last exit time* ou plus exactement *last sejourn time*) n'est généralement pas un temps d'arrêt de la filtration naturelle de X, complétée, rendue continue à droite, ou non.

Définition 9. — Soient $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus à valeurs dans un espace d'états $(E, \mathcal{E})$ et $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{T}$ un temps aléatoire. On définit l'application

$$\begin{aligned} X_T : \Omega &\longrightarrow E \\ \omega &\longmapsto X_{T(\omega)}(\omega) \end{aligned}$$

qui est le processus X observé au temps T. Lorsque le temps aléatoire T peut prendre une valeur infinie n'appartenant pas à $\mathbb{T}$, $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \bar{\mathbb{T}}$, on adjoint à E un point isolé δ — souvent appelé *cimetière* ou point à l'infini — et on pose alors

$$\begin{aligned} X_T : \Omega &\longrightarrow \bar{E} = E \cup \{\delta\} \\ \omega &\longmapsto X_T(\omega) = \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega) \in \mathbb{T} \\ \delta & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

l'espace $\bar{E} = E \cup \{\delta\}$ étant muni de la tribu $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{B \cup \{\delta\} : B \in \mathcal{E}\}$.

Si le processus X est mesurable, et T est une variable aléatoire, alors X_T est une variable aléatoire.

L'affirmation qui termine cette définition se justifie par composition d'applications mesurables

$$\begin{array}{ccccc} (\Omega, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \big(\bar{\mathbb{T}} \times \Omega, \bar{\mathcal{T}} \otimes \mathcal{A}\big) & \longrightarrow & \big(\bar{E}, \bar{\mathcal{E}}\big) \\ \omega & \longmapsto & \big(T(\omega), \omega\big) & \longmapsto & X_T(\omega) \end{array}$$

dont la vérification est simplement ennuyeuse compte tenu de l'ajout d'eventuels infinis, mais immédiate sans eux.

Lorsque le temps est discret, ce résultat est presque une évidence.

Exercice. — Montrer que $\bar{\mathcal{E}}$ est la plus petite tribu sur $\bar{E}$ contenant $\mathcal{E}$ et le singleton $\{\delta\}$, c'est-à-dire $\mathcal{E} \vee \{\delta\}$.

Définition 10. — Soit T un temps d'arrêt. La tribu des événements antérieurs à T est notée $\mathcal{F}_T$ et définie par

$$A \in \mathcal{F}_T \iff A \in \mathcal{A} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{T}, \quad A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Théorème 6. — (i) *La famille $\mathcal{F}_T$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.*

(ii) *Si $T = t$ est un temps constant, on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$. Si T est un temps d'arrêt majoré par $t \in \mathbb{T}$, alors $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_t$.*

(iii) *Soient S et T deux temps d'arrêt. Alors*

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F}_S, \qquad A \cap \{S \leqslant T\} \in \mathcal{F}_T,$$

en particulier $\{S \leqslant T\}$, $\{S = T\}$, $\{S < T\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_S$ et $\mathcal{F}_T$. Si de plus $S \leqslant T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Démonstration. — (i) Vérifions que $\mathcal{F}_T$ est une tribu. On a $\varnothing \in \mathcal{F}_T$ de manière évidente. Si $A \in \mathcal{F}_T$, alors pour $t \in \mathbb{T}$, on a $\{T \leqslant t\} = (A \cup A^c) \cap \{T \leqslant t\} = (A \cap \{T \leqslant t\}) \cup (A^c \cap \{T \leqslant t\})$ réunion disjointe, et ainsi $A^c \cap \{T \leqslant t\} = \{T \leqslant t\} \backslash (A \cap \{T \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t$ par hypothèse, ainsi $A^c \in \mathcal{F}_T$. Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}_T$, alors, pour $t \in \mathbb{T}$, $\big(\bigcup_n A_n\big) \cap \{T \leqslant t\} = \bigcup_n \big(A_n \cap \{T \leqslant t\}\big) \in \mathcal{F}_t$, et donc $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_T$.

(ii) Soit $T = t$ un temps d'arrêt constant. Soit $A \in \mathcal{F}_t$. Pour $s \in \mathbb{T}$, si $s < t$, on a $\{T \leqslant s\} = \varnothing$, donc $A \cap \{T \leqslant s\} = \varnothing \in \mathcal{F}_s$, et si $s \geqslant t$, $\{T \leqslant s\} = \Omega$, donc $A \cap \{T \leqslant s\} = A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$. Ainsi $A \in \mathcal{F}_T$. Si $A \in \mathcal{F}_T$, $\{T \leqslant t\} = \Omega$ et $A \cap \{T \leqslant t\} = A \in \mathcal{F}_t$. On a donc $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Soit T un temps d'arrêt majoré par $t \in \mathbb{T}$. Si $A \in \mathcal{F}_T$, on a $\{T \leqslant t\} = \Omega$ et $A \cap \{T \leqslant t\} = A \in \mathcal{F}_t$. On a donc bien $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_t$.

(iii) Pour $t \in \mathbb{T}$, on a l'identité suivante :

$$A \cap \{S \leqslant T\} \cap \{T \leqslant t\} = \big(A \cap \{S \leqslant t\}\big) \cap \{T \leqslant t\} \cap \{S \wedge t \leqslant T \wedge t\}.$$

Si A appartient à $\mathcal{F}_S$, les trois événements à droite sont dans $\mathcal{F}_t$: $A \cap \{S \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ car $A \in \mathcal{F}_S$; $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ car T est un temps d'arrêt ; et enfin $S \wedge t$ et $T \wedge t$ sont deux temps d'arrêts bornés par t, donc ce sont deux variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables ; il en est de même de $(S \wedge t, T \wedge t) : \Omega \to \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ l'image étant munie de la tribu produit qui est, aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu, la tribu à laquelle on s'attend sur $\mathbb{T}^2$ (ou bien discrète ou bien borélienne) et pour laquelle le cadran supérieur $\{(s, s') \in \mathbb{T}^2 : s \leqslant s'\}$ est mesurable, et ainsi son image réciproque $\{S \wedge t \leqslant T \wedge t\}$ par $(S \wedge t, T \wedge t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. □

Théorème 7. — *Soient X un processus progressif et T un temps d'arrêt, alors X_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Démonstration. — Examinons déjà le cas discret pour lequel l'hypothèse de progressivité est inutile. Soit $B \in \bar{\mathcal{E}}$. On a

$$\{X_T \in B\} = \bigcup_{t \in \overline{\mathbb{T}}} \{X_t \in B\} \cap \{T = t\}$$

avec, pour $t \in \mathbb{T}$, $\{X_t \in B\}$ et $\{T = t\} \in \mathcal{F}_t$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{T}$,

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leqslant t\} = \bigcup_{s \leqslant t} \{X_s \in B\} \cap \{T = s\} \in \mathcal{F}_t.$$

Donc $\{X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$ pour tout $B \in \bar{\mathcal{E}}$.

Passons au temps continu. Pour $B \in \mathcal{E}$ et $t \in \mathbb{T}$, nous avons à montrer que $\{X_T \in B\} \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ (noter que $B \in \mathcal{E}$ et non $B \in \bar{\mathcal{E}}$). Posons $T' = T$ si $T \leqslant t$ et $T' = \infty$ si $T > t$, ainsi que $X_{T'} = X_T$ si $T \leqslant t$ et $X_{T'} = \delta$ si $T > t$. La variable T' est $\mathcal{F}_t$-mesurable : $\{T' = \infty\} = \{T \leqslant t\}^c \in \mathcal{F}_t$ et, pour tout $s \leqslant t$, $\{T' \leqslant s\} = \{T \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. De plus, par progressivité, $(s,\omega) \in (t] \times \Omega, \mathcal{T}_t \otimes \mathcal{F}_t) \mapsto X_s(\omega) \in (E, \mathcal{E})$ est mesurable, et on en déduit aisément que $(s,\omega) \in ((t] \cup \{\infty\}) \times \Omega, \bar{\mathcal{T}}_t \otimes \mathcal{F}_t) \mapsto X_s(\omega) \in (\bar{E}, \bar{\mathcal{E}})$ l'est aussi. Par composition,

$$\begin{array}{ccccc} (\Omega, \mathcal{F}_t) & \longrightarrow & \big((t] \cap \{\infty\}\big) \times \Omega, \bar{\mathcal{T}}_t \otimes \mathcal{A}\big) & \longrightarrow & \big(\bar{E}, \bar{\mathcal{E}}\big) \\ \omega & \longmapsto & \big(T'(\omega), \omega\big) & \longmapsto & X_{T'}(\omega) \end{array}$$

est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Donc, pour tout $B \in \mathcal{E}$, $t \in \mathbb{T}$, $\{X_T \in B\} \cap \{T \leqslant t\} = \{X_{T'} \in B\} \in \mathcal{F}_t$, d'où la conclusion. $\square$

DÉFINITION 11. — Soient $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus et $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \bar{\mathbb{T}}$ un temps aléatoire. On appelle processus X arrêté au temps T le processus $(X_{t \wedge T})_{t \in \mathbb{T}}$, il est noté $X|^T$.

Remarques. — *a*) Pour s'assurer que $X|^T$ est bien un processus, c'est-à-dire que chaque $X_{t \wedge T}$ est mesurable, il suffit de supposer que le processus X est mesurable (c'est toujours le cas en temps discret), et que T est une variable aléatoire.

b) Si le processus X est adapté à une filtration $\mathcal{F}$, pour que $X|^6 T$ le soit aussi, il suffit de supposer que le processus X est progressif (c'est toujours le cas en temps discret) et que T est un temps d'arrêt.

c) L'arrêt conserve les propriétés de régularité trajectorielle telles que la continuité ou être càdlàg.

3. Conditionnement

En Probabilités, le conditionnement revêt deux aspects. Le premier est lié aux probabilités conditionnelles, c'est-à-dire à une spécialisation du cadre probabiliste à un événement donné : si B est un événement de probabilité strictement positive,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\,.\,|\,B) : \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

est la mesure de probabilité sachant B. Notamment, on peut définir l'espérance d'une variable aléatoire réelle X sachant l'événement B comme

$$\mathbb{E}[X\,|\,B] = \frac{\mathbb{E}[X \times \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$$

qui est bien l'espérance de X par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\,.\,|B)$. C'est une opération de désintégration de la mesure de probabilité, l'opération inverse consistant via la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(A\,|\,B_n) \times \mathbb{P}(B_n) \qquad \text{ou encore} \qquad \mathbb{E}[X] = \sum_n \mathbb{E}[X\,|\,B_n] \times \mathbb{P}(B_n),$$

lorsque $(B_n)_n$ est un système complet d'événements, à intégrer une famille de probabilités. Ceci est supposé assez bien connu et il n'en sera pas fait de rappels formels.

Le second aspect se résume en la restriction du cadre probabiliste à une sous-tribu, c'est-à-dire à une diminution globale de l'information. Si pour la mesure de probabilité, cela consiste simplement en sa restriction à une sous-tribu, pour les variables aléatoires cela se traduit par une projection sur un espace de variables aléatoires mesurables pour la sous-tribu.

Définition. — Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. La mesure ν est absolument continue par rapport à μ, et on note alors $\nu \ll \mu$, si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(B) = 0$ on a $\nu(B) = 0$.

Théorème de Radon–Nikodym. — *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, μ mesure positive, ν mesure positive ou signée. Si ν est absolument continue par rapport à μ il existe une unique, à égalité μ-presque sûre près, fonction mesurable $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ (positive si ν est une mesure positive) telle que*

$$\textit{pour tout } B \in \mathcal{E}, \qquad \nu(B) = \int_B f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_E \mathbb{1}_B(x) \times f(x)\, \mu(\mathrm{d}x).$$

Une telle application f est alors appelée densité de Radon–Nikodym de ν par rapport à μ et parfois notée $\mathrm{d}\nu/\,\mathrm{d}\mu$ (*voir* [5]).

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Définition. — Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une variable aléatoire intégrable. Il existe une unique (à équivalence presque sûre près) variable aléatoire Y $\mathcal{B}$-mesurable telle que

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] \qquad \text{pour tout } B \in \mathcal{B},$$

cette variable aléatoire est appelée *espérance conditionnelle* de X sachant $\mathcal{B}$ et est notée $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$.

L'application $B \in \mathcal{B} \mapsto \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$ est une mesure bornée sur $(\Omega, \mathcal{B})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. L'espérance conditionnelle n'est autre que la dérivée, ou densité, de Radon–Nikodym de cette mesure par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$: si on note $X\mathbb{P}$ la mesure $B \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \times X] \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = \frac{\mathrm{d}(X\mathbb{P})|_{\mathcal{B}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathcal{B}}}\,.$$

Intuitivement, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$ est l'idée qu'on se fait de X avec pour seules informations disponibles celles qui sont contenues dans $\mathcal{B}$.

Rigoureusement, l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire est une classe de variables aléatoires et une variable aléatoire d'une telle classe est qualifiée de version de l'espérance conditionnelle. Dans des cas simples, comme ceux qui suivent, sa détermination apparaît comme unique. On peut néanmoins garder à l'esprit qu'il est toujours possible de compléter les tribus considérées et ainsi perdre l'unicité (apparente).

Exemples. — *a*) Soit B un événement de probabilité comprise strictement entre 0 et 1, et soit X une variable aléatoire réelle, intégrable par exemple. Nous avons $\mathcal{B} = \sigma(B) = \{\varnothing, B, B^c, \Omega\}$. L'espérance de X sachant B ou B^c a été rappelée précédemment et

$$Y = \mathbb{E}[X \mid B] \times \mathbb{1}_B + \mathbb{E}[X \mid B^c] \times \mathbb{1}_{B^c}$$

est une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable vérifiant

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_\varnothing Y] = 0 = \mathbb{E}[\mathbb{1}_\varnothing X], \qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_B Y] = \mathbb{E}[X \mid B]\, \mathbb{P}(B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B X],$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B^c} Y] = \mathbb{E}[X \mid B^c]\, \mathbb{P}(B^c) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B^c} X], \qquad \mathbb{E}[\mathbb{1}_\Omega Y] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_\Omega X].$$

Ainsi, Y vérifie la définition de l'espérance conditionnelle, nous avons donc dans ce cas

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[X \mid B] \times \mathbb{1}_B + \mathbb{E}[X \mid B^c] \times \mathbb{1}_{B^c}$$

par définition même de l'espérance conditionnelle.

b) Plus généralement, si $(B_n)_n$ est un système complet d'événements (partition au plus dénombrable de Ω en événements de probabilités strictement positives), $\mathcal{B} = \sigma((B_n)_n)$, on a

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = \sum_n \mathbb{E}[X \mid B_n] \times \mathbb{1}_{B_n}.$$

En effet, cela définit bien une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable qui vérifie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{B_m} \times \sum_n \mathbb{E}[X \mid B_n]\mathbb{1}_{B_n}\Big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid B_m]\mathbb{1}_{B_m}\big] \\ &= \mathbb{E}[X \mid B_m] \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_m}] = \mathbb{E}[X \mid B_m] \times \mathbb{P}(B_m) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_m} X]\end{aligned}$$

pour tout m. Comme tout $C \in \mathcal{B}$ est réunion disjointe, au plus dénombrable, de tels B_m, $m \in I$, et qu'alors

$$C = \bigcup_{m \in I} B_m, \qquad \mathbb{1}_C = \sum_{m \in I} \mathbb{1}_{B_m},$$

cette identité vaut pour tout $C \in \mathcal{B}$ en place de B_m (argument de convergence dominée, monotone, ou encore par le théorème de Fubini, de Tonelli), identité caractéristique (à égalité presque sûre près) de l'espérance conditionnelle.

c) *Voir* le conditionnement dans un vecteur gaussien.

Remarque. — Dans les exemples discrets qui précèdent, on aurait pu remplacer la tribu $\mathcal{B}$ par la donnée d'une variable aléatoire discrète $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$, auquel cas $\mathcal{B} = \sigma(Z)$ et $B_n = \{Z = n\}$, pour obtenir une écriture fonctionnelle du type

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = \sum_z \mathbb{E}[X \mid Z = z]\mathbb{1}_{\{Z=z\}},$$

ce qui se noterait naturellement $\mathbb{E}[X \mid Z]$. Dans un cadre tout à fait général, on peut effectuer une pareille approche quitte à considérer comme variable $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{B})$ l'identité.

Quelques propriétés. — (i) *Linéarité, monotonie, continuité par limite monotone, inégalité de Jensen* ($\phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]) \leqslant \mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{B}]$ *lorsque les conditions naturelles d'intégrabilité sont satisfaites), idempotence* ($\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = X$ *si* X *est* $\mathcal{B}$*-mesurable), ...*

(ii) *Transitivité : soient* X *une variable aléatoire intégrable, et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ *deux sous-tribus de* $\mathcal{A}$ *; on a*

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \bigm| \mathcal{C}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{C}] \bigm| \mathcal{B}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{C}] \qquad \textit{presque sûrement.}$$

(iii) *Factorisabilité : si* H *est une variable aléatoire* $\mathcal{B}$*-mesurable telle que* $H \times X$ *est intégrable, alors on a*

$$\mathbb{E}[H \times X \mid \mathcal{B}] = H \times \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \qquad \textit{presque sûrement.}$$

Démonstration. — Laissée en exercice. □

Proposition 2. — *Si* $H : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire intégrable indépendante d'une sous-tribu* $\mathcal{B}$*, alors* $\mathbb{E}[H \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[H]$ *presque sûrement.*

Démonstration. — Soit $B \in \mathcal{B}$, alors H et $\mathbb{1}_B$ sont deux variables aléatoires intégrables et indépendantes. Ainsi, $H\mathbb{1}_B$ est intégrable (évident ici), et $\mathbb{E}[H\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[H] \times \mathbb{E}[B]$. Ainsi, la variable aléatoire constante $\mathbb{E}[H]$, qui est $\mathcal{B}$-mesurable, vérifie la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, on a donc $\mathbb{E}[H \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[H]$ presque-sûrement. □

4. Martingales

Rappelons que si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous désignons par $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t$ sa tribu terminale qui est une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On renvoie à [1] ou à [2] pour l'approfondissement des notions que nous ne faisons que survoler ici.

Définition 12. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) dans la filtration $\mathcal{F}$ si

(i) X est $\mathcal{F}$-adapté (pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable) ;

(ii) pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est intégrable ;

(iii) pour tout $s \leqslant t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] = X_s$ (resp. $\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] \leqslant X_s$, $\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] \geqslant X_s$) presque sûrement.

La notion de martingale s'étend coordonnées par coordonnées à $\mathbb{R}^n$ et même à $\mathbb{C}^n$ (alors que les sur- et sous-martingales sont des notions réelles). Une sur-martingale a tendance à décroître : vu du présent, la valeur future est en moyenne inférieure à la valeur présente. C'est l'opposé pour une sous-martingale. D'ailleurs si X est une sur-martingale, $-X$ est une sous-martingale et réciproquement. Pour une martingale, ce qu'on peut prévoir de l'avenir n'est ni meilleur ni pire que ce qu'il se passe au temps présent.

Proposition 3. — *Si un processus est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) dans une filtration, alors c'est une martingale (resp. sur-martingale, sous-martingale) dans sa filtration naturelle.*

Démonstration. — Exercice.

Remarque. — Le terme « martingale » désigne au départ une pièce de tissu de l'harnachement d'un cheval ; il y a aussi la bande de tissu de certaines vestes. C'est devenu un terme de jeux de hasard qui désigne une technique gagnante. En Mathématiques, si le processus représente le gain à un jeu de hasard, c'est plutôt la situation d'ex-æquo (*fair game*, risque neutre).

Les adjectifs « sur » et « sous » proviennent de la théorie du potentiel (l'image du mouvement brownien par une application sur-harmonique est une sur-martingale, ...).

Exemples. — *a*) Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. Le processus $X_t = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_t]$, $t \in \mathbb{T}$, définit une martingale. On noetra au passage que l'espérance conditionnelle d'une fonction indicatrice n'est pas nécessairement une fonction indicatrice.

b) Soit $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle intégrable. Le processus $X_t = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}_t]$, $t \in \mathbb{T}$, définit une martingale.

Exercice. — Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables, de même espérance $m \in \mathbb{R}$. On pose $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $X_0 = 0$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$. Quelle est la nature du processus $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ par rapport à la filtration $\mathcal{F}$? Décrire le comportement asymptotique de X lorsque les variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ sont de plus identiquement distribuées en utilisant la loi forte des grands nombres pour $m \neq 0$ et le théorème central limite sinon.

Ce qui nous intéressera est le comportement asymptotique des martingales en $+\infty$. On pourra supposer $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. Les théorèmes suivants sont admis. On rappelle qu'une famille $\mathcal{H}$ de variables aléatoires réelles est uniformément intégrable si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \exists\, c > 0, \qquad \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{|H|>c\}}|H|\big] \leqslant \varepsilon \quad \text{pour toute } H \in \mathcal{H}.$$

La notion d'uniforme intégrabilité est une notion de compacité relative dans L^1 muni de la topologie faible induite par le dual L^∞.

THÉORÈME DE CONVERGENCE DES MARTINGALES, CAS L^1. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré.*

(i) *Si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale vérifiant*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty,$$

alors il existe X_∞ une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$-mesurable telle que X converge vers X_∞ presque sûrement lorsque $t \to \infty$.

(ii) *Pour tout martingale X, on a les équivalences entre les propositions suivantes :*

a) le processus X est uniformément intégrable ;

b) le processus X converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;

c) $\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ et il existe une variable aléatoire $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{T}$, $X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ presque sûrement ;

d) il existe $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X_t = \mathbb{E}[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$ presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{T}$

Exercice. — Voir ce qu'il se passe pour les exemples précédents.

Cet énoncé est très technique. C'est lié au fait que la topologie de L^1 est plus compliquée que celle des espaces L^p pour $p > 1$. Les conditions les plus favorables sont d'avoir simultanément l'uniforme intégrabilité et la bornitude dans L^1. Dans L^p, $p > 1$, c'est plus simple puisque la bornitude dans L^p implique alors l'uniforme intégrabilité.

THÉORÈME DE CONVERGENCE DES MARTINGALES, CAS L^p. — *Soient X une martingale et $p \in \,]1, \infty[$. Si*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty,$$

alors X converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers la limite presque sûre X_∞.

DÉFINITION 13. — Lorqu'une martingale converge dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers une variable aléatoire X_∞, on dit que la martingale est fermée par la variable aléatoire X_∞ dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

THÉORÈME D'ARRÊT DE DOOB. — *Soient X une martingale, $S \leqslant T$ deux temps d'arrêt. Si le processus arrêté $X|^T$ est uniformément intégrable, alors*

$$\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_S] = X_S \qquad \text{presque sûrement.}$$

Remarques. — *a*) La condition d'uniforme intégrabilité de $X|^T$ est souvent satisfaite grâce à des conditions plus fortes et plus simples : X uniformément intégrable ou $X|^T$ borné dans L^p, $p \in \,]1, \infty]$, par exemple.

b) Les conditions du théorème d'arrêt de Doob ne sont pas anodines. Supposons $S = 0$ et T le premier temps d'atteinte de N dans un jeu de pile ou face où on gagne ou on perd 1 euro à chaque tour suivant le résultat. Le gain X est alors une martingale à valeurs entières lorsque la pièce est équilibrée. On constate que T est presque sûrement fini, que $X_T = N$, alors que le gain au fil du temps est une martingale et qu'on s'attend à un gain nul en moyenne.

Pour $M, N \geqslant 1$, posons T' le temps d'atteinte de $\{-M, N\}$. Alors T' est presque sûrement fini (cela peut se voir en disant que l'apparition de $M + N$ gains successifs au cours du jeu est de probabilité 1 par Borel–Cantelli) et $X_{T'} \in \{-M, N\}$. Le processus $X|^{T'}$ est borné et on a par le théorème d'arrêt de Doob :

$$0 = X_0 = \mathbb{E}[X_{T'}] = -M \times \mathbb{P}\big\{X_{T'} = -M\big\} + N \times \mathbb{P}\big\{X_{T'} = N\big\}$$

comme de plus $\mathbb{P}\{X_{T'} = -M\} + \mathbb{P}\{X_{T'} = N\} = 1$, on obtient

$$\mathbb{P}\{X_{T'} = -M\} = \frac{N}{M+N} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\{X_{T'} = N\} = \frac{M}{M+N}.$$

c) Le théorème d'arrêt s'applique aux sur-martingales et aux sous-martingales avec les inégalités qui conviennent. D'ailleurs, on le démontre pour les sur-martingales, le cas des sous-martingales et des martingales s'obtenant comme corollaire immédiat.

Les martingales sont fondamentales en théorie des processus à plusieurs titres. D'une part, leur donnée est équivalente à celle de la filtration. D'autre part, elles apparaissent parfois comme une perception à l'ordre 1 de processus, en particulier pour les processus de Markov. Enfin, elles sont la base du calcul stochastique, c'est-à-dire de l'intégration le long de trajectoires de processus stochastiques. Une esquisse sera faite de cela en travaux dirigés dans le cas discret. En temps continu, il serait bon de mentionner quelques résultats de régularité des trajectoires des (sur-)martingales : elles admettent des modifications càdlàg dans l'espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles (filtration continue à droite, complète).

5. **Le théorème d'extension de Kolmogorov**

Le théorème d'extension de Kolmogorov participe de la même problématique que le théorème de Carathéodory, c'est-à-dire établir l'existence d'une mesure de probabilité sur un espace mesurable prolongeant une donnée plus simple. Son contexte d'utilisation est généralement celui d'un espace produit $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}})$ sur lequel on connaît ce qui devrait être la restriction d'une mesure de probabilité à tous les sous-produits finis. La difficulté est que dès que l'ensemble $\mathbb{T}$ est strictement plus que dénombrable, des hypothèses topologiques doivent être faites sur $(E, \mathcal{E})$ — hypothèses dont on peut se dispenser si $\mathbb{T}$ est au plus dénombrable.

Définition. — Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $\mathbb{T}$ un ensemble. On appelle *famille projective de probabilités* sur $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}})$ une famille $\{\mu_I : I \subset \mathbb{T},\ I \text{ fini}\}$, où $\mu_I : \mathcal{E}^{\otimes I} \to [0,1]$ est une mesure de probabilité pour tout $I \subset \mathbb{T}$ fini, telle que $\mu_I = \mu_J \circ p_{I,J}^{-1}$ pour tout $I \subset J \subset \mathbb{T}$ finis.

Dans cette définition, la notation $p_{I,J}$ désigne la projection de E^J sur E^I. La condition de projectivité dit que si $I \subset J \subset \mathbb{T}$ sont finis, la « restriction » de μ_J à $\mathcal{E}^{\otimes I}$ est égale à μ_I. C'est une condition de consistance nécessaire si les mesures μ_I sont toutes les restrictions d'une même mesure μ définie sur $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$.

Théorème d'extension de Kolmogorov. — *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace polonais muni de sa tribu borélienne et $\mathbb{T}$ un ensemble. Si $\{\mu_I : I \subset \mathbb{T},\ I \text{ fini}\}$ est une famille projective de probabilités, alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$ telle que $\mu_I = \mu \circ p_I^{-1}$ pour tout $I \subset \mathbb{T}$ fini.*

Corollaire 1. — *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace polonais muni de sa tribu borélienne et $\mathbb{T}$ un ensemble. Si $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une famille de mesure de probabilité, il existe une unique mesure de probabilité μ sur $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$ dont les projections finies sont les produits des mesures correspondantes.*

On rappelle qu'un espace polonais est un espace métrique (ou métrisable) séparable (admettant une partie dénombrable dense) et complet (toute suite de Cauchy est convergente). Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ sont bien sûr polonais, les ensembles finis ou dénombrables munis de leur topologie discrète (avec une métrique telle que $d(x,y) = 0$ si $x = y$, 1 sinon, par exemple) le sont aussi. La notation p_I précédente désigne évidemment la projection de $E^{\mathbb{T}}$ dans E^I.

Remarque. — Il existe plusieurs versions de ce théorème en fonction des hypothèses qu'on souhaite faire sur $\mathbb{T}$ et E. Par exemple, l'une d'entre elles exige une propriété de tension de la famille de mesures de probabilité, qui est une condition de compacité. De telles conditions ne se rencontrent que lorsque l'espace E appartient à des classes plus générales d'espaces topologiques, classes que nous ne rencontrerons pas.

Références

[1] Neveu (J.), *Martingales à temps discret*, Masson (1972).

[2] Ouvrard (J.-Y.), *Probabilités*, tome II, Master–Agrégation, Cassini (2004).

[3] Dellacherie (C.), Meyer (P.-A.), *Probabilités et Potentiel*, chapitres I à IV, Hermann (1975).

[4] Dellacherie (C.), Meyer (P.-A.), *Probabilités et Potentiel*, chapitres V à VIII, Hermann (1980).

[5] Rudin (W.), *Analyse réelle et complexe*, Masson (1975).

Chapitre II

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROCESSUS DE MARKOV

Introduction

Un des objets[1] de la théorie des processus est la prédiction de phénomènes aléatoires : connaissant le passé à l'instant t d'un processus X, dans quelle mesure peut-on prévoir quelles valeurs prendra le processus à des dates ultérieures. Un cas extrême est celui où toutes les variables X_t, $t \in \mathbb{T}$, sont indépendantes. Partant de là, une approche systématique consisterait à effectuer une classification des dépendances, chaque classe définissant un type de processus. Dans cette optique, les processus de Markov apparaissent comme le niveau 1 d'une telle classification.

Voir les processus de Markov seulement comme une strate de la théorie des processus serait limitatif. Ils sont intimement liés à des problèmes d'évolution issus de la Physique, de la théorie du potentiel, et peut-être, de manière méta-mathématique, à la représentation du temps.

Dans ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $(\mathbb{T}, \leqslant)$ le temps, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une filtration sur cet espace, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_t$ sa tribu terminale, et $(E, \mathcal{E})$ un espace d'états.

1. **Définitions et premières propriétés**

Définition 14. — Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ est markovien dans la filtration $\mathcal{F}$ si :

(i) X est adapté à la fitration $\mathcal{F}$ (pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-mesurable) ;

(ii) pour toute application mesurable bornée $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (respectivement positive), et tous $s \leqslant t \in \mathbb{T}$, on a

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s] \qquad \text{presque sûrement.} \qquad \text{(propriété de Markov simple)}$$

Remarques. — *a*) $\mathbb{E}[\,.\,|\mathcal{F}_s]$ est l'espérance conditionnelle sachant la tribu engendrée par X_s, c'est-à-dire $\sigma(X_s)$. Cette notation abrégée est pleinement justifiée par le lemme de Doob plus loin.

b) Les espérances conditionnelles n'ont pas nécessairement une détermination unique puisqu'elles sont définies seulement à égalité presque sûre près. Pour éviter de *choisir* des versions, on pourrait dans toute la suite ne considérer que des classes de variables aléatoires à égalité presque sûre près et supposer les tribus complètes. Nous ne le ferons pas, du moins explicitement.

c) L'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ n'est pas nécessairement un espace vectoriel. Ainsi pour observer X_t depuis le passé $\mathcal{F}_s$ à l'aide d'espérances conditionnelles, on doit considérer des « lectures » $f(X_t) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ de la variable aléatoire X_t, l'ensemble de celles-ci la déterminant complètement (considérer, par exemple, l'ensemble des $\mathbb{1}_B(X_t)$ pour $B \in \mathcal{E}$). Il faut se garder

---

1. L'objet fondamental de la théorie des processus, ou le moteur qui l'a poussé si loin, est en fait la traduction et la résolution de problèmes issus de l'Analyse par des méthodes dites probabilistes.

de croire que la notion de processus markovien est plus générale que la notion de martingales, il y a seulement un air de famille. PPour nous les processus de Markov sont à ranger du côté des modèles, les martingales du côté des outils.

Lemme de Doob (rappel). — *Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire quelconque et $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (F, \mathcal{F})$ une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique F séparable complet muni de sa tribu borélienne $\mathcal{F} = \mathcal{B}(F)$. La variable aléatoire Y est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe $g : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ mesurable telle que $Y = g(X)$.*

Remarques. — *a*) Dans les applications, on a généralement $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. En revanche, il est bon de garder à l'esprit que $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable quelconque.

b) Une telle fonction g n'est généralement pas uniquement déterminée. La notion générale de processus markovien ne suffit pas pour exprimer analytiquement les espérances conditionnelles rencontrées.

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un processus, nous noterons $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$ ou $\mathcal{F}^X_{s\leqslant}$ la tribu $\sigma\{X_t : t \geqslant s\}$ la tribu du futur du processus X à l'instant s.

Proposition 4. — *Un processus adapté X est markovien si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) *pour tout $B \in \mathcal{E}$ et tous $s \leqslant t \in \mathbb{T}$,*

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X_t) \mid X_s] \qquad p.s.,$$

autrement noté $\mathbb{P}\{X_t \in \mathcal{B} \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbb{P}\{X_t \in B \mid X_s\}$ presque sûrement[2] *;*

(ii) *pour tous $s \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \in \mathbb{T}$, $f_1, \ldots, f_n : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ mesurables bornées (ou positives)*

$$\mathbb{E}\big[f_1\big(X_{t_1}\big) \times \cdots \times f_n\big(X_{t_n}\big) \bigm| \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[f_1\big(X_{t_1}\big) \times \cdots \times f_n\big(X_{t_n}\big) \bigm| X_s\big] \qquad p.s.\,;$$

(iii) *pour tout $s \in \mathbb{T}$ et toute application $F : (\Omega, \mathcal{F}^X_{\geqslant s}) \to \mathbb{R}$ mesurable, on a*

$$\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[F \mid X_s] \qquad p.s.\,;$$

(iv) *pour tout $s \in \mathbb{T}$ et tout événement $A \in \mathcal{F}^X_{\geqslant s}$, on a*

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid X_s] \qquad p.s.,$$

autrement noté $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(A \mid X_s)$ presque sûrement.

Démonstration. — (i) Si X est markovien au sens de la définition, la propriété (i) est satisfaite en prenant $f = \mathbb{1}_B$ pour $B \in \mathcal{E}$ qui est une application mesurable, bornée et positive. Réciproquement, si (i) a lieu, la propriété est vérifiée pour toute combinaison linéaire finie f de fonctions indicatrices. Le théorème de convergence dominé (conditionnel) permet alors de passer à la limite pour toute $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée (respectivement, le théorème de convergence monotone [conditionnel] à $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}_+$ positive).

(ii) Il est clair que si (ii) est vraie, avec $n = 1$, on obtient la markoviennité de X. Réciproquement, notons $\phi_1(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = f_1(X_{t_1}) \times \cdots \times f_n(X_{t_n})$ qui est une variable

2. Noter que ce sont des [classes de] variables aléatoires.

aléatoire « cylindrique ». On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi_1(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\,|\,\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\phi_1(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\,|\,\mathcal{F}_{t_{n-1}}]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f_1(X_{t_1})\times\cdots\times f_n(X_{t_n})\,|\,\mathcal{F}_{t_{n-1}}]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\
&= \mathbb{E}\big[f_1(X_{t_1})\times\cdots\times f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\times\mathbb{E}[f_n(X_{t_n})\,|\,\mathcal{F}_{t_{n-1}}]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\
\text{(propriété de Markov simple)} &= \mathbb{E}\big[f_1(X_{t_1})\times\cdots\times f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\times\mathbb{E}[f_n(X_{t_n})\,|\,X_{t_{n-1}}]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\
\text{(lemme de Doob)} &= \mathbb{E}\big[f_1(X_{t_1})\times\cdots\times f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\times g(X_{t_{n-1}})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\
&= \mathbb{E}\big[\phi_2(X_{t_1},\dots,X_{t_{n-1}})\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]
\end{aligned}$$

où $\phi_2(X_{t_1},\dots,X_{t_{n-1}})$ s'écrit de manière semblable à $\phi_1(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$, c'est-à-dire que c'est aussi une variable aléatoire cylindrique mais qui est d'ordre strictement plus petit. Noter que par monotonie de l'espérance conditionnelle, si f_n est bornée (resp. positive), on peut supposer g bornée (resp. positive). En itérant le conditionnement,

$$\mathbb{E}[\phi_1(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\phi_{n-1}(X_{t_1})\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\phi_{n-1}(X_{t_1})\,|\,X_s] \qquad \text{p.s.}$$

Puisque d'après ce calcul $\mathbb{E}[\phi_1(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\,|\,\mathcal{F}_s]$ est $\sigma(X_s)$-mesurable, alors elle coïncide avec $\mathbb{E}[\phi_1(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\,|\,X_s]$ presque sûrement. D'où la conclusion.

(iii) On utilise le théorème des classes monotones dans sa version fonctionnelle : la classe $\mathcal{C}$ des variables aléatoires $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$-mesurables F vérifiant

$$\mathbb{E}[F\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[F\,|\,X_s] \qquad \text{p.s.}$$

est un espace vectoriel contenant les variables aléatoires constantes et est stable par limite croissante bornée. L'ensemble $\mathcal{K}$ des variables aléatoires $F = f_1(X_{t_1})\times\cdots\times f_n(X_{t_n})$, $s \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, $f_1,\dots,f_n : (E,\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ mesurables bornées, est un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ stable par multiplication. De plus, on sait que l'ensemble des variables aléatoires de cette forme engendre la tribu $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$. Le théorème affirme alors que l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$-mesurables bornées est inclus dans C, d'où la conclusion.

(iv) C'est immédiat en prenant $F = \mathbb{1}_A$ pour $A \in \mathcal{F}^X_{\geqslant s}$. □

Remarque. — *a*) Pour $s \in \mathbb{T}$, la tribu $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$ est la tribu futur du processus X au temps s. Notons qu'avec l'hypothèse d'adaptation, on a seulement supposé $\mathcal{F}^X_s \subset \mathcal{F}_s$.

b) Lorsque le temps $\mathbb{T}$ est discret ($\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$), on utilise l'expression *chaîne de Markov* plutôt que *processus de Markov*.

Proposition 5. — *Soit X un processus markovien dans une filtration $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{G}$ est une sous-filtration de $\mathcal{F}$ dans laquelle X est adapté, alors X est markovien dans $\mathcal{G}$. En particulier, X est markovien dans sa filtration naturelle $\mathcal{F}^X$.*

Démonstration. — Pour tout $s \in \mathbb{T}$, $\sigma(X_s) \subset \mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_s$. On a alors

$$\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s]\,\big|\,\mathcal{G}_s\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,X_s]\,\big|\,\mathcal{G}_s\big]\,\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,X_s] \qquad \text{p.s.}$$

pour tout $t \geqslant 1$ et $f : (E,\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ bornée (ou positive). □

Définition 15. — Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ trois sous-tribus de $\mathcal{A}$. Les tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{D}$ si et seulement si pour tous $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C\,|\,\mathcal{D}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B\,|\,\mathcal{D}] \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C\,|\,\mathcal{D}]$ presque sûrement (ou encore $\mathbb{P}(B \cap C\,|\,\mathcal{D}] = \mathbb{P}(B\,|\,\mathcal{D}] \times \mathbb{P}(C\,|\,\mathcal{D})$ presque sûrement).

Comme précédemment, une telle propriété peut se traduire avec des variables aléatoires F (au lieu de $\mathbb{1}_B$) $\mathcal{B}$-mesurable et G (au lieu de $\mathbb{1}_C$) $\mathcal{C}$-mesurable, bornées (ou positives).

Proposition 6. — *Un processus X adapté à une filtration $\mathcal{F}$ est markovien dans cette filtration si et seulement si pour tout $s \in \mathbb{T}$, $\mathcal{F}_s$ et $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$ sont indépendantes conditionnellement à $\sigma(X_s)$.*

Démonstration. — Soient $B \in \mathcal{F}_s$, $C \in \mathcal{F}^X_{\geqslant s}$ et $D \in \sigma(X_s)$. Supposons X markovien dans la filtration $\mathcal{F}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D \,|\, \mathcal{F}_s]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_B \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, \mathcal{F}_s] \times \mathbb{1}_D\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_B \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, X_s] \times \mathbb{1}_D\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_B \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, X_s] \times \mathbb{1}_D \,\big|\, X_s\big]\Big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \,|\, X_s] \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, X_s] \times \mathbb{1}_D\big].\end{aligned}$$

Si cela est vérifié pour tous B, C et D ainsi choisis, on a l'indépendance conditionnelle. Pour la réciproque, on part de l'indépendance conditionnelle : pour tout $C \in \sigma(X_s)$,

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C \,|\, X_s] \times \mathbb{1}_D\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \,|\, X_s] \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, X_s] \times \mathbb{1}_D\big],$$

pour arriver en remontant les égalités à

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_B \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, X_s] \times \mathbb{1}_D\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{B\cap D} \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, \mathcal{F}_s]\big],$$

ce qui montre en faisant varier $B \cap D$, avec par exemple $D = \Omega$, dans $\mathcal{F}_s$ que

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \,|\, X_s] \qquad \text{p.s.}$$

et donc que le processus X est markovien d'après les caractérisations précédentes. □

Retournement du temps. — La propriété de Markov simple dit que l'évolution future ne dépend que du présent. Ici, le futur est $\mathcal{F}^X_{\geqslant s}$ pour $s \in \mathbb{T}$ (le présent). La propriété d'indépendance conditionnelle suggère une symétrie entre le futur et le passé pourvu que la filtration soit la filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ du processus. Supposons que $\mathbb{T}$ est un ensemble ordonné borné par 0 et T finis. En considérant un processus X markovien dans $\mathcal{F}^X$, $\widehat{X} = (X_{T-t})_{0\leqslant t\leqslant T}$, on a

$$\mathcal{F}^{\widehat{X}}_t = \mathcal{F}^X_{\geqslant T-t} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}^{\widehat{X}}_{\geqslant t} = \mathcal{F}^X_{T-t}$$

qui sont indépendantes conditionnellement à $\sigma(\widehat{X}_t) = \sigma(X_{T-t})$. Le processus retourné au temps T, $\widehat{X}$, est donc markovien.

Exemples. — *a*) Les processus déterministes sont des processus markoviens quelle que soit la filtration considérée. En effet, si $X_t = x(t)$ est une variable aléatoire (presque sûrement) constante, alors pour toute application $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$, $f(X_t)$ est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à $f(x(t))$ et on a $\mathbb{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(x(t)) \,|\, \mathcal{F}_t] = f(x(t)) = \mathbb{E}[f(x(t)) \,|\, X_s] = \mathbb{E}[f(X_t) \,|\, X_s]$ presque sûrement. Pour un processus déterministe, le futur ne dépendant d'aucun aléa, il est toujours indépendant du passé, même conditionnellement au présent.

b) Les suites de variables aléatoires indépendantes sont markoviennes au moins dans leurs filtrations naturelles. Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une suite de variables aléatoires de même espace d'états $(E, \mathcal{E})$ et adaptée à une filtration $\mathcal{F}$. Pour $s \leqslant t$, supposons que X_t est indépendant de $\mathcal{F}_s$, alors pour $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$, $f(X_t)$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et si f est bornée ou de signe constant par exemple, $\mathbb{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)]$ presque sûrement, par indépendance. Notamment, $\mathbb{E}[f(X_t) \,|\, X_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_s] \,|\, X_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t)] \,|\, X_s] = \mathbb{E}[f(X_t)]$ presque sûrement. On a donc bien $\mathbb{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t) \,|\, X_s]$ presque sûrement. Noter que puisque X est supposé adapté, l'hypothèse selon laquelle X_t est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $s \leqslant t$ implique que les variables $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sont indépendantes. Là encore, la traduction de la markoviennité en terme d'indépendance du passé et du futur conditionnellemennt au présent rend cet exemple immédiat.

c) Considérons pour espace d'état $E \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$. Les processus à accroissements indépendants sont markoviens au moins dans leurs filtrations naturelles. Un processus X est à accroissements indépendants si et seulement si pour tous $s \leqslant t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^X$, ou encore si pour tous $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N$, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes. La markoviennité vient du fait suivant : sachant $\{X_s = x\}$, on a $X_t = (X_t - X_s) + x$ qui est indépendant de $\mathcal{F}_s$. Cette esquisse de raisonnement justifie complètement l'affirmation lorsque E est discret. Le cas $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ peut se voir comme un passage à la limite.

d) En temps discret, $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, si $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[0,1]$ par exemple, indépendante de $X_0 : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ et $f_n : E \times [0,1] \to E$, $n \geqslant 1$, une suite d'applications mesurables, alors en posant $X_n = f_n(X_{n-1}, U_n)$, $n \geqslant 1$, on définit un processus markovien (*voir* travaux dirigés). Les algorithmes invoquant le hasard via un générateur de nombres pseudo-aléatoires peuvent en général se comprendre comme une telle construction et donne ainsi naturellement lieu à des processus markoviens.

2. **Noyaux de transition**

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

Définition 16. — On appelle noyau de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ une application

$$\begin{aligned} P : E \times \mathcal{E} &\longrightarrow [0,1] \\ (x, B) &\longmapsto P(x, B) \end{aligned}$$

telle que

(i) pour tout $x \in E$, $P(x, \,.\,) : \mathcal{E} \to [0,1]$, $B \mapsto P(x,B)$ est une mesure de probabilité ;

(ii) pour tout $B \in \mathcal{E}$, $P(\,.\,, B) : E \to [0,1]$, $x \mapsto P(x,B)$ est une application $\mathcal{E}$-mesurable.

Remarques. — *a*) Un noyau de probabilité est aussi appelé noyau de transition : $P(x,B)$ peut s'interpréter comme étant la probabilité partant d'un point $x \in E$ d'arriver dans un sous-ensemble mesurable B de E.

b) Lorsque E est un ensemble fini, voire dénombrable, muni de sa tribu discrète $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, un noyau peut être décrit comme une matrice $P = (P(x,y))_{x,y\in E}$ dont les élément représentent la probabilité de passer de l'état x à l'état y. Quand $(E, \mathcal{E})$ n'est pas discret, la description d'un noyau peut être plus complexe.

Définition 17. — Soit P un noyau de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

(i) Pour $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ application mesurable bornée (resp. positive), on définit

$$\begin{aligned} Pf : (E, \mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_E f(y)\, P(x, \mathrm{d}y) \end{aligned}$$

qui est alors une fonction mesurable bornée (resp. positive).

(ii) Pour $\mu : \mathcal{E} \to [0,1]$ une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$, on définit

$$\begin{aligned} \mu P : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ B &\longmapsto \int_E \mu(\mathrm{d}x)\, P(x, B) \end{aligned}$$

qui est alors une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

Espace d'états fini. — L'action d'un noyau sur une fonction et l'action d'un noyau sur une mesure de probabilité sont clairement duales car exprimant la dualité fonction–mesure.

Lorsque $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini (muni de sa tribu discrète), on convient de représenter les fonctions par des vecteurs colonnes et par conséquent les mesures par des vecteurs lignes :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad \mu(f) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \times f_i$$

avec $\mu_i = \mu\{x_i\}$ et $f_i = f(x_i)$. Les noyaux s'écrivent alors

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } p_{i,j} = P(x_i, x_j) \geqslant 0,$$

et la condition de noyau se résume ici à $p_{i,1} + \cdots + p_{i,n} = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, autrement dit, chaque ligne représente une mesure de probabilité sur E. Une telle matrice est souvent appelée matrice stochastique.

Définition 18. — Soient P et Q deux noyaux de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. On définit la composée PQ de P et de Q par

$$PQ(x, \mathrm{d}z) = \int_E P(x, \mathrm{d}y) Q(y, \mathrm{d}z)$$

qui est un noyau de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

Remarques. — *a*) La composition de noyaux n'est pas une opération commutative en général. Si P décrit comment on va de x à y, Q décrit comment on va de y à z, alors PQ décrit comment on va de x à z en sommant sur tous les y intermédiaires.

b) On vérifie immédiatement que lorsque E est fini, la composée de deux noyaux correspond au produit matriciel des matrices stochastiques correspondantes.

Exercice. — (i) Vérifier directement que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

(ii) Vérifier que toute combinaison barycentrique de matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Définition 19. — (i) Une fonction de transition sur $(E, \mathcal{E})$ est une suite $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$ de noyaux de probabilité telle que pour tous $r \leqslant s \leqslant t \in \mathbb{T}$,

$$P_{r,s} P_{s,t} = P_{r,s} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_E P_{r,s}(x, \mathrm{d}y) P_{s,t}(y, \mathrm{d}z) = P(x, \mathrm{d}z).$$

(ii) Une fonction de transition $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$ est homogène si et seulement si, pour tout $s \leqslant t \in \mathbb{T}$, $P_{s,t}$ ne dépend que de $t - s$. Alors, en posant $P_t = P_{s,s+t}$, la suite de noyaux de probabilité $(P_t)_{t \geqslant 0}$ est appelé semi-groupe (de transition) sur $(E, \mathcal{E})$ et vérifie pour tout $s, t \geqslant 0$

$$P_s P_t = P_{s+t}.$$

Remarque. — Pour la notion (ii), l'ensemble ordonné $\mathbb{T}$ doit disposer d'une structure additive ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$), et on pose $\mathbb{T}_+ = \{t - s : s \leqslant t \in \mathbb{T}\}$.

Proposition 7. — *Supposons $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Alors une fonction de transition homogène $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$ sur $(E, \mathcal{E})$ est déterminée uniquement par la donnée de $P = P_1 = P_{s,s+1}$ qui est un noyau de transition sur $(E, \mathcal{E})$, et on a $(P)^t = P_t = P_{s+t}$ pour tout $t > 0$.*

Démonstration. — Immédiat. □

Remarques. — *a*) Rien n'assure que $P_{s,s}$, dans le cas inhomogène, ou P_0, dans le cas homogène, agisse comme l'identité sur les fonctions ou les mesures. Ce sera pourtant le cas dans la suite.

b) La proposition précédente est propre au temps discret.

3. **Processus de Markov**

Définition 20. — Un processus markovien X défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré et d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ admet une fonction de transition $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$ si et seulement si, pour tous $s \leqslant t \in \mathbb{T}$, et toute application $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée (ou positive),

$$P_{s,t} f(X_s) = \int_E f(y)\, P_{s,t}(X_s, \mathrm{d}y) = \mathbb{E}[f(X_t) \,|\, X_s] (= \mathbb{E}[f(X_t) \,|\, \mathcal{F}_s]) \qquad \text{presque sûrement.}$$

Si de plus la fonction de transition est homogène, le processus est dit markovien homogène (on ne considère alors que le semi-groupe associé).

Proposition 8. — *Supposons le processus X markovien et admettant une fonction de transition $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$, la loi temporelle du processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est uniquement déterminée par la loi μ_{t_0} de la variable aléatoire X_{t_0} et la fonction de transition :*

$$\mathbb{P}\{X_{t_0} \in \mathrm{d}x_0, \ldots, X_{t_n} \in \mathrm{d}x_n\} = \mu_{t_0}(\mathrm{d}x_0) \times P_{t_0,t_1}(x_0, \mathrm{d}x_1) \times \cdots \times P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n)$$

pour $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{T}$. En particulier, pour tout $t \geqslant t_0$, la loi de X_t est $\mu_t = \mu_{t_0} P_{t_0,t}$.

Démonstration. — La formule précédente s'obtient sous forme intégrée par des condtionnements successifs dans $\mathbb{E}[f_0(X_{t_0}) \times \cdots \times f_n(X_{t_n})]$. □

Remarque. — Souvent $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, et on se focalise sur $t_0 = 0$.

Théorème 8. — *Soit $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$ une fonction de transition sur un espace d'états polonais $(E, \mathcal{E})$. Considérons $\Omega = E^{\mathbb{T}}$ muni de la tribu produit $\mathcal{A} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$, du processus canonique $X = X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ des coordonnées et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ sa filtration naturelle.*

(i) *Pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$ et μ_0 mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$, il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que le processus $(X_t)_{t \geqslant t_0}$ soit markovien dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ de fonction de transition $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$ et X_{t_0} de loi μ_0.*

(ii) *Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, $t_0 = 0$ (ou plus généralement, si $\mathbb{T}$ est fermé à gauche par t_0), cette mesure de probabilité est unique et on note $\mathbb{P}^{\mu_0} = \mathbb{P}$.*

Démonstration. — La démonstration de ce théorème repose sur le théorème d'extension de Kolmogorov dont il est une application directe. □

Remarques. — Avec les hypothèses et notations du théorème précédent, lorsque $\mathbb{T}$ est fermé à gauche par t_0, le quadruplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^{\mu_0}, \mathcal{F})$ correspondant est appelé réalisation canonique du processus markovien X de fonction de transition $(P_{s,t})_{s,t \in \mathbb{T}}$ et de loi initiale μ_0. Dans la suite on conviendra que $t_0 = 0$.

Définition 21. — Un processus de Markov sur un espace d'états $(E, \mathcal{E})$ de fonction de transition $(P_{s,t})_{s,t \in \mathbb{T}}$ est la donnée de

(i) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F})$ un espace mesurable filtré,

(ii) $\{\mathbb{P}^\mu : \mu$ mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})\}$ une famille de mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

(iii) X un processus sur défini sur $(\Omega, \mathcal{A})$ adapté à la filtration $\mathcal{F}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$,

telle que pour toute mesure de probabilité μ_0 sur $(E, \mathcal{E})$, le processus X est markovien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^{\mu_0}, \mathcal{F})$ de loi initiale μ_0 et de fonction de transition $(P_{s,t})_{s \leqslant t \in \mathbb{T}}$.

Le théorème suivant est vrai dans la plupart des cas pratiques.

Théorème 9 (propriété de Markov forte). — *Soit X un processus markovien homogène de semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geqslant 0}$. Si S est un temps d'arrêt, $f : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ est une application mesurable bornée, $t \geqslant 0$, alors*

$$\mathbb{E}\big[f(X_{t+S}) \mathbb{1}_{\{S<\infty\}} \bigm| \mathcal{F}_S\big] = P_t f(X_S) \mathbb{1}_{\{S<\infty\}} \qquad p.s.$$

Remarque. — C'est la propriété de Markov simple où on remplace le temps déterministe s par un temps d'arrêt S. Nous pouvons énoncer la propriété ainsi : conditionnellement à $\{S < \infty\}$, $(X_{S+t})_{t \geqslant 0}$ est un processus markovien homogène de semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geqslant 0}$.

Démonstration. — Nous ne démontrons cette propriété que lorsque le temps est discret ($\mathbb{T} = \mathbb{Q}$ conviendrait). En temps continu, des conditions techniques de régularité des trajectoires et de filtration apparaissent.

Puisque le temps est supposé discret, S est temps d'arrêt si et seuelement si $\{S = s\} \in \mathcal{F}_s$ pour tout $s \in \mathbb{T}$. Nous avons par disjonction

$$\mathbb{1}_{\{S<\infty\}} = \sum_{s \in \mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{S=s\}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{1}_{\{S<\infty\}} f(X_{S+t}) = \sum_{s \in \mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{S=s\}} f(X_{s+t}).$$

En supposant f bornée ou positive, omettant quelques menus détails, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S<\infty\}} f(X_{S+t}) \,|\, \mathcal{F}_S] &= \sum_{s \in \mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{S=s\}}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S=s\}} f(X_{s+t}) \,|\, \mathcal{F}_S] \\
&= \sum_{s \in \mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{S=s\}}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S=s\}} f(X_{s+t}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{s \in \mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{S=s\}}\, \mathbb{E}[f(X_{s+t}) \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{s \in \mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{S=s\}} P_t f(X_s) = \mathbb{1}_{\{S<\infty\}} P_t f(X_S),
\end{aligned}$$

Le point important réside dans la seconde égalité : sur $\{S = s\}$, événement mesurable de $\mathcal{F}_s$ et de $\mathcal{F}_S$, les espérances conditionnelles sachant $\mathcal{F}_s$ et $\mathcal{F}_S$ coïncident. □

Exemples. — *Voir* travaux dirigés et le(s) chapitres(s) suivant(s). Par exemple :

a) semi-groupe et processus associés à un flot déterministe $x' = \phi(x, t)$;

b) semi-groupe et processus associés à une matrice stochastique ;

c) semi-groupes de convolution et processus à accroissements indépendants.

Références

[6] Dellacherie (C.), Meyer (P.-A.), *Probabilités et Potentiel*, chapitres XII à XIV, Hermann (1987).

[7] Revuz (D.), *Markov Chains*, North-Holland Mathematical Library, North-Holland (1984).

Chapitre III

CHAINES DE MARKOV
À ESPACE D'ÉTATS FINI OU DÉNOMBRABLE

L'espace des états considéré est un ensemble E fini ou dénombrable muni de sa tribu discrète. Le temps est $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Soit P une matrice de transition sur E (matrice stochastique, ou encore matrice markovienne). Nous considérons ainsi le semi-groupe de transition $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $P^0 = \mathrm{Id}_E$.

Le propos est d'examiner la dynamique d'un, du, processus de Markov homogène de matrice de transition P, c'est-à-dire son comportement asymptotique. On rappelle qu'un tel processus est la donnée de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, (\mathbb{P}^x)_{x\in E})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{E}$, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^x$, le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus markovien homogène de matrice de transition P et de loi initiale $\delta_{\{x\}}$ ($\mathbb{P}^x\{X_0 = x\} = 1$). Le cas d'une loi initiale μ plus générale s'obtient alors par intégration $\mathbb{P}^\mu = \int_E \mu(\mathrm{d}x)\, \mathbb{P}^x = \sum_{x\in E} \mu\{x\}\, \mathbb{P}^x$ dans un cadre discret.

Que le temps et l'espace soient discrets n'est pas une limitation trop sévère. De nombreux modèles ont naturellement de tels cadres (jeux, génétique, ...). Même lorsque le modèle a des aspects continus, les contraintes pratiques (observations à dates données, mesures quantifiées ou arrondies) obligent souvent à s'y ramener. Notons que les simulations informatiques ont lieu dans un cadre réellement discret (et même fini).

1. Matrices markoviennes et représentations graphiques

Soit E un espace d'états finis ou dénombrable. Une matrice stochastique (ou markovienne, ou encore de transition) sur E est notée $P = (P(x,y))_{x,y\in E}$. Rappelons qu'une telle matrice est à coefficients positifs ou nuls et qu'on a

$$\sum_{y\in E} P(x,y) = 1 \qquad \text{pour tout } x \in E,$$

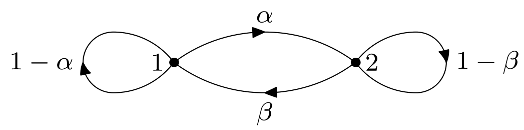
autrement dit que les sommes des coefficients sur les lignes valent 1. Le nombre $P(x,y)$ s'interprète comme la probabilité de transiter de x à y en 1 pas.

Rappelons (*voir* chapitre précédent), que lorsque l'espace d'états est fini E, ou même dénombrable, on reprsénte conventionnellement les fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ par des vecteurs colonnes formés par les suites de leurs valeurs ponctuelles, les mesures $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0,1]$ par des vecteur lignes formés par les suites de leurs valeurs sur les singletons. Les noyaux de transition sur E sont alors représentés par des matrices stochastiques. L'action de ces différents objets les uns sur les autres se faisant par simple produit matriciel.

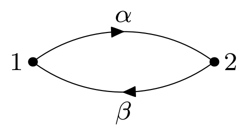
Exemples. — *a*) Considérons un espace à deux états $E = \{1,2\}$. Les matrices de transition sur E s'écrivent alors

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

ce qui peut se représenter sous la forme d'un « graphe probabiliste » (langage du lycée) ou diagramme de transition



La flèche allant de 1 à 1 correspondant à la probabilité de transition $P(1,1)$, celle de 1 à 2 correspondant à $P(1,2)$, ... En supprimant les boucles on simplifie le diagramme ci-dessus puisqu'on sait que la somme des poids affectés aux flèches sortantes d'un point vaut 1. Celles-ci sont alors implicites. Ici, on a



On peut cependant préférer la représentation complète.

Nous allons calculer les puissance de P. On se rappelle que les puissances d'une matrice diagonalisable sont faciles à calculer. En effet, supposons P diagonalisable de dimensions $d \times d$, de valeurs propres λ_i, $1 \leqslant i \leqslant d$ et de vecteurs propres associés ϕ_i, $1 \leqslant i \leqslant d$. Désignons par $(f_j)_{j=1}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ formée des vecteurs colonnes ne comportant 1 en j-ème ligne des 0 ailleurs, et $(\varepsilon_i)_{i=1}^d$ la base duale associée formée des vecteurs lignes comportant 1 en i-ème colonne et 0 ailleurs.

Alors le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de P^n est

$$P^n(i,j) = \varepsilon_i P^n f_j = \sum_{k=1}^d f_{j,k} \varepsilon_i P^n \phi_k = \sum_{k=1}^d f_{j,k} \phi_k(i) \lambda_k^n,$$

avec $f_j = \sum_{k=1}^d f_{j,k} \phi_k$ l'écriture de f_j dans la base propre considérée. Il suffit de retenir qu'on a essentiellement

$$P^n(i,j) = \sum_{k=1}^d p_k(i,j) \lambda_k^n,$$

et qu'il ne reste plus qu'à identifier les coefficients $p_k(i,j)$.

Ici, le polynôme caractéristique de P est

$$\begin{aligned} \chi_P(x) = \det(P - x\,\mathrm{Id}_2) &= \begin{vmatrix} 1-\alpha-x & \alpha \\ \beta & 1-\beta-x \end{vmatrix} \\ &= (1-\alpha)(1-\beta) - (2-\alpha-\beta)x + x^2 - \alpha\beta \\ &= x^2 - (2-\alpha-\beta)x + (1-\alpha-\beta) = (x-1)(x-1+\alpha+\beta) \end{aligned} .$$

Ce calcul n'est ici pas vraiment utile : puisque nous avons qu'un noyau de transition préserve les fonctions constantes, on a $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$, donc 1 est valeur propre de P. Le déterminant de P étant égal au produit des valeurs propres, il est égal ici à la seconde valeur propre : $1-\alpha-\beta$. Nous constatons que les valeurs propres sont distinctes — condition *suffisante* de diagonalisabilité — si et seulement si $\alpha+\beta > 0$, autrement dit si α et β ne sont pas tous les deux nuls simultanément. On a donc

$$P^n(1,1) = a \times 1^n + b \times (1-\alpha-\beta)^n$$

avec $P^0(1,1) = 1$ et $P(1,1) = 1-\alpha$, d'où $a+b=1$ et $a+b(1-\alpha-\beta) = 1-\alpha$, autrement dit $b = \alpha/(\alpha+\beta)$ et $a = \beta/(\alpha+\beta)$, soit

$$P^n(1,1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \times (1-\alpha-\beta)^n$$

Comme $P^n(1,1) + P^n(1,2) = 1$ car P^n est une matrice stochastique, on a

$$P^n(1,2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \times (1-\alpha-\beta)^n$$

Par symétrie entre α et β, on a

$$P^n(2,2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \times (1-\alpha-\beta)^n \quad \text{et} \quad P^n(2,1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \times (1-\alpha-\beta)^n.$$

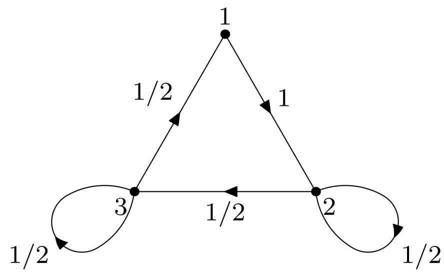
Nous pouvons donc écrire

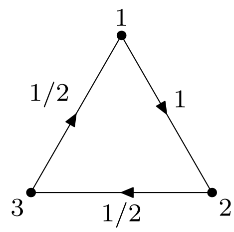
$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & -\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & -\frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \times (1-\alpha-\beta)^n.$$

b) On considère une chaîne de Markov à trois états $E = \{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Les diagrammes de transition complet et simplifié sont





Pour calculer les puissances de P, nous allons commencer par déterminer ses valeurs propres. Plutôt que de calculer le polynôme caractéristique, rappelons nous que 1 est valeur propre (la matrice P est stochastique), que le produit des valeurs propres est égal au déterminant, et leur somme est égale à la trace. En notant λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres, nous avons donc

$$1 \times \lambda_1 \times \lambda_2 = 1/4 \qquad \text{et} \qquad 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

d'où $\lambda_1 = \mathrm{i}/2$ et $\lambda_2 = -\mathrm{i}/2$ (ou le contraire). C'est sans subtilité que nous déterminons les puissances de P. Nous avons $P^n(i,j) = a(i,j) + b(i,j)(\mathrm{i}/2)^n + c(i,j)(-\mathrm{i}/2)^n$, avec

$$P^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

où le calcul de P^2 aura pu se faire en lisant le diagramme de transition.

Une première réduction se fait en remarquant que P^1 étant une matrice réelle, alors $c(i,j) = b(i,j)$, donc

$$P^n(i,j) = a(i,j) + b(i,j)((\mathrm{i}/2)^n + (-\mathrm{i}/2)^n) = a(i,j) + b(i,j)\cos(n\pi/2)/2^{n-1}.$$

Alors, en considérant $P^0 = \mathrm{Id}_3$, on a $a(i,j) + 2b(i,j) = \delta(i,j)$ au sens de Kronecker, soit $a(i,j) = \delta(i,j) - 2b(i,j)$. On considère pour finir P^2, avec $(i/2)^2 + (-i/2)^2 = -1/2$ et $-2 - 1/2 = -5/2$, on obtient

$$\begin{cases} 1 - 5/2\,b(1,1) = 0 \\ 0 - 5/2\,b(1,2) = 1/2 \\ 0 - 5/2\,b(1,3) = 1/2 \\ 0 - 5/2\,b(2,1) = 1/4 \\ 1 - 5/2\,b(2,2) = 1/4 \\ 0 - 5/2\,b(2,3) = 1/2 \\ 0 - 5/2\,b(3,1) = 1/4 \\ 0 - 5/2\,b(3,2) = 1/2 \\ 1 - 5/2\,b(3,3) = 1/4 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} b(1,1) = 2/5 \\ b(1,2) = -1/5 \\ b(1,3) = -1/5 \\ b(2,1) = -1/10 \\ b(2,2) = 3/10 \\ b(2,3) = -1/5 \\ b(3,1) = -1/10 \\ b(3,2) = -1/5 \\ b(3,3) = 3/10 \end{cases}$$

D'où, après quelques petits calculs,

$$P^n = (a(i,j))_{i,j} + \frac{\cos(n\pi/2)}{2^{n-1}}(b(i,j))_{i,j} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \times \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pourra vérifier pour se rassurer que cette expression permet de retrouver P^0, P^1 et P^2, que de plus, P^n a tous ses coeficients positifs et que leurs sommes par lignes valent 1 (P^n doit être une matrice stochastique).

Peut-être avons nous eu de la chance avec ce calcul. Lorsque P est diagonalisable de dimension $d \times d$, l'expression de P^n nécessite l'identification de d^3 coefficients, ce qui peut se faire par identification entre la formule générale donnant P^n comme combinaison linéaire des puissances énièmes des valeurs propres avec les expressions de $P^0, \ldots, P^{d-1}$. Le fait que P^n soit markovienne se vérifie après résolution, ou peut permettre d'abréger les calculs. Une autre possibilité aurait été de déterminer une base propre formant la matrice de passage Q, de calculer sont inverse Q^{-1}, pour une expression du type $D = Q^{-1}PQ$, ou encore $P = QDQ^{-1}$ et ainsi $P^n = QD^nQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale des valeurs propres. Mais, là encore, il y aurait eu beaucoup de calculs en perspective.

c) *L'urne d'Ehrenfest.* — *Voir* travaux dirigés.

d) *Marches aléatoires simples sur* $\mathbb{Z}$. — *Voir* travaux dirigés.

2. **Classes d'équivalence d'une chaîne de Markov**

La matrice de transition P sur E fini ou dénombrable est fixée et le processus de Markov X homogène de matrice de transition P est donné, c'est-à-dire que sont donnés l'espace mesurable filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F})$, le processus adapté $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la famille de mesures de probabilité $(\mathbb{P}^x)_{x\in E}$ correspondante.

Définition 22. — Soient x et $y \in E$ deux états.

(i) On dit que x *mène* à y, et on note $x \rightsquigarrow y$, si et seulement si $\mathbb{P}^x\{\exists\, n \geqslant 0 : X_n = y\} > 0$.

(ii) On dit que x et y *communiquent*, et on note $x \leftrightsquigarrow y$, si et seulement si $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$.

Théorème 10. — *Pour deux états x et $y \in E$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \rightsquigarrow y$;

(ii) *il existe une suite finie d'états* $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y \in E$ *tels que* $P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, x_n) > 0$;

(iii) *il existe* $n \geqslant 0$ *tel que* $P^n(x, y) > 0$.

Démonstration. — Supposons (i) vérifié. Alors on a

$$\begin{aligned}
0 < \mathbb{P}^x\{\exists\, n \geqslant 0 : X_n = y\} &= \mathbb{P}^x\Big(\bigcup_{n\geqslant 0}\{X_n = y\}\Big) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}^x\{X_n = y\} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}^x\Big(\bigcup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E}\{X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = y\}\Big) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = y\} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E} P(x, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, y).
\end{aligned}$$

L'un au moins des produits figurant dans cette somme multiple est strictement positif, le point (ii) en résulte.

Supposons le point (ii) vérifié. Puisque, par produit matriciel,

$$P^n(x, y) = \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in E} P(x, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, y),$$

si l'un des termes de la somme est strictement positif, il en est de même de $P^n(x, y)$. Donc le point (iii) est satisfait.

Supposons le point (iii) vérifié pour un certain $n \geqslant 0$. On a alors

$$\mathbb{P}^x\{\exists\, m \geqslant 0 : X_m = y\} = \mathbb{P}^x\Big(\bigcup_{m\geqslant 0}\{X_m = y\}\Big) \geqslant \mathbb{P}^x\{X_n = y\} = P^n(x, y) > 0.$$

Donc le point (i) est alors satisfait. □

THÉORÈME 11. — (i) *La relation « mener à » est réflexive et transitive.*

(ii) *La relation « communiquer » est une relation d'équivalence sur* E.

Démonstration. — (i) Pour tout $x \in E$ nous avons $x \rightsquigarrow x$ (prendre $n = 0$ dans la définition), la relation « mener à » est donc réflexive. Notons au passage que si la définition nécessitait au moins un pas, la réflexivité ne serait pas garantie puisqu'on pourrait quitter x et ne plus y revenir.

Avec le point (ii) du théorème précédent, il est clair que cette relation est transitive : si $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow z$, soient une suite finie d'états

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y, x_{n+1}, \ldots, x_{m+n-1}, x_{m+n} = z \in E$$

tels que

$$P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1,x_n}) > 0 \qquad \text{et} \qquad P(x_n, x_{n+1}) \times \cdots \times P(x_{m+n-1}, x_{m+n}) > 0,$$

on a alors

$$P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1,x_n}) \times P(x_n, x_{n+1}) \times \cdots \times P(x_{m+n-1}, x_{m+n}) > 0$$

et donc $x \rightsquigarrow z$.

La relation « communiquer » est elle aussi réflexive et transitive, comme elle est par construction symétrique, c'est une relation d'équivalence. □

DÉFINITION 23. — (i) Les classes d'équivalence pour la relation « communiquer » sur E sont appelées *classes communicantes*.

(ii) Une classe communicante $C \subset E$ est *fermée* si et seulement si

$$x \in C \text{ et } x \rightsquigarrow y \quad \Longrightarrow \quad y \in C,$$

autrement dit, si pour tout $y \in E\backslash C$, $\mathbb{P}^x\{\exists\, n \geqslant 0 : X_n = y\} = 0$: la chaîne issue de x, une fois rentrée dans C, ne peut plus en sortir.

(iii) Un état $x \in E$ est *absorbant* si le singleton $\{x\}$ est une classe communicante fermée, c'est-à-dire si $P(x,x) = 1$ et évidemment $P(x,y) = 0$ pour tout $y \neq x$.

(iv) Une chaîne de Markov, ou une matrice de transition, est *irréductible* si et seulement si il n'existe qu'une seule classe communicante, l'espace d'états E tout entier.

Exemples. — *a*) Considérons une chaîne de Markov à deux états $E = \{1,2\}$ décrite par la donnée de α, $\beta \in [0,1]$. On a :

$$1 \rightsquigarrow 2 \iff \alpha > 0, \qquad 2 \rightsquigarrow 1 \iff \beta > 0, \qquad 1 \leftrightsquigarrow 2 \iff \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

Ainsi, la chaîne est irréductible si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Si $\alpha = \beta = 0$, soit $P = \mathrm{Id}_2$, rien ne se passe ; les classes sont les singletons $\{1\}$ et $\{2\}$ associées à des états absorbants et elles sont fermées. Si $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, les classes sont toujours les singletons $\{1\}$ et $\{2\}$, cette dernière étant fermée, et seul 2 est absorbant.

b) Pour la chaîne à trois états $E = \{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

on constate par lecture du diagramme de transition que tous les états communiquent. La chaîne est donc irréductible (et son unique classe communicante E est fermée).

c) *L'urne d'Ehrenfest.* — *Voir* travaux dirigés.

d) *Marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$.* — *Voir* travaux dirigés.

Exercice. — Montrer que toute matrice de transition sur un espace d'état fini a au moins une classe fermée. Trouver un exemple de matrice de transition sans classe fermée.

Correction. — Soient E un espace d'états (non vide) et P une matrice de transition tels qu'aucune classe communicante est fermée. Pour $x \in E$, nous notons $\dot{x} \subset E$ sa classe communicante. Soit $x_1 \in E$. Puisque $\dot{x}_1$ n'est pas fermée, soit $x_2 \in E\backslash\dot{x}_1$ tel que $x_1 \rightsquigarrow x_2$. Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, nous pouvons construire une suite $x_1, \ldots, x_n$ dans E telle que pour tout $1 \leqslant i < n$, $x_{i+1} \in E\backslash\dot{x}_i$ et $x_i \rightsquigarrow x_{i+1}$. Une telle suite est nécessairement injective puisque si pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a $x_i = x_j$, comme par construction $x_i \rightsquigarrow x_{i+1}$ et $x_{i+1} \rightsquigarrow x_j = x_i$ alors $x_{i+1} \in \dot{x}_i$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une injection de $\{1,\ldots,n\}$ dans E. L'ensemble E est donc infini.

Nous aurions pu améliorer un peu ce résultat en montrant que si toute les classes sont ouvertes, alors le nombre de classes communicantes est infini. Par contraposée, si le nombre de classes est fini, alors il existe au moins une classe fermée.

Pour exemple de matrice de transition sans classe fermée, prenons $E = \mathbb{Z}$ et pour chaîne la marche déterministe consistant à toujours faire un pas à droite. La matrice de transition $P = (P(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}}$ est définie par $P(x,x+1) = 1$, $x \in \mathbb{Z}$, les autres coefficients étant évidemment nuls. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \rightsquigarrow y$ pour tout $y \geqslant x$ mais $x \not\rightsquigarrow y$ si $y < x$. Les classes communicantes sont réduites au singletons $\{x\}$, $x \in \mathbb{Z}$, qui sont toutes ouvertes.

3. Temps d'atteinte et probabilités d'absorption

DÉFINITION 24. — Soit A une partie de E. Le *temps d'atteinte* par $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de A est la variable aléatoire $H^A : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par

$$H^A(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 : X_n(\omega) \in A\}, \qquad \omega \in \Omega,$$

où on convient que $\inf \varnothing = \infty$. La probabilité partant de $x \in E$ que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ atteigne A est

$$h^A(x) = \mathbb{P}^x\{H^A < \infty\}.$$

Lorsque A est une classe fermée, les probabilités $h^A(x)$ sont appelées probabilités d'absorption. Le *temps moyen* partant de $x \in E$ pris par $(X_n)_{n\geqslant 0}$ pour atteindre A est

$$k^A(x) = \mathbb{E}^x\big[H^A\big] = \sum_{n\geqslant 0} n \times \mathbb{P}^x\{H^A = n\} + \infty \times \mathbb{P}\{H^A = \infty\}.$$

THÉORÈME 12. — *Le vecteur des probabilités d'atteinte $h^A = (h^A(x))_{x\in E}$ est la solution positive minimale du système*

$$h^A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ \sum_{y\in E} P(x,y) \times h^A(y) & si\ x \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

La minimalité signifiant que si $h = (h(x))_{x\in E} \in \mathbb{R}_+^E$ est une autre solution positive de (1), alors $h(x) \geqslant h^A(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que h^A vérifie le système (1). Si $X_0 = x \in A$, alors $H^A = 0$ et donc $h^A(x) = 1$. Si $X_0 = x \notin A$, on a alors $H^A \geqslant 1$ et ainsi

$$\begin{aligned} h^A(x) = \mathbb{P}^x\{H^A < \infty\} &= \sum_{y\in E} \mathbb{P}^x\{H^A < \infty, X_1 = y\} \\ &= \sum_{y\in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{P}^x\{H^A < \infty \mid X_1 = y\} \\ &= \sum_{y\in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{P}^y\{H^A < \infty\} = \sum_{y\in E} P(x,y) \times h^A(y) \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité résultant de l'application de la propriété de Markov simple.

Supposons que $h = (h(x))_{x\in E}$ soit une solution positive de (1). On a donc $h(x) = 1$ pour tout $x \in A$ et si $x \notin A$

$$\begin{aligned} h(x) = \sum_{y\in E} P(x,y) \times h(y) &= \sum_{y\in A} P(x,y) \times h(y) + \sum_{y\notin A} P(x,y) \times h(y) \\ &= \sum_{y\in A} P(x,y) + \sum_{y\notin A} P(x,y) \times h(y). \end{aligned}$$

En itérant,

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{y\in A} P(x,y) + \sum_{y\notin A} P(x,y)\Big(\sum_{z\in A} P(y,z) + \sum_{z\notin A} P(y,z) \times h(z)\Big) \\ &= \sum_{y\in A} P(x,y) + \sum_{y\notin A, z\in A} P(x,y) \times P(y,z) + \sum_{y\notin A, z\notin A} P(x,y) \times P(y,z) \times h(z) \\ &= \mathbb{P}^x\{X_1 \in A\} + \mathbb{P}^x\{X_1 \notin A, X_2 \in A\} + \sum_{y\notin A, z\notin A} P(x,y) \times P(y,z) \times h(z). \end{aligned}$$

En itérant encore, on obtient ainsi pour tout $n \geqslant 1$,

$$h(x) = \mathbb{P}^x\{X_1 \in A\} + \cdots + \mathbb{P}^x\{X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} + \sum_{y_1 \notin A, \ldots, y_n \notin A} P(x, y_1) \times \cdots \times P(y_{n-1}, y_n) \times h(y_n).$$

Puisque tous les $h(x)$ sont positifs, on a alors

$$h(x) \geqslant \mathbb{P}^x\{X_1 \in A\} + \cdots + \mathbb{P}^x\{X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} = \mathbb{P}^x\{H^A \leqslant n\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite de ces probabilités tend en croissant vers $h^A(x) = \mathbb{P}^x\{H^A < \infty\}$, on a en passant à la limite sur l'inégalité ci-dessus $h(x) \geqslant h^A(x)$. □

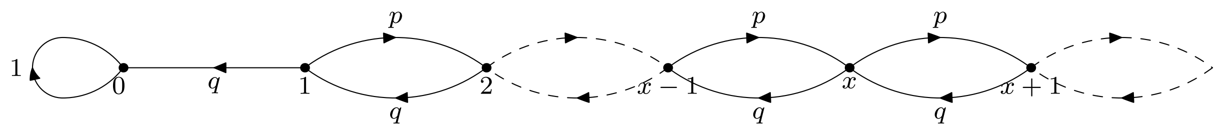
Exercice (ruine du joueur). — On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqslant 0}$ d'espace d'état $E = \mathbb{N}$ et de matrice de transition P vérifiant

$$P(0,0) = 1, \qquad \text{et} \qquad P(x, x+1) = p, \quad P(x, x-1) = 1 - p = q, \quad \text{pour tout } x \in \{1, 2, \ldots\},$$

les autres coefficients étant nuls, $p \in [0,1]$ étant un réel donné. La variable X_n représente la fortune d'un joueur à l'instant n jouant contre un adversaire infiniment riche, la probabilité $h^0(x) = \mathbb{P}^x\{H^0 < \infty\}$ est alors la probabilité de perdre avec une fortune initiale $x \in \mathbb{N}$.

Montrer que si $p \leqslant q$, $h^0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ (distinguer les cas $p < q$ et $p = q = 1/2$), et si $p > q$, $h^0(x) = (q/p)^x$. On établira une relation de récurrence entre les $h^0(x)$.

Correction. — Représentons le diagramme de transition



Soit $h^0(x) = \mathbb{P}^x\{\text{atteindre } 0\} = \mathbb{P}^x\{H^0 < \infty\}$. Nous savons que c'est la solution positive minimale du système

$$h(0) = 1, \qquad h(x) = p \times h(x+1) + q \times h(x-1), \quad x \geqslant 1.$$

Ce système définit une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique

$$pr^2 - r + q = 0 \qquad (\Delta = 1 - 4pq \geqslant 0)$$

qui admet pour racines 1 (évident) et q/p (s'en déduit immédiatement). Lorsque $q/p \neq 1$, la suite est alors de la forme $h(x) = a + b(q/p)^x$ avec $h(0) = a + b = 1$.

- Si $q > p$, comme h est bornée, on a $b = 0$ et donc $h^0(x) = a = h^0(0) = 1$: la ruine est sûre.
- Si $q < p$, écrivons $h(x) = (q/p)^x + a(1 - ((q/p)^x)$. La solution positive minimale est obtenue pour $a = 0$, et donc $h^0(x) = (q/p)^x$, notamment la ruine n'est pas certaine.
- Si $p = q = 1/2$, la solution s'écrit $h(x) = a + bx$. Puisqu'elle doit être bornée, on a $b = 0$ et finalement $h^0(x) = a = h^0(0) = 1$: la ruine est certaine.

Remarque. — Voir aussi l'exercice « naissance et mort ».

Rappelons que $k^A(x)$ désigne $\mathbb{E}^x[H^A]$ le temps moyen d'atteinte de A en partant de x.

THÉORÈME 13. — *Le vecteur des temps moyens d'atteinte $k^A = (k^A(x))_{x \in E}$ est la solution positive minimale du système*

$$k^A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 + \sum_{y \in E} P(x,y) \times k^A(y) & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{2}$$

La minimalité signifiant que si $k = (k(x))_{x \in E} \in \mathbb{R}_+^E$ est une autre solution positive de (2), alors $k(x) \geqslant k^A(x)$ pour tout $x \in E$.

Remarque. — Nous rappelons que si $A \in \mathcal{A}$ est un événement de probabilité strictement positive et $H : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire intégrable ou de signe constant par exemple, le réel

$$\mathbb{E}[H \mid A] = \mathbb{E}[H \times \mathbb{1}_A] / \mathbb{P}(A)$$

est l'espérance de H sachant l'événement A. On constate aisément que c'est l'espérance de H sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\,.\mid A)$. Si $(A_n)_n$ est un système complet d'événements et si $\mathbb{E}[H]$ a un sens, l'analogue de la formule des probabilités totales s'écrit

$$\mathbb{E}[H] = \sum_n \mathbb{E}[H \times \mathbb{1}_{A_n}] = \sum_n \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{E}[H \mid A_n]$$

et on convient que cette dernière somme a toujours un sens même si pour certains n, $\mathbb{P}(A_n) = 0$, auquel cas $\mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{E}[H \mid A_n] = \mathbb{E}[H \times \mathbb{1}_{A_n}] = 0$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que k^A vérifie le système (2). Si $X_0 = x \in A$, alors $H^A = 0$ et donc $k^A(x) = 0$. Si $X_0 = x \notin A$, on a alors $H^A \geqslant 1$ et ainsi

$$\begin{aligned} k^A(x) = \mathbb{E}^x\big[H^A\big] &= \sum_{y \in E} \mathbb{E}^x\big[H^A \times \mathbb{1}_{\{X_1 = y\}}\big] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{E}^x\big[H^A \mid X_1 = y\big] \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{E}^y\big[1 + H^A\big] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \big(1 + \mathbb{E}^y\big[H^A\big]\big) \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} + \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{E}^y\big[H^A\big] = 1 + \sum_{y \in E} P(x,y) \times k^A(y) \end{aligned}$$

le fait que $\mathbb{E}^x[H^A \mid X_1 = y] = \mathbb{E}^y[1 + H^A]$ résultant de l'application de la propriété de Markov puisque $x \notin A$.

Supposons que $k = (k(x))_{x \in E}$ soit une solution positive de (2). On a donc $k(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et si $x \notin A$

$$k(x) = 1 + \sum_{y \in E} P(x,y) \times k(y) = 1 + \sum_{y \in A} P(x,y) \times k(y) + \sum_{y \notin A} P(x,y) \times k(y) = 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) \times k(y).$$

En itérant,

$$\begin{aligned} k(x) &= 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) \Big(1 + \sum_{z \notin A} P(y,z) \times k(z)\Big) \\ &= 1 + \sum_{y \notin A} P(x,y) + \sum_{y \notin A, z \notin A} P(x,y) \times P(y,z) \times k(z) \\ &= \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant 1\big\} + \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant 2\big\} + \sum_{y \notin A, z \notin A} P(x,y) \times P(y,z) \times k(z). \end{aligned}$$

En itérant encore, on obtient ainsi pour tout $n \geqslant 1$,

$$k(x) = \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant 1\big\} + \cdots + \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant n\big\} + \sum_{y_1 \notin A, \ldots, y_n \notin A} P(x, y_1) \times \cdots \times P(y_{n-1}, y_n) \times k(y_n).$$

Puisque tous les $k(x)$ sont positifs, on a alors

$$k(x) \geqslant \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant 1\big\} + \cdots + \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant n\big\}$$

et ainsi

$$k(x) \geqslant \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}^x\big\{H^A \geqslant n\big\} = \mathbb{E}^x\big[H^A\big] = k^A(x),$$

d'où la conclusion. □

Exercice. — Démontrer le résultat utilisé à la fin de la démonstration précédente : si $H : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est une variable aléatoire, on a

$$\mathbb{E}[H] = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}\{H \geqslant n\} = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\{H > n\}.$$

On pourra distinguer les cas $\mathbb{P}\{H = \infty\} > 0$ et $\mathbb{P}\{H = \infty\} = 0$.

Correction. — Si $H : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ est une variable aléatoire entière,

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\{H > 0\} = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}\{H \geqslant n\} = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{k \geqslant n} \mathbb{P}\{H = k\} = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}\{H = k\} = \sum_{k \geqslant 1} k\, \mathbb{P}\{H = k\}$$

qui est égale à $\mathbb{E}[H]$ lorsque $\mathbb{P}\{H = \infty\} = 0$. Si $\mathbb{P}\{H = \infty\} > 0$, comme pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\{H \geqslant n\} \geqslant \mathbb{P}\{H = \infty\}$, les sommes précédentes valent $+\infty$, ce qui est aussi le cas de $\mathbb{E}[H]$.

L'interversion des sommes dans ces calculs est possible par le théorème de Fubini–Tonelli. La seule difficulté est de convenablement indexer la nouvelle double somme obtenue.

Exercice (ruine du joueur, suite). — Montrer que si $p < q$, on a $k^0(x) = \mathbb{E}^x[H^0] = x/(1-2p)$, et si $p \geqslant q$, on a $k^0(x) = \infty$ (distinguer les cas $p > q$ et $p = q = 1/2$). On établira une relation de récurrence entre les $k^0(x)$.

Correction. — D'après le théorème précédent, k^0 est la solution positive minimale du système

$$k(0) = 0, \qquad k(x) = 1 + p \times k(x+1) + q \times k(x-1), \qquad x \geqslant 1.$$

Nous connaissons déjà les solutions du système homogène

$$p \times k(x+1) - k(x) + q \times k(x-1) = 0, \qquad x \geqslant 1.$$

Cherchons donc une solution particulière de la forme $k_*(x) = \alpha x$. On obtient alors $\alpha x = 1 + p\alpha x + p\alpha + q\alpha x - q\alpha$ soit $0 = 1 + \alpha(p - q)$ (rappelons que $p + q = 1$), et alors $\alpha = 1/(q-p) = 1/(1-2p)$ si $p \neq q$ ou encore $p \neq 1/2$. Ainsi $k_*(x) = x/(1-2p)$ est une solution positive lorsque $p \neq 1/2$. Toute solution s'écrit dans ce cas

$$k(x) = a + b(q/p)^x + k_*(x) = a + b(q/p)^x + x/(1-2p) = b\Big((q/p)^x - 1\Big) + x/(1-2p).$$

puisque $k(0) = a + b = 0$.

- Si $p < q$, ou encore $p < 1/2$, les solutions sont du signe de b pour x assez grand. Pour qu'elles soient positives, il est donc nécessaire que $b \geqslant 0$, ce qui est aussi suffisant. La solution positive minimale est donc obtenue avec $b = 0$, soit $k^0(x) = x/(1-2p)$, $x \geqslant 1$.
- Si $p > q$, nous savons que $h^0(x) = \mathbb{P}^x\{H^0 < \infty\} < 1$, par conséquent $\mathbb{P}^x\{H^0 = \infty\} > 0$, ce qui implique que $k^0(x) = \mathbb{E}^x[H^0] = \infty$ pour tout $x \geqslant 1$. Une autre façon de le voir est de constater que toute fonction finie $k(x) = b((q/p)^x - 1) + x/(1-2p)$ est du signe de $1/(1-2p) < 0$ pour x assez grand, et donc qu'il n'existe pas de solution positive finie. le minimum de l'ensemble vide étant l'infini, on retrouve la même conclusion.
- Si $p = q = 1/2$, alors on recherche une solution particulière de la forme $k_*(x) = \alpha x^2$, soit $\alpha x^2 = 1 + \alpha/2(x^2 + 2x + 1) + \alpha/2(x^2 - 2x + 1)$ ou encore $0 = 1 + \alpha$. Les solutions s'écrivent donc $k(x) = a + bx - x^2$, $x \geqslant 1$, avec $a = 0$ puisque $k(0) = 0$ et b quelconque. Aucune de ces solutions est positive puisqu'elles tendent toutes vers $-\infty$ en ∞. Nous avons donc $k^0(x) = \infty$ pour tout $x \geqslant 1$.

4. Récurrence et transience

Définition 25. — Soit $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. On dit qu'un état $x \in E$ est *récurrent* si et seulement si

$$\mathbb{P}^x\{X_n = x \text{ pour une infinité de } x\} = 1.$$

On dit qu'un état $x \in E$ est *transient*, ou *transitoire*, si et seulement si

$$\mathbb{P}^x\{X_n = x \text{ pour une infinité de } x\} = 0.$$

On va montrer que tout état est ou bien récurrent, ou bien transient. On rappelle que le temps de retour, ou temps d'entrée, T^x_{e} dans l'état $x \in E$ est le temps d'arrêt défini par

$$T^x_{\mathrm{e}}(\omega) = \inf\{n > 0 : X_n(\omega) = x\}, \qquad \omega \in \Omega,$$

où $\inf \varnothing = \infty$. On définit par récurrence la suite $(T^x_r)_{r \geqslant 0}$ des r-ièmes temps de retour dans l'état x par

$$T^x_0 = 0, \qquad T^x_1 = T^x_{\mathrm{e}}, \qquad T^x_{r+1} = \inf\big\{n > T^x_r : X_n = x\big\}, \quad r \geqslant 0.$$

Pour $r \geqslant 1$, on appelle r-ième excursion la suite des valeurs prises par X entre T^x_{r-1} et T^x_r

$$\big(X_n : T^x_{r-1} \leqslant n < T^x_r\big),$$

les inégalités ayant été définies pour que sa longueur soit exactement

$$S^x_r = \begin{cases} T^x_r - T^x_{r-1} & \text{si } T^x_{r-1} < \infty \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et que les excursions associées à chaque trajectoire forment une partition de celle-ci.

Remarque. — On notera la différence des définitions du premier temps de retour en x

$$T^x_{\mathrm{e}} = \inf\{n > 0 : X_n = x\} \qquad \text{et de} \qquad H^x = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = x\}$$

le premier temps d'atteinte de x.

LEMME 1. — *Pour $r \geqslant 2$, conditionnellement à $\{T^x_{r-1} < \infty\}$, S^x_r est indépendante de $\mathcal{F}^X_{T^x_{r-1}}$ et*

$$\mathbb{P}\big\{S^x_r = n \,\big|\, T^x_{r-1} < \infty\big\} = \mathbb{P}^x\{T^x_{\mathrm{e}} < \infty\}.$$

Démonstration. — Dans un premier temps, montrons que pour tout $r \geqslant 0$, T^x_r est un temps d'arrêt : pour $r = 0$, il est clair que $T^x_0 = 0$ est un temps d'arrêt ; pour $r \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on a

$$\big\{T^x_r \leqslant n\big\} = \bigcup_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r \leqslant n} \{X_{k_1} = x, \ldots, X_{k_r} = x\}$$

événement qui est égal à la réunion finie — éventuellement vide si par exemple $r > n$ — et non nécessairement disjointe d'événements $\mathcal{F}^X_n$-mesurables, et qui est donc, lui aussi, $\mathcal{F}^X_n$-mesurable, ainsi T^x_r est un temps d'arrêt.

Le lemme ne consiste plus alors qu'en l'application de la propriété de Markov forte au temps T^x_{r-1} puisque S^x_r est le temps en partant de x à la date T^x_{r-1} pour retourner en x :

$$S^x_r = \inf\Big\{n \geqslant 1 : X_{T^x_{r-1}+n} = x\Big\}. \qquad \square$$

Le *nombre de visites* V^x dans l'état $x \in E$ est la variable aléatoire

$$V^x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}.$$

Pour $y \in E$, on a

$$\mathbb{E}^y[V^x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^y[\mathbb{1}_{\{X_n = x\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^y\{X_n = x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, x).$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E}^x[V^x] = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, x).$$

On définit la *probabilité de retour* en x par

$$f(x) = \mathbb{P}^x\{T_e^x < \infty\}$$

qui est la probabilité qu'étant parti de x, la chaîne y retourne à un instant ultérieur.

LEMME 2. — *Pour tout $r \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}^x\{V^x > r\} = (f(x))^r$.*

Démonstration. — On suppose $X_0 = x$. Alors $\{V^x > r\} = \{T_r^x < \infty\}$. Si $r = 0$ on a bien $\mathbb{P}^x\{V^x > 0\} = \mathbb{P}^x\{T_0^x < \infty\} = \mathbb{P}^x\{0 < \infty\} = 1 = (f(x))^0$. Par récurrence, supposons cette égalité vraie pour un $r \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^x\{V^x > r+1\} &= \mathbb{P}^x\big\{T_{r+1}^x < \infty\big\} = \mathbb{P}^x\big\{S_{r+1}^x < \infty, T_r^x < \infty\big\} \\ &= \mathbb{P}^x\big\{S_{r+1}^x < \infty \bigm| T_r^x < \infty\big\} \times \mathbb{P}^x\big\{T_r^x < \infty\big\} \\ &= \mathbb{P}^x\{T_e^x < \infty\} \times f(x)_r = f(x) \times (f(x))^r = (f(x))^{r+1}.\end{aligned}$$

Par récurrence, la conclusion du lemme s'ensuit. □

THÉORÈME 14. — *Soit $x \in E$. On a*

(i) *ou bien $\mathbb{P}^x\{T_e^x < \infty\} = 1$, et alors x est récurrent et $\sum_{n=0}^\infty P^n(x,x) = \infty$;*

(ii) *ou bien $\mathbb{P}^x\{T_e^x < \infty\} < 1$, et alors x est transient et $\sum_{n=0}^\infty P^n(x,x) < \infty$.*

Démonstration. — Si $\mathbb{P}^x\{T_e^x < \infty\} = f(x) = 1$, on a d'après le lemme précédent

$$\mathbb{P}^x\{V^x = \infty\} = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}^x\{V^x > r\} = \lim_{r\to\infty} (f(x))^r = \lim_{r\to\infty} 1^r = 1,$$

donc x est récurrent et

$$\sum_{n=0}^\infty P^n(x,x) = \mathbb{E}^x[V^x] = \infty.$$

D'autre part, si $\mathbb{P}^x\{T_e^x < \infty\} = f(x) < 1$, on a, toujours d'après ce lemme,

$$\sum_{n=0}^\infty P^n(x,x) = \mathbb{E}^x[V^x] = \sum_{r=0}^\infty \mathbb{P}^x\{V^x > r\} = \sum_{r=0}^\infty (f(x))^r = \frac{1}{1-f(x)} < \infty.$$

En particulier, $\mathbb{P}^x\{V^x = \infty\} = 0$, et donc x est transitoire. □

THÉORÈME 15. — *Soit C une classe communicante pour la chaîne de Markov X. Alors, ou bien tous les états de C sont récurrents, ou bien ils sont tous transients.*

Démonstration. — Soient x, $y \in C$, et soient m, $n \geqslant 0$ tels que

$$P^n(x,y) > 0 \qquad \text{et} \qquad P^m(y,x) > 0$$

(on rappelle que $x \leftrightsquigarrow y$ si et seulement si il existe m, $n \geqslant 0$ tels que $\mathbb{P}^x\{X_n = y\} > 0$ et $\mathbb{P}^y\{X_m = x\} > 0$). Ainsi, pour tout $r \geqslant 0$,

$$P^{n+r+m}(x,x) = \sum_{z,z' \in E} P^n(x,z) \times P^r(z,z') \times P^m(z',x) \geqslant P^n(x,y) \times P^r(y,y) \times P^m(y,x),$$

c'est-à-dire

$$P^r(y,y) \leqslant \frac{P^{n+r+m}(x,x)}{P^n(x,y) \times P^m(y,x)}.$$

En sommant sur $r \geqslant 0$,

$$\sum_{r=0}^\infty P^r(y,y) \leqslant \frac{1}{P^n(x,y) \times P^m(y,x)} \sum_{r=0}^\infty P^{n+r+m}(x,x).$$

Ainsi, si x est transient, la somme de droite est finie, donc celle de gauche l'est aussi, ce qui signifie d'après le théorème précédent que y est transient. Si y est récurrent, alors la somme de gauche est infinie, donc celle de droite l'est aussi et x est donc récurrent. Par symétrie du raisonnement entre x et y, on obtient l'équivalence de la récurrence de x et de y ainsi que celle de leur transience. □

THÉORÈME 16. — *Toute classe récurrente est fermée.*

Démonstration. — Soit C une classe qui n'est pas fermée (s'il en existe et qui est alors distincte de E). Donc il existe $x \in C$, $y \notin C$ et $m \geqslant 0$ tels que

$$\mathbb{P}^x\{X_m = y\} = P^m(x, y) > 0.$$

Puisqu'on a

$$\mathbb{P}^x\big(\{X_m = y\} \cap \{X_n = x \text{ pour une infinité de } n\}\big) = 0$$

car lorsque $X_m = y$, X ne retourne pas en x sinon x et y seraient dans la même classe communicante. Ceci implique que

$$\mathbb{P}^x\{X_n = x \text{ pour une infinité de } n\} < 1$$

puisque $\mathbb{P}^x\{X_m = y\} = P^m(x, y) > 0$. Donc x n'est pas récurrent. Ainsi la classe C n'est pas récurrente, elle est donc transiente. Par contraposée de l'implication précédente, on obtient que toute classe récurrente est fermée. □

THÉORÈME 17. — *Toute classe finie et fermée est récurrente.*

Démonstration. — Soit C une classe finie et fermée. Supposons que X parte de C, c'est-à-dire que sa loi initiale est portée par C. Alors pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $x(\omega) \in C$ tel que $X_n(\omega) = x(\omega)$ pour une infinité de n. On en déduit qu'il existe $x \in C$ tel que

$$\mathbb{P}\{X_n = x \text{ pour une infinité de } n\} > 0.$$

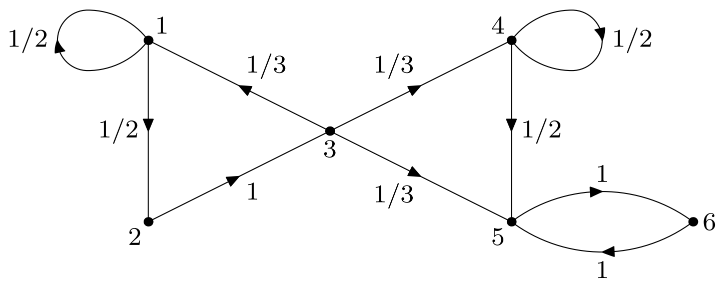
Par la propriété de Markov forte au temps T^x_{e}, la probabilité précédente est égale à

$$\mathbb{P}\big\{T^x_{\mathrm{e}} < \infty\big\} \times \mathbb{P}\{X_n = x \text{ pour une infinité de } n\} > 0,$$

ce qui implique que x est récurrent. Donc, toute la classe C est récurrente. □

Puisqu'il est facile de déterminer les classes fermées, la récurrence ou la transience des classes finies est elle aussi facile à déterminer.

Exemple. — Dans l'exemple suivant, on constate que la seule classe récurrente est $\{5, 6\}$, les autres classes $\{1, 2, 3\}$ et $\{4\}$ sont donc transientes.



Pour ce type d'analyse, nous n'avons pas besoin de l'information précise des probabilités de transition si on convient qu'une flèche correspond toujours à une probabilité de transition strictement positive.

Remarque. — Si $C \subset E$ est une classe communicante de cardinal infini (E est alors aussi de cardinal infini), on a seulement l'implication

$$C \text{ est une classe non fermée} \quad \Longrightarrow \quad C \text{ est une classe transiente,}$$

ce qui n'est jamais que la contraposée de l'affirmation selon laquelle une classe récurrente est fermée. Comme on pourra le voir dans les exemples suivants, il peut exister des classes infinies qui soient à la fois fermées et transientes.

Théorème 18. — *Supposons la matrice de transition P irréductible et récurrente, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule classe communicante et qu'elle est récurrente. Alors pour tout $y \in E$, $\mathbb{P}\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = 1$.*

Démonstration. — D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = \sum_{x \in E} \mathbb{P}\{X_0 = x\} \times \mathbb{P}\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty \mid X_0 = x\} = \sum_{x \in E} \mathbb{P}\{X_0 = x\} \times \mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\}.$$

Donc il suffit de montrer que $\mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = 1$ pour tout $x \in E$. Soit $m \geqslant 0$. Par récurrence de la chaîne $(X_n)_{n \geqslant 0}$, on a

$$1 = \mathbb{P}^y\{X_n = y \text{ pour une infinité de } n\} \leqslant \mathbb{P}^y\{X_n = y \text{ pour un } n \geqslant m\}$$

et donc on a égalité. Par la formule des probabilités totales, puis la propriété de Markov, on a

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}^y\{X_n = y \text{ pour un } n \geqslant m\} \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}^y\{X_m = k\} \times \mathbb{P}^y\{X_n = y \text{ pour un } n \geqslant m \mid X_m = k\} \\ &= \sum_{z \in E} P^m(y, z) \times \mathbb{P}^k\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\}. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{z \in E} P^m(y, z) = 1$, on a nécessairement $\mathbb{P}^z\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = 1$ pour tout $z \in E$ tel que $P^m(y, z) > 0$. Toujours par récurrence de la chaîne, soit $m \geqslant 0$ tel que $P^m(y, x) > 0$. D'après ce qui précède, on a $\mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = 1$. Finalement,

$$\mathbb{P}\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = \sum_{x \in E} \mathbb{P}\{X_0 = x\} \times \mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{e}}^y < \infty\} = \sum_{x \in E} \mathbb{P}\{X_0 = x\} = 1. \qquad \square$$

Exemples. — *a*) La discussion sur les chaînes à deux états est immédiate : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la chaîne est irréductible, finie, donc récurrente ; si $\alpha = \beta = 0$, les deux classes sont récurrentes ; si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, la classe $\{1\}$ est récurrente et la classe $\{2\}$ est transiente.

b) Pour la matrice de transition particulière à trois états considérée auparavant, puisqu'elle est irréductible, elle est récurrente.

c) *L'urne d'Ehrenfest.* — Nous savons que la chaîne est irréductible sur un espace d'états fini, elle est donc récurrente.

d) *Marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$.* — *Voir* travaux dirigés.

Les marches aléatoires simples dans $\mathbb{Z}^d$ sont irréductibles, récurrentes en dimensions 1 et 2, transientes en dimensions supérieures ou égales à 3. *Voir* les exercices sur les marches aléatoires simples dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$.

5. Mesures invariantes

Nous rappelons qu'une mesure positive sur E est identifiée à un vecteur ligne indéxé par E de nombres positifs finis — par mesure positive, nous sous-entendons ainsi mesure positive σ-finie. Une mesure de probabilité sur E est identifiée à un tel vecteur dont la somme des coefficients est égale à 1.

DÉFINITION 26. — Une mesure positive $\lambda = (\lambda\{x\})_{x\in E}$ est *invariante* par une matrice de transition P si et seulement si

$$\lambda P = \lambda, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{x\in E} \lambda\{x\} \times P(x,y) = \lambda\{y\} \quad \text{pour tout } y \in E.$$

Si λ est de plus une mesure de probabilité, on précisera que c'est une *mesure de probabilité invariante*.

Notons que si λ est une mesure invariante, tous ses multiples $\alpha\lambda$, $\alpha \geqslant 0$, sont des mesures invariantes. Si $\lambda(E) \in \{0, \infty\}$, aucun de ses multiples n'est une mesure de probabilité.

THÉORÈME 19. — *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale π. On suppose que π est une mesure de probabilité invariante par P. Alors pour tout $m \geqslant 0$, $(X_{m+n})_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (π, P). En particulier X_m est de loi π pour tout $m \geqslant 0$.*

Démonstration. — Par la propriété de Markov simple, $(X_{m+n})_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P. Puisque la loi de X_m est $\pi P^m = \pi$, on a la conclusion. □

THÉORÈME 20. — *Supposons que l'espace d'états E est un ensemble fini et qu'il existe $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$ la suite $\big(P^n(x,y)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\pi\{y\}$. Alors la suite $\pi = (\pi\{y\})_{y\in E}$ est une mesure de probabilité invariante par P.*

Démonstration. — On a clairement $\pi\{y\} \geqslant 0$ pour tout $y \in E$. De plus

$$\sum_{y\in E} \pi\{y\} = \sum_{y\in E} \lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in E} P^n(x,y) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Donc la suite π définit une mesure de probabilité sur E. De plus, on a

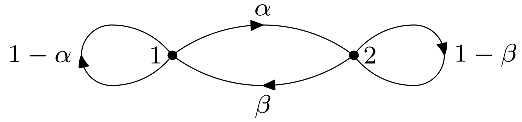
$$\begin{aligned}\pi\{y\} &= \lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1}(x,y)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{z\in E} P^n(x,z)P(z,y) = \sum_{z\in E} \lim_{n\to\infty} P^n(x,z)P(z,y) = \sum_{z\in E} \pi\{z\}P(z,y) = (\pi P)\{y\},\end{aligned}$$

ce qui montre que π est invariante par P. □

Remarque. — L'hypothèse de finitude de E est importante dans la démonstration de ce théorème puisqu'elle permet d'intervertir sommes et limites sans hypothèse additionnelle sur la convergence des suites envisagées.

Exemples. — *a*) Nous considérons une chaîne de Markov à deux états de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$



En supposant $\alpha+\beta>0$, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$P^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} & -\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & -\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \times (1-\alpha-\beta)^n \longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $(\beta/(\alpha+\beta), \alpha/(\alpha+\beta))$ est une mesure de probabilité invariante.

b) Sur l'espace d'états $E=\{1,2,3\}$, on considère la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nous savons que

$$P^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \times \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui montre que P admet $(1/5, 2/5, 2/5)$ pour mesure de probabilité invariante.

Exemple (marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$). — Si $X=(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ associée à un paramètre $p\in[0,1]$ et $q=1-p\in[0,1]$, le calcul explicite des probabilités de transition montre que les suites $\big(P^n(x,y)\big)_{n\geqslant 0}$ tendent vers 0 pour tous x, $y\in\mathbb{Z}$. Le vecteur $(0)_{x\in\mathbb{Z}}$ est invariant par la matrice de transition de la marche mais n'est bien sûr pas une mesure de probabilité.

Si $p\neq 1/2$, la marche est asymétrique. Elle s'écrit $X_n = X_0+\xi_1+\cdots+\xi_n$, $n\geqslant 0$, où $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes toutes de loi $q\delta_{\{-1\}}+p\delta_{\{1\}}$ et donc d'espérance $\mathbb{E}[\xi_1]=-q+p=2p-1$. D'après la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \longrightarrow 0+\mathbb{E}[\xi_1] = 2p-1 \qquad \text{presque sûrement quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Puisque cette limite est différente de 0, nous obtenons un équivalent de la suite aléatoire $(X_n)_{n\geqslant 0}$:

$$X_n \sim n\times(2p-1) \qquad \text{presque sûrement quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Ceci montre que, pour toute loi (de probabilité) initiale, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\pm\infty$ presque sûrement, et donc qu'il y a convergence en loi vers $\delta_{\{\pm\infty\}}$ qui n'est pas une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$ ($\pm\infty=+\infty$ si $p>1/2$ et $\pm\infty=-\infty$ si $p<1/2$).

Pour $p=1/2$, la situation est plus délicate, nous y reviendrons à la fin de cette section pour apprendre que seules les multiples de la mesure uniforme $(1)_{x\in\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ sont invariantes par la marche aléatoire simple symétrique et que cette dernière n'admet donc pas de mesure de probabilité invariante.

Remarquons que dans tous les cas, la mesure uniforme $(1)_{x\in\mathbb{Z}}$ — ainsi que ses multiples — est invariante, mais ce n'est pas une mesure de probabilité.

Remarque d'algèbre linéaire. — Supposons que l'espace d'états est fini, par exemple $E=\{1,\ldots,n\}$. Rechercher un vecteur ligne $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ tel que

$$\lambda P = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\times\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \lambda$$

ou encore

$$\sum_{x\in E} \lambda\{x\} \times P(x,y) = \lambda\{y\} \qquad \text{pour tout } y \in E,$$

consiste, par tranposition, à chercher des solutions de ${}^tP\,{}^t\lambda = {}^t\lambda$, autrement dit à trouver λ tel que ${}^t\lambda$ soit un vecteur propre pour la valeur 1 de ${}^tP$. Or P et ${}^tP$ ont même polynôme caractéristique par invariance du déterminant par transposition :

$$\det(P - x\,\mathrm{Id}) = \det{}^t(P - x\,\mathrm{Id}) = \det({}^tP - x\,{}^t\mathrm{Id}) = \det({}^tP - x\,\mathrm{Id}).$$

Mais 1 est valeur propre de P puisque

$$P \times \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

ce qui découle du fait que la somme des coefficients de chaque ligne de P vaut 1. Donc ${}^tP$ possède aussi 1 pour valeur propre, il existe alors au moins un vecteur propre non nul ${}^t\lambda$ associé. Le problème est alors de savoir si on peut trouver un tel vecteur avec des coordonnées toutes positives (au sens large). L'algèbre linéaire élémentaire ne suffit pas pour répondre à cette question car la condition de positivité des coefficients est de nature analytique. Cette question peut être abordée par des méthodes de l'Analyse, nous le ferons de manière probabiliste.

On définit le temps moyen passé en $x \in E$ entre deux visites de $z \in E$ par

$$\gamma^z\{x\} = \mathbb{E}^z\left[\sum_{n=0}^{T_{\mathrm{e}}^z - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}\right] \qquad \text{où} \qquad T_{\mathrm{e}}^z = \inf\{n > 0 : X_n = z\}.$$

Théorème 21. — *Soit P une matrice de transition irréductible et récurrente et $z \in E$. Alors*

(i) $\gamma^z\{z\} = 1$ *;*

(ii) $\gamma^z = (\gamma^z\{x\})_{x\in E}$ *vérifie* $\gamma^z P = \gamma^z$ *;*

(iii) $0 < \gamma^z\{x\} < \infty$ *pour tout* $x \in E$.

Remarques. — *a*) Nous rappelons que si E est fini et P est irréductible, alors P est récurrente. Notons qu'alors γ^z correspond à une mesure finie non nulle sur E, un de ses multiples positifs est alors une mesure de probabilité invariante et nous verrons qu'avec l'hypothèse d'irréductibilité, c'est la seule.

b) Si E est infini, P peut être irréductible sans être récurrente. De plus, γ^z ne correspond pas toujours à une mesure finie dans ce cadre.

Démonstration. — (i) Entre les instants 0 et T_{e}^z, le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne passe en z qu'aux dates 0 et T_{e}^z. On a donc identiquement

$$\sum_{n=0}^{T_{\mathrm{e}}^z - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}} = 1$$

variable aléatoire dont l'espérance est $\gamma^z\{z\}$ qui est donc égale à 1.

(ii) Pour $n \geqslant 1$, l'événement $\{n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\}$ ne dépend que de $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ puisqu'il est égal à $\{X_1 \neq z, \ldots, X_{n-1} \neq z\}$, donc d'après la propriété de Markov simple au temps $n-1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, X_n = y, n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} &= \mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} \times \mathbb{P}^z\{X_n = y \,|\, X_{n-1} = x, n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\}\\ &= \mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} \times \mathbb{P}^z\{X_n = y \,|\, X_{n-1} = x\} = \mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} \times P(x,y).\end{aligned}$$

Comme P est récurrente, on a $\mathbb{P}^z\{T_\mathrm{e}^z < \infty\} = 1$ donc $X_0 = X_{T_\mathrm{e}^z} = z$ avec probabilité 1 sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^z$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\gamma^z\{y\} &= \mathbb{E}^z\left[\sum_{n=1}^{T_\mathrm{e}^z} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right] = \mathbb{E}^z\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \times \mathbb{1}_{\{n\leqslant T_\mathrm{e}^z\}}\right] = \mathbb{E}^z\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y, n\leqslant T_\mathrm{e}^z\}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}^z\left[\mathbb{1}_{\{X_n=y,n\leqslant T_\mathrm{e}^z\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^z\{X_n = y, n \leqslant T_\mathrm{e}^z\}\end{aligned}$$

où on notera que la première égalité s'obtient en distinguant deux cas : si $y \neq z$, on a $\mathbb{1}_{\{X_0=y\}} = \mathbb{1}_{\{X_{T_\mathrm{e}^z}=y\}} = 0$, et si $y = k$, $\mathbb{1}_{\{X_0=y\}} = \mathbb{1}_{\{X_{T_\mathrm{e}^z}=y\}} = 1$ avec probabilité 1 sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}^z$, on ne change donc rien en sommant de 0 à $T_\mathrm{e}^z - 1$ ou de 1 à T_e^z. Pour $1 \leqslant n < \infty$, on écrit l'événement $\{X_n = y, n \leqslant T_\mathrm{e}^z\}$ comme la réunion disjointe des événements $\{X_{n-1} = x, X_n = y, n \leqslant T_\mathrm{e}^z\}$, $x \in E$, pour obtenir

$$\gamma^z\{y\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in E} \mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, X_n = y, n \leqslant T_\mathrm{e}^z\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in E} P(x,y) \times \mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, n \leqslant T_\mathrm{e}^z\}$$

la dernière égalité résultant de la propriété de Markov simple au temps $n-1$. Puis finalement, par des manipulations élémentaires,

$$\begin{aligned}\gamma^z\{y\} &= \sum_{x\in E} P(x,y) \times \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^z\{X_{n-1} = x, n \leqslant T_\mathrm{e}^z\} = \sum_{x\in E} P(x,y) \times \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}^z\left[\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x,n\leqslant T_\mathrm{e}^z\}}\right] \\ &= \sum_{x\in E} P(x,y) \times \mathbb{E}^z\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x,n\leqslant T_\mathrm{e}^z\}}\right] = \sum_{x\in E} P(x,y) \times \mathbb{E}^z\left[\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_m=x,m\leqslant T_\mathrm{e}^z-1\}}\right] \\ &= \sum_{x\in E} P(x,y) \times \mathbb{E}^z\left[\sum_{m=0}^{T_\mathrm{e}^z-1} \mathbb{1}_{\{X_m=x\}}\right] = \sum_{x\in E} P(x,y) \times \gamma^z\{x\} = \sum_{x\in E} \gamma^z\{x\} \times P(x,y) \\ &= (\gamma^z P)\{y\},\end{aligned}$$

ce qui est le résultat désiré.

(iii) Puisque P est irréductible, pour tout état $x \in E$, il existe $m, n \geqslant 0$ tels que $P^m(z,x) > 0$ et $P(x,z)^{(n)} > 0$ et . Alors on a

$$\gamma^z\{x\} = \sum_{y\in E} \gamma^z\{y\}P(y,x)^{(m)} \geqslant \gamma^z\{z\}P^m(z,x) = P^m(z,x) > 0$$

et

$$\gamma^z\{x\}P(x,z)^{(n)} \leqslant \sum_{y\in E} \gamma^z\{y\}P(y,z)^{(n)} = \gamma^z\{z\} = 1,$$

et donc finalement $0 < \gamma^z\{x\} \leqslant 1/P(x,z)^{(n)} < \infty$. □

Théorème 22. — *Soit P une matrice de transition irréductible et soit λ une mesure invariante vérifiant $\lambda\{z\} = 1$ pour un certain $z \in E$. Alors $\lambda \geqslant \gamma^z$. Si de plus P est récurrente alors $\lambda = \gamma^z$.*

Démonstration. — Pour tout $y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda\{y\} &= \sum_{x_0 \in E} \lambda\{x_0\} \times P(x_0, y) \\
&= \sum_{x_0 \neq z} \lambda\{x_0\} \times P(x_0, y) + P(z, y) \\
&= \sum_{x_0, x_1 \neq z} \lambda\{x_1\} \times P(x_1, x_0) \times P(x_0, y) + \Big(P(z, y) + \sum_{x_0 \neq z} P(z, x_0) \times P(x_0, y)\Big) \\
&= \sum_{x_0, \ldots, x_n \neq z} \lambda\{x_n\} \times P(x_n, x_{n-1}) \times \cdots \times P(x_0, y) \\
&\quad + \Big(P(z, y) + \sum_{x_0 \neq z} P(z, x_0) \times P(x_0, y) + \cdots + \sum_{x_0, \ldots, x_{n-1} \neq z} P(z, x_{n-1}) \times \cdots \times P(x_0, y)\Big) \\
&\geqslant P(z, y) + \sum_{x_0 \neq z} P(z, x_0) \times P(x_0, y) + \cdots + \sum_{x_0, \ldots, x_{n-1} \neq z} P(z, x_{n-1}) \times \cdots \times P(x_0, y) \\
&= \mathbb{P}^z\{X_1 = y, 1 \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} + \mathbb{P}^z\{X_2 = y, 2 \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} + \cdots + \mathbb{P}^z\{X_n = y, n \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} \\
&\longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X_m = y, m \leqslant T_{\mathrm{e}}^z\} = \gamma^z\{y\} \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini.}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $y \in E$, $\lambda\{y\} \geqslant \gamma^z\{y\}$, c'est-à-dire $\lambda \geqslant \gamma^z$.

Si P est de plus récurrente, on sait d'après le théorème 22 que γ^z est invariante. Donc $\mu = \lambda - \gamma$, qui est encore une mesure positive, est elle aussi invariante. Comme P est irréductible, pour $x \in E$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $P^n(x, z) > 0$, et

$$0 = \mu\{z\} = \sum_{y \in E} \mu\{y\} \times P^n(y, z) \geqslant \mu\{x\} \times P^n(x, z),$$

et donc $\mu\{x\} = 0$. □

Définition 27. — Soit $x \in E$ un état récurrent, c'est-à-dire tel que

$$\mathbb{P}^x\{X_n = x \text{ pour une infinité de } n\} = 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \mathbb{P}^x\{T_{\mathrm{e}}^x < \infty\} = 1.$$

Si le temps de retour moyen $m(x) = \mathbb{E}^x[T_{\mathrm{e}}^x]$ est fini, alors l'état x est dit *récurrent positif*. Si $m(x) = \mathbb{E}^x[T_{\mathrm{e}}^x]$ est infini, l'état x est dit *récurrent nul*.

Théorème 23. — *Soit P une matrice de transition irréductible. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *tout état est récurrent positif;*

(ii) *au moins un état est récurrent positif;*

(iii) *P a une mesure de probabilité invariante π.*

De plus, si (iii) *est réalisé, on a $m(x) = 1/\pi\{x\}$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. — (i) *implique* (ii) est évident.

(ii) *implique* (iii). Si x est un état récurrent positif, en particulier x est récurrent, donc P, qui est irréductible, est récurrente. D'après le théorème 21, $\gamma^x = (\gamma^x\{y\})_{y \in E}$ est invariant. Mais

$$\sum_{y \in E} \gamma^x\{y\} = \sum_{y \in E} \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{T_{\mathrm{e}}^x - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}}\right]$$

$$= \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{T_e^x-1}\sum_{y\in E}\mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right] = \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{T_e^x-1}1\right] = \mathbb{E}^x[T_e^x] = m(x) < \infty.$$

Donc, en posant $\pi\{y\} = \gamma^x\{y\}/m(x)$, $y \in E$, on définit une mesure de probabilité invariante sur E.

(iii) *implique* (i). Soit $z \in E$ un état. Comme π est une mesure de probabilité, il existe un état $x \in E$ tel que $\pi\{x\} > 0$. Comme P est irréductible, il existe $n \geqslant 0$ tel que $P^n(x,z) > 0$. On en déduit que

$$\pi\{z\} = \sum_{y\in E}\pi\{y\} \times P^n(y,z) \geqslant \pi\{x\} \times P^n(x,z) > 0.$$

Soit $\lambda\{x\} = \pi\{x\}/\pi\{z\}$, $x \in E$. La mesure λ est invariante et vérifie $\lambda\{z\} = 1$. D'après le théorème précédent, on a alors $\lambda \geqslant \gamma^z$. On en déduit que

$$m(z) = \sum_{x\in E}\gamma^z\{x\} \leqslant \sum_{x\in E}\lambda\{x\} = \frac{1}{\pi\{z\}}\sum_{x\in E}\pi\{x\} = \frac{1}{\pi\{z\}} < \infty$$

et z est donc récurrent positif. Comme cela est vrai pour tout $z \in E$, on obtient que (i) est vérifié.

Pour le dernier point, on reprend les arguments de (iii) *implique* (i) en utilisant le fait que que P est récurrente. On a alors $\lambda = \gamma^z$ s'après le théorème 22, et l'inégalité ci-dessus est alors une égalité. □

THÉORÈME 24. — *Soient E un ensemble fini et P une matrice de transition irréductible sur E. Alors tous les états sont récurrents positifs et P a une unique mesure de probabilité invariante.*

Démonstration. — Nous savons qu'une matrice de transition sur un ensemble fini admet au moins une classe récurrente. Puisque P est irréductible, l'unique classe E est récurrente et donc P est irréductible récurrente. D'après le théorème 21, γ^z est une mesure invariante et ses coefficients sont finis. Alors

$$m(z) = \sum_{x\in E}\gamma^z\{x\} < \infty$$

puisque somme finie de nombres finis. Donc z est récurrent positif pour tout $z \in E$. En posant

$$\pi\{y\} = \frac{\gamma^z\{y\}}{\sum_{x\in E}\gamma^z\{x\}}$$

on obtient une mesure de probabilité invariante. D'après le théorème précédent, celle-ci est l'unique mesure de probabilité invariante. □

Notations. — Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes : $\mathcal{R} \subset E$ est l'ensemble des points récurents de E, $\mathcal{T} \subset E$ est l'ensemble des points transients de E, $\mathcal{T}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{T}$ est l'ensemble des points x de $\mathcal{T}$ tel qu'il existe $y \in \mathcal{R}$ tel que $P(x,y) > 0$.

LEMME 3. — *On suppose l'espace des états E fini. Si $x \in \mathcal{T}$, alors l'une au moins des possibilités suivantes est satisfaite :*

(i) $x \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$;

(ii) *il existe* $x' \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ *tel que* $x \rightsquigarrow x'$.

En particulier $\mathcal{R}$ est non vide.

Démonstration. — Notons $x \not\rightsquigarrow x'$ si $x \rightsquigarrow x'$ est fausse. Soit $x_0 \in \mathcal{T}$ un état transient. Montrons qu'il existe $y \in \mathcal{R}$ tel que $x_0 \rightsquigarrow y$. Par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas. La classe contenant x_0 n'est pas fermée. Il existe donc x_1 n'appartenant pas à cette classe tel que $x_0 \rightsquigarrow x_1$ et bien sûr $x_1 \not\rightsquigarrow x_1$; on a de plus $x_0 \neq x_1$ et, par hypothèse, x_1 est transient puisque x_0 ne mène à aucun point récurrent. Par transitivité de la relation « mener à », x_1 vérifie la même hypothèse que x_0 : il ne mène à aucun point récurrent. On continue ainsi pour obtenir une suite

$$x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow x_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_n \rightsquigarrow \cdots$$

Pour deux indices différents $m < n$, on a nécessairement $x_m \neq x_n$; nous l'avons déjà vu pour $m + 1 = n$, et si, pour $m + 1 < n$, nous avions $x_m = x_n$, alors on aurait $x_m \rightsquigarrow x_{m+1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_m$ et donc $x_{m+1} \rightsquigarrow x_m$ ce qui est interdit par la construction. La suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ énumère ainsi une partie infinie de $\mathcal{T}$ ce qui est contradictoire avec la finitude de $\mathcal{T}$.

Soit ainsi $x \in \mathcal{T}$ et $y \in \mathcal{R}$ tels que $x \rightsquigarrow y$. Il existe alors une famille finie de points $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ telle que $P(x_0, x_1) > 0, \ldots, P(x_{n-1}, x_n) > 0$. Soit x_ℓ le premier état récurrent de cette suite. Alors pour tout $\ell \leqslant m \leqslant n$, x_m est récurrent par fermeture des classes récurrentes, et pour tout $0 \leqslant m \leqslant \ell - 1$, x_m est transient. Par construction $x' = x_{\ell-1} \in \mathcal{T}_\mathcal{R}$ et $x \rightsquigarrow x'$. □

Exercice. — Sur $\mathcal{R}$, la relation « mener à » est une relation d'équivalence.

Correction. — Nous savons déjà que cette relation est transitive sur tout E, elle est donc transitive sur un quelconque de ses sous-ensembles, en particulier $\mathcal{R}$, et par définition elle est symétrique puisque tout point mène à lui-même en 0 pas. Pour la symétrie, si x, $y \in \mathcal{R}$ vérifient $x \rightsquigarrow y$, par fermeture de la classe communicante de x, le point y appartient à cette même classe, et donc on a aussi $y \rightsquigarrow x$. (Vrai pour E fini ou dénombrable.) □

Lemme 4. — *Si λ est une mesure invariante telle que pour un $x \in E$, $\lambda\{x\} = 0$, alors*

$$y \rightsquigarrow x \quad \Longrightarrow \quad \lambda\{y\} = 0.$$

Démonstration. — Soit $y \in E$ tel que $y \rightsquigarrow x$. Il existe donc $y = y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = x$ tels que $P(y_0, y_1) \times \cdots \times P(y_{n-1}, y_n) > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \lambda\{x\} = (\lambda P^n)\{x\} = \sum_{z_0, \ldots, z_{n-1}} & \lambda\{z_0\} \times P(z_0, z_1) \times \cdots \times P(z_{n-1}, x) \\ & \geqslant \lambda\{y_0\} \times P(y_0, y_1) \times \cdots \times P(y_{n-1}, x), \end{aligned}$$

et donc $\lambda\{y\} = 0$. □

Remarque. — Ce dernier lemme est vrai même si E est dénombrable. En particulier, il permet de voir que si une mesure invariante s'annule en un point d'une classe communicante, elle est nulle sur toute la classe ainsi que toutes celles qui peuvent mener à elles. Ce qui est un résultat assez remarquable.

Théorème 25. — *On suppose l'espace des états E fini. Soit λ une mesure invariante. Alors $\lambda(\mathcal{T}) = 0$. En particulier, pour tout état transient x, on a $\lambda\{x\} = 0$.*

Démonstration. — On a

$$\lambda(\mathcal{T}) = (\lambda P)(\mathcal{T}) = \sum_{y \in \mathcal{T}} (\lambda P)\{y\} = \sum_{y \in \mathcal{T}} \sum_{x \in E} \lambda\{x\} \times P(x, y) = \sum_{x \in E} \lambda\{x\} \sum_{y \in \mathcal{T}} P(x, y).$$

Comme pour tout $x \notin \mathcal{T}$ donc $x \in \mathcal{R}$, on a par fermeture des classes récurrentes, $P(x,y) = 0$, on a donc

$$\lambda(\mathcal{T}) = \sum_{x\in\mathcal{T}} \lambda\{x\} \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x,y).$$

Soit $x \in \mathcal{T}$. Supposons par l'absurde que $\lambda\{x\} > 0$. D'après l'avant dernier lemme, il existe $x' \in \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ tel que $x \rightsquigarrow x'$ et donc, par le lemme précédent, $\lambda\{x'\} > 0$. Mais puisqu'il existe $r \in \mathcal{R}$ tel que $P(x',r) > 0$, on a

$$\sum_{y\in\mathcal{T}} P(x',y) < 1, \qquad \text{et, puisque } \lambda\{x'\} > 0, \qquad \lambda\{x'\} \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x',y) < \lambda\{x'\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{T}) = \sum_{x\in\mathcal{T}} \lambda\{x\} \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x,y) &= \sum_{x\in\mathcal{T}\setminus\{x'\}} \lambda\{x\} \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x,y) + \lambda\{x'\} \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x',y)\\ &\leqslant \sum_{x\in\mathcal{T}\setminus\{x'\}} \lambda\{x\} \times 1 + \lambda\{x'\} \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x',y) < \lambda(\mathcal{T}\setminus\{x'\}) + \lambda\{x'\} = \lambda(\mathcal{T}).\end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc, pour tout $x \in \mathcal{T}$, $\lambda\{x\} = 0$, et ainsi $\lambda(\mathcal{T}) = 0$. □

Théorème 26. — *On suppose l'espace des états E fini. Alors il y a unicité de la mesure de probabilité invariante si et seulement si P n'a qu'une seule classe récurrente, les autres mesures invariantes étant alors multiples de celle-ci.*

Démonstration. — Si P a au moins deux classes récurrentes R_1 et R_2, désignons par P_1 et P_2 les sous-matrices qui sont les restrictions de P aux classes correspondantes. Ce sont des matrices stochastiques qui sont irréductibles et récurrentes et nous notons π_1 et π_2 leurs uniques mesures de probabilité invariantes. Alors pour tout $t \in [0,1]$, la mesure de probabilité

$$\pi_t = t \times \pi_1(\,.\cap R_1) + (1-t) \times \pi_2(\,.\cap R_2)$$

est une mesure de probabilité invariante sur E. Il n'y a donc pas unicité.

S'il n'y a qu'une seule classe récurrente $R = \mathcal{R}$, alors toute mesure de probabilité invariante est nulle sur $\mathcal{T} = R^c$ et sa restriction à R est invariante par la restriction de P à R et donc égale à l'unique mesure de probabilité invariante π_R de cette restriction. On a donc $\pi = \pi_R(\,.\cap R)$, d'où l'unicité. Pour finir, toute mesure invariante λ est finie sur E puisque E est fini, donc λ est multiple d'une mesure de probabilité invariante, et donc de π. □

Théorème 27. — *On suppose l'espace d'états E fini et on note $R_1, \dots, R_k$ les classes récurrentes de P. Alors toute mesure invariante λ sur E s'écrit*

$$\lambda = \sum_{\ell=1}^{z} t_\ell \times \pi_\ell(\,.\cap R_\ell) \qquad \textit{avec } t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+,$$

où, pour $1 \leqslant \ell \leqslant k$, π_ℓ est l'unique mesure de probabilité invariante sur R_ℓ par la restriction de P à R_ℓ. C'est une mesure de probabilité invariante si et seulement si $t_1 + \cdots + t_k = 1$.

Démonstration. — C'est immédiat. □

Exemples (marches aléatoires simples symétriques dans $\mathbb{Z}^d$). — *a)* La marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est irréductible, récurrente. Elle admet la mesure uniforme $(1)_{x\in\mathbb{Z}}$ comme mesure invariante, qui n'est pas finie, et nous savons que toute autre mesure invariante est multiple de celle-ci grâce au théorème 22. Cette marche n'admet donc aucune mesure de probabilité invariante.

b) De même, la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ est irréductible, récurrente. Elle admet la mesure uniforme $(1)_{x\in\mathbb{Z}}$ comme mesure invariante, qui n'est pas finie. Cette marche n'admet donc aucune mesure de probabilité invariante.

c) La marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^3$ est irréductible mais transiente. On constate que la mesure uniforme $(1)_{x\in\mathbb{Z}}$ en est une mesure invariante. Il est possible de montrer qu'elle n'admet pas de mesure de probabilité invariante, par exemple en la réduisant en une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: notons X la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^3$ et Y la marche obtenue faisant un pas positif sur $\mathbb{Z}$ dès que X fait un pas positif suivant l'un des 3 axes, négatif sinon ; Y est alors une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et si X avait une mesure de probabilité invariante, c'est-à-dire que sous cette loi initiale les $(X_n)_{n\geqslant 0}$ auraient même loi cette loi invariante, on en déduirait qu'il en serait de même pour Y ce qui est impossible d'après le premier exemple. Dans $\mathbb{Z}^4$, on se ramènerait à la marche sur $\mathbb{Z}^2$, dans $\mathbb{Z}^n$, on ferait de manière similaire en tenant compte de la parité de n, c'est-à-dire en se ramenant ou bien à $\mathbb{Z}$ ou bien $\mathbb{Z}^2$.

d) Considérons une marche simple asymétrique non dégénérée sur $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire, supposons $p \in\,]0,1[\backslash\{1/2\}$. Pour qu'une mesure λ soit invariante on doit avoir

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{Z}, \qquad \lambda\{x\} = (\lambda P)\{x\} = p \times \lambda\{x-1\} + q \times \lambda\{x+1\}.$$

Grâce à des calculs antérieurs, nous connaissons les solutions finies de cette équation à l'échange de p et q près. Elles sont de la forme

$$\lambda\{x\} = A + B(p/q)^x, \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

Puisque l'ensemble des solutions forme une famille à deux paramètres, la chaîne ne peut être récurrente d'après le théorème 22, mais nous le savions déjà.

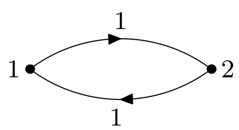
Exercice. — Soit F une classe fermée, en particulier si F est récurrente, associée à une matrice de transition P. Montrer que la sous-matrice de P obtenue en n'en conservant que les coefficients indexés par $F \times F$ est une matrice stochastique et qu'elle est irréductible. (Cette propriété a été utilisée dans cette section.)

6. **Convergence vers l'équilibre**

Nous avons vu que si E est fini et qu'il existe $x \in E$ tel que $\big(P^n(x,y)\big)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\pi\{y\}$ pour tout $y \in E$, alors $\pi = (\pi\{y\})_{y\in E}$ est une mesure de probabilité invariante. Une telle convergence n'est pas toujours assurée. Déjà lorsque E est fini et possède strictement plus d'une classe récurrente, il existe plusieurs (une infinité de) mesures de probabilité invariantes ; alors une telle convergence a lieu, l'identification de la mesure limite n'est pas immédiate. De plus, lorsque P n'a qu'une seule classe récurrente ou mieux est irréductible, ce type de convergence peut n'avoir lieu pour aucun état initial comme le montrent les exemples qui suivent.

Exemples. — *a*) Considérons $E = \{1,2\}$ et

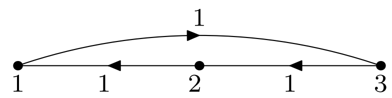
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



On a $P^{2n} = \mathrm{Id}$ et $P^{2n+1} = P$. Ainsi aucun des coefficients de la suite de matrices $(P^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge. Plus encore, si la chaîne part de l'état 1 par exemple, elle occupe alternativement l'état 1 puis l'état 2. La suite des lois ne converge pas vers l'unique — P est irréductible — mesure de probabilité invariante $\frac{1}{2}\delta_{\{1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{2\}}$.

b) Considérons $E = \{1, 2, 3\}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Par le calcul ou en lisant sur le graphique, on a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^3 = \mathrm{Id},$$

et ainsi

$$P^{3n} = \mathrm{Id}, \qquad P^{3n+1} = P, \qquad P^{3n+2} = P^2 \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Nous avons la même situation que précédement : quelque soit l'état initial, la suite des lois de la chaîne converge pas vers l'unique mesure invariante $\frac{1}{3}\delta_{\{1\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{2\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{3\}}$.

c) *L'urne d'Ehrenfest.* — Pour l'urne d'Ehrenfest, on constate que si X_0 est pair, alors X_n a la même parité que n. De même, si X_0 est impair, X_n a la parité opposée à celle de n.

d) *Marches aléatoires simples sur* $\mathbb{Z}$. — Nous savons que si $p \neq 1/2$, la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ converge vers $\pm\infty$ presque sûrement et que si $p = 1/2$, la loi initiale est diffusée sur tout $\mathbb{Z}$ de sorte qu'on obtient à la limite la mesure nulle.

Les deux premiers exemples sont assez extrêmes puisque la dynamique markovienne y est déterministe. De plus, on constate dans le premier exemple que chaque état est fréquenté selon une période égale à 2, dans le second, selon une période égale à 3. Cette notion de périodicité peut être étendue à des dynamiques markoviennes non déterministe. Nous nous conterons de définir l'absence de périodicité. L'espace des états E est, sauf mention spéciale, fini ou dénombrable, et P est une matrice de transition sur E.

Définition 28. — Un état $x \in E$ est *apériodique* si il existe $N_x \geqslant 0$ tel que $P^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geqslant N_x$, c'est-à-dire que $P^n(x,x) > 0$ pour n assez grand.

Exercice. — Montrer qu'un état $x \in E$ est apériodique si et seulement si

$$n_x = \mathrm{pgcd}\big\{n \geqslant 0 : P^n(x,x) > 0\big\} = 1,$$

où pgcd est l'opérateur « plus grand commun diviseur ». (Lorsque n_x est en entier supérieur ou égal à 2, l'état x est dit périodique de période n_x.)

Lemme 5. — *Supposons qu'il existe un état apériodique $x \in E$. Alors pour tous états y, z dans la classe communicante de x, on a $P^n(y,z) > 0$ pour n assez grand. En particulier, tout état y dans la classe communicante de x est apériodique.*

Démonstration. — Puisque y et z sont dans la classe communicante de x, il existe r, $s \geqslant 0$ tels que $P^r(y,x) > 0$ et $P^s(x,z) > 0$. Alors

$$P^{r+n+s}(y,z) = \sum_{\ell,m\in E} P^r(y,\ell) \times P^n(\ell,m) \times P^s(m,k) \geqslant P^r(y,x) \times P^n(x,x) \times P^s(x,z) > 0$$

pour n assez grand. On a donc la conclusion. $\square$

L'apériodicité est une propriété des classes communicantes d'après le lemme précédent, on pourra ainsi parler de classes apériodiques. Une matrice de transition sera dite apériodique si toutes ses classes le sont.

Théorème 28 (convergence vers l'équilibre). — *Soit P une matrice de transition irréductible et apériodique, et supposons qu'il existe une mesure de probabilité invariante π. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P), alors*

$$\mathbb{P}\{X_n = y\} \longrightarrow \pi\{y\} \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers l'infini, pour tout } y \in E.$$

En particulier,

$$P^n(x,y) \longrightarrow \pi\{y\} \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers l'infini, pour tout } x,\, y \in E.$$

Démonstration. — On utilise un argument de couplage : on introduit une seconde chaîne de Markov $Y = (Y_n)_{n\geqslant 0}$ indépendante de $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ et de même matrice de transition P, puis on définit un temps d'arrêt T et considère les deux processus obtenus en recollant X avant T avec Y après T et réciproquement. Plus précisément, soit $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov (π, P) indépendante de $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Fixons un état de référence $x_0 \in E$ et posons

$$T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = Y_n = x_0\}.$$

Première étape. — Nous montrons que $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$.

La suite $(W_n)_{n\geqslant 0} = ((X_n, Y_n))_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E \times E$, de matrice de transition $\widetilde{P}$ définie par

$$\widetilde{P}\big((x,y),(x',y')\big) = P(x,x') \times P(y,y'), \qquad (x,y),\, (x',y') \in E \times E,$$

et de loi initiale μ telle que

$$\mu\{(x,y)\} = \lambda\{x\} \times \pi\{y\}, \qquad (x,y) \in E \times E.$$

En effet, pour tous $(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_n) \in E \times E$, on a, d'abord par indépendance, puis par application de la propriété de Markov de chaque chaîne,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{(X_0,Y_0) = (x_0,y_0), \dots, (X_n,Y_n) = (x_n,y_n)\}\\
&\quad = \mathbb{P}\{X_0 = x_0, Y_0 = y_0, \dots, X_n = x_n, Y_n = y_n\}\\
&\quad = \mathbb{P}\big(\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} \cap \{Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n\}\big)\\
&\quad = \mathbb{P}\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} \times \mathbb{P}\{Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n\}\\
&\quad = \big(\lambda\{x_0\} \times P(x_0,x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1},x_n)\big) \times \big(\pi\{y_0\} \times P(y_0,y_1) \times \cdots \times P(y_{n-1},y_n)\big)\\
&\quad = \big(\lambda\{x_0\} \times \pi\{y_0\}\big) \times \big(P(x_0,x_1) \times P(y_0,y_1)\big) \times \cdots \times \big(P(x_{n-1},x_n) \times P(y_{n-1},y_n)\big),
\end{aligned}$$

on a donc ce qui était annoncé.

Comme la matrice de transition P est apériodique et irréductible, pour tous états x, y, x', $y' \in E$, on a d'après le lemme précédent

$$\widetilde{P}^n\big((x,y),(x',y')\big) = P^n(x,x') \times P^n(y,y') > 0$$

pour n assez grand, et donc la matrice de transition $\widetilde{P}$ est aussi apériodique et irréductible. De plus la mesure $\tilde{\pi}$ définie par

$$\tilde{\pi}\{(x,y)\} = \pi\{x\} \times \pi\{y\}, \qquad (x,y) \in E \times E$$

est invariante par $\widetilde{P}$ puisque, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$\begin{aligned}
\big(\tilde{\pi}\widetilde{P}\big)\{(x,y)\} &= \sum_{(x',y')\in E\times E} \tilde{\pi}\{(x',y')\} \times \widetilde{P}\big((x',y'),(x,y)\big) \\
&= \sum_{(x',y')\in E\times E} \pi\{x'\} \times \pi\{y'\} \times P(x',x) \times P(y,y') \\
&= \Big(\sum_{x'\in E} \pi\{x'\} \times P(x',x)\Big) \times \Big(\sum_{y'\in E} \pi\{y'\} \times P(y',y)\Big) \\
&= \pi\{x\} \times \pi\{y\} = \tilde{\pi}\{(x,y)\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théoreme 23, la matrice de transition $\widetilde{P}$ est récurrente positive puisqu'elle est irréductible et admet une mesure de probabilité invariante, notamment $\widetilde{P}$ est récurrente. Puisque $T = \inf\{n \geqslant 0 : (X_n, Y_n) = (x_0, x_0)\} = \inf\{n \geqslant 0 : W_n = (x_0, x_0)\}$, on a alors $\mathbb{P}\{T < \infty = 1\}$.

Deuxième étape. — Nous posons

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{si } n < T \\ Y_n & \text{si } n \geqslant T, \end{cases}$$

et nous allons montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P). Il est clair que T est un temps d'arrêt de la filtration naturelle de $(W_n)_{n\geqslant 0}$. La propriété forte de Markov appliquée à la chaîne $(W_n)_{n\geqslant 0}$ au temps T fini montre que $(W_{T+n})_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov $(\delta_{\{(b,b)\}}, \widetilde{P})$ indépendante de $\mathcal{F}_T^W$. Par symétrie, en remplaçant (X_{T+n}, Y_{T+n}) par (Y_{T+n}, X_{T+n}), on obtient encore une chaîne de Markov $\big(\delta_{\{(x_0,x_0)\}}, \widetilde{P}\big)$ indépendante de $\mathcal{F}_T^W$. En posant

$$Z'_n = \begin{cases} Y_n & \text{si } n < T \\ X_n & \text{si } n \geqslant T, \end{cases}$$

on en déduit que $(W'_n)_{n\geqslant 0} = ((Z_n, Z'_n))_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov $\big(\mu, \widetilde{P}\big)$. En particulier $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P). $(\ldots)$

Troisième étape. — Pour $y \in E$, on a

$$\mathbb{P}\{Z_n = y\} = \mathbb{P}\{X_n = y, n < T\} + \mathbb{P}\{Y_n = y, n \geqslant T\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\big|\mathbb{P}\{X_n = y\} - \pi\{y\}\big| &= \big|\mathbb{P}\{X_n = y\} - \mathbb{P}\{Y_n = y\}\big| \\
&= \big|\mathbb{P}\{Z_n = y\} - \mathbb{P}\{Y_n = y\}\big| \\
&= \big|\mathbb{P}\{X_n = y, n < T\} + \mathbb{P}\{Y_n = y, n \geqslant T\} - \mathbb{P}\{Y_n = y\}\big| \\
&= \big|\mathbb{P}\{X_n = y, n < T\} - \mathbb{P}\{Y_n = y, n < T\}\big| \\
&\leqslant \mathbb{P}\{n < T\}
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}\{n < T\}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on constate que $\mathbb{P}\{X_n = y\}$ tend vers $\pi\{y\}$ quand n tend vers l'infini. $\square$

7. Retournement du temps à une date déterministe

La propriété (simple) de Markov consiste en l'indépendance du passé et du futur conditionnellement au présent. La symétrie de cette propriété permet immédiatement d'affirmer que si $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une chaîne de Markov (dans sa filtration naturelle) alors la chaîne retournée $\big(\widehat{X}_n\big)_{0\leqslant n\leqslant N} = (X_{N-n})_{0\leqslant n\leqslant N}$ est aussi une chaîne de Markov (dans sa filtration naturelle).

PROPOSITION 9. — *Soit* $(X_n)_{n\geqslant 0}$ *une chaîne de de Markov, alors* $\big(\widehat{X}_n\big)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *est une chaîne de Markov. Si* $\big(P^{(n,n+1)}\big)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ *est une suite de matrice de transition de la chaîne* $(X_n)_{n\geqslant 0}$, *alors toute suite de matrices de transition* $\big(\widehat{P}^{(n,n+1)}\big)_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ *vérifiant*

$$\mu_{N-n}\{x\} \times \big(\widehat{P}^{(n,n+1)}\big)(x,y) = \mu_{N-n-1}\{y\} \times \big(P^{(N-n-1,N-n)}\big)(y,x), \qquad x,\, y \in E,$$

où μ_n *est la loi de* X_n, $0 \leqslant n \leqslant N$, *est une suite de matrices de transition de la chaîne* $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 0}$.

Démonstration. — La propriété de Markov pour la chaîne retournée est clairement réalisée par indépendance du futur et du passé conditionnellement au présent. De plus, pour x, $y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\mu_{N-n}\{x\} \times \big(\widehat{P}^{(n,n+1)}\big)(x,y) &= \mathbb{P}\{X_{N-n} = x\} \times \mathbb{P}\big\{\widehat{X}_{n+1} = y \;\big|\; \widehat{X}_n = x\big\} \\
&= \mathbb{P}\{X_{N-n} = x\} \times \mathbb{P}\{X_{N-n-1} = y \,|\, X_{N-n} = x\} \\
&= \mathbb{P}\{X_{N-n-1} = y, X_{N-n} = x\} \\
&= \mathbb{P}\{X_{N-n-1} = y\} \times \mathbb{P}\{X_{N-n} = x \,|\, X_{N-n-1} = y\} \\
&= \mu_{N-n-1}\{y\} \times \big(P^{(N-n-1,N-n)}\big)(y,x),
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Remarques. — *a*) Une telle matrice de transition $\widehat{P}^{(n,n+1)}$, $0 \leqslant N \leqslant N-1$, est définie par

$$\big(\widehat{P}^{(n,n+1)}\big)(x,y) = \frac{\mu_{N-n-1}\{y\}}{\mu_{N-n}\{x\}} \times \big(P^{(N-n-1,N-n)}\big)(y,x)$$

pour toutes les lignes x pour lesquelles le dénominateur $\mu_{N-n}\{x\}$ est strictement positif. Si, pour un $x \in E$, $\mu_{N-n}\{x\} = 0$, ceci signifie que X ne passe pas par x au temps $N-n$, et donc $\widehat{X}$ n'y passe pas non plus au temps n ; on peut alors remplir la ligne correspondante de $\widehat{P}^{(n,n+1)}$ par ce qu'on veut.

b) Si la chaîne $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est homogène, lorsque le quotient a un sens, on a

$$\big(\widehat{P}^{(n,n+1)}\big)(x,y) = \frac{\mu_{N-n-1}\{y\}}{\mu_{N-n}\{x\}} \times P(y,x)$$

ce qui ne définit pas nécessairement une famille de matrices de transition homogène : quand on inverse le sens du temps, des évolutions qui étaient homogènes, telle que la diffusion de la poussière depuis un petit tas, deviennent assez peu naturelles ; les règles d'évolution tiennent compte des états antérieurs et ne sauraient donc être homogènes.

THÉORÈME 29. — *Soit* $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *une chaîne de de Markov homogène de matrice de transition* P. *Supposons que sa loi initiale* π *est une mesure de probabilité invariante. Alors,* $\big(\widehat{X}_n\big)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *est une chaîne de de Markov homogène de loi initiale* π *et de matrice de transition* $\widehat{P}$ *vérifiant*

$$\pi\{x\} \times \hat{P}(x,y) = \pi\{y\} \times P(y,x), \qquad \textit{pour tous } x,\, y \in E.$$

Démonstration. — C'est une application immédiate de ce qui précède. □

PROPOSITION 10. — *Soient P une matrice de transition admettant une mesure de probabilité invariante π et $\widehat{P}$ une matrice de transition vérifiant*

$$\pi\{x\} \times \widehat{P}(x,y) = \pi\{y\} \times P(y,x), \qquad \textit{pour tous } x,\, y \in E.$$

Alors

(i) *la mesure de probabilité π est invariante par $\widehat{P}$;*

(ii) *si P est irréductible, alors $\widehat{P}$ est irréductible.*

Démonstration. — (i) Nous avons immédiatement, pour tout $x \in E$,

$$\big(\pi\widehat{P}\big)\{x\} = \sum_{y\in E} \pi\{y\} \times \hat{P}(y,x) = \sum_{y\in E} \pi\{x\} \times P(x,y) = \pi\{x\} \sum_{y\in E} P(x,y) = \pi\{x\},$$

ce qui montre que π est invariante par $\widehat{P}$.

(ii) Soient x, $y \in E$. Comme P est irréductible, la mesure de probabilité π a tous ses coefficients strictements positifs puisqu'elle est invariante. De plus, pour tous x, $y \in E$, il existe $y = x_n, \ldots, x_0 = x \in E$ tels que $P(x_n, x_{n-1}) \times \cdots \times P(x_1, x_0) > 0$; on a alors

$$\begin{aligned}\widehat{P}(x_0,x_1) \times \cdots \times \widehat{P}(x_{n-1},x_n) &= \frac{\pi\{x_n\}}{\pi\{x_{n-1}\}} \times P(x_n,x_{n-1}) \times \cdots \times \frac{\pi\{x_1\}}{\pi\{x_0\}} \times P(x_1,x_0)\\ &= \frac{\pi\{x_n\}}{\pi\{x_0\}} \times P(x_n,x_{n-1}) \times \cdots \times P(x_1,x_0) > 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\widehat{P}$ est irréductible. □

DÉFINITION 29. — Soit P une matrice de transition. Une mesure μ sur E est *réversible* pour P si

$$\mu\{x\} \times P(x,y) = \mu\{y\} \times P(y,x), \qquad \text{pour tous } x,\, y \in E.$$

Nota bene. — Étant donnée une matrice de transition P, rien n'assure sans condition supplémentaire que P admette une mesure réversible.

PROPOSITION 11. — *Si μ est une mesure réversible pour P, alors μ est invariante.*

Démonstration. — Si $x \in E$, on a

$$(\mu P)\{x\} = \sum_{y\in E} \mu\{y\} \times P(y,x) = \sum_{y\in E} \mu\{x\} \times P(x,y) = \mu\{x\} \sum_{y\in E} P(x,y) = \mu\{x\},$$

d'où l'invariance. □

PROPOSITION 12. — *Soit $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ une chaîne de Markov (λ, P) où λ est supposée être une mesure de probabilité réversible. Alors $\widehat{P} = P$ et la chaîne retournée $\big(\widehat{X}_n\big)_{0\leqslant n\leqslant N}$ a même loi que $(X_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$.*

Démonstration. — Immédiate. Notons que la loi de ces chaînes finies est une mesure de probabilité sur E^{N+1} et pas simplement une suite de lois de probabilité sur E. □

COROLLAIRE 2. — *Si la matrice de transition P est symétrique, alors la mesure uniforme est réversible, et donc, invariante.*

Démonstration. — Immédiate. □

Exemple important. — Un graphe (non orienté) est un ensemble au plus dénombrable de points E qualifiés de sommets, abstrait ou inclus dans un $\mathbb{R}^n$, et des arêtes reliants ces sommets, c'est-à-dire la donnée d'une relation symétrique $\mathcal{R}$ signifiant que $x \mathcal{R} y$ (ou $y \mathcal{R} x$) si et seulement si les sommets x et y sont reliés par une arête.

On peut dans certains cas convenir que tout sommet x est relié à lui-même, ce qui revient à demander que la relation $\mathcal{R}$ soit réflexive, ou au contraire exclure la réflexivité.

On définit la valence $v\{x\}$ d'un sommet $x \in E$ comme le nombre d'arêtes partant de x, c'est-à-dire $\mathrm{Card}\{y \in E : x \mathcal{R} y\}$. Nous supposerons être en présence d'un graphe tel que $1 \leqslant v\{x\} < \infty$ pour tout $x \in E$, qui est de plus connexe, c'est-à-dire qu'entre deux sommets, il existe une suite finie d'arêtes joignant ces sommets.

Nous souhaitons définir une matrice de transition P sur E qui tienne compte de manière homogène de la structure de graphe. Il y a plusieurs manière d'y parvenir, notamment si on convient, ou non, que chaque sommet est joint à lui-même.

Supposons que les sommets ne sont pas joints à eux-mêmes, et soient $p \in [0,1]$, $q = 1-p \in [0,1]$. Nous définissons une matrice de transition P sur E par

$$P(x,y) = \begin{cases} q & \text{si } x = y, \\ \dfrac{p}{v\{x\}} & \text{si } x \mathcal{R} y, \text{ autrement dit si } x \text{ et } y \text{ sont joints par une arête,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate alors que la mesure positive $v = (v\{x\})_{x\in E}$ est réversible puisque pour tous x, $y \in E$, on a si $x \neq y$ et $x \mathcal{R} y$,

$$v\{x\} \times P(x,y) = v\{x\} \times \frac{p}{v\{x\}} = p = v\{y\} \times \frac{p}{v\{y\}} = v\{y\} \times P(y,x)$$

les autres identités pour x et y non joints par une arête étant trivialement satisfaites. Notons que l'hypothèse $1 \leqslant v\{x\} < \infty$ pour tout $x \in E$ se montre essentielle pour avoir cette propriété. La mesure positive $v = (v\{x\})_{x\in E}$ est donc invariante.

Pour obtenir une mesure de probabilité invariante à partir de v, nous devons avoir

$$V = \sum_{x\in E} v\{x\} < \infty, \qquad \text{mais comme} \qquad \mathrm{Card}\, E = \sum_{x\in E} 1 \leqslant \sum_{x\in E} v\{x\}$$

puisque tout sommet est de valence supérieure ou égale à 1, cette condition est satisfaite si et seulement si le graphe est fini, ou encore si et seulement si E est fini. Dans ce cas la mesure de probabilité $\pi = (v\{x\}/V)_{x\in E}$ est réversible et invariante.

Le cas $p = 0$ n'est guère intéressant puisqu'alors $P = \mathrm{Id}$ et donc tous les points sont absorbants. Supposons $p > 0$. L'hypothèse de connexité du graphe implique que P est irréductible.

Si E est fini, il est clair que P est récurrente, et de plus il existe $N \geqslant 0$ fini tel que tous sommets x, $y \in E$ peuvent rejoints en empruntant au plus N arêtes consécutives. Alors, en autorisant à demeurer quelques temps en un sommet intermédiaire entre x et y, ce qui correspond à $q > 0$ ou $0 < p < 1$, pour tout x, $y \in E$, x et y sont joints par au moins un chemin partiellement stationnaire de longueur N : il existe $x = x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N = y \in E$ tels que

$$P(x,x_1) \times \cdots \times P(x_{N-1},y) > 0.$$

Ceci montre que la matrice P^N a alors tous ses coefficients strictements positfs. On constate qu'il en est alors de même pour toute $P^{N+n} = P^N \times P^n$ par simple produit matriciel. En particulier la matrice P est apériodique.

Si $p = 1$, l'apériodicité peut ne pas être satisfaite comme le montre, par exemple, le cas du graphe à deux sommets $\{1,2\}$. Si E est infini, la situation est plus complexe. Nous ne ferons pas de commentaire à ce sujet.

8. Un théorème ergodique

Une propriété ergodique affirme grossièrement l'égalité de la limite des moyennes temporelles d'une quantité mesurée sur une unique trajectoire avec la moyenne de la même quantité mesurée sur toutes les trajectoires à un instant donné.

On peut imaginer énormément de situations où il n'y a pas de propriété ergodique : mesure du revenu d'un ensemble d'individus au cours de leur vie (des inégalités peuvent perdurer), billes lancées sur un billard avec trous (une bille finira sa trajectoire dans un trou particulier, mais en moyenne sur l'ensemble des billes aucun trou n'est privilégié).

Cependant, pour le développement de la Mécanique Statistique à partir du milieu du XIXᵉ, posséder des propriétés ergodiques sur des systèmes complexes (gaz de particules) s'est révélé assez essentiel pour faire progresser la théorie. Dans les manuels de Thermodynamique de premier cycle, on trouve souvent l'énoncé d'un théorème ergodique dit de Birkhoff : « Pour un temps très long, un système isolé passe dans chaque micro-état un temps proportionnel à la probabilité *a priori* de cet état ». Par micro-état, il faut simplement entendre qu'on ramène un espace d'états assez grand ($\mathbb{R}^n$ par exemple) à un espace d'états au plus dénombrable ; par système isolé, il faut entendre qu'il n'y a pas de perte ou de gain de particules ou autre ; par probabilité *a priori*, ce qu'on entend est un peu plus flou, mais pour nous ça ne peut être que la mesure de probabilité invariante si elle existe et est unique.

La recherche de propriétés ergodiques pour des systèmes physiques concrets ou leurs modèles mathématiques est toujours d'actualité. On appréciera que dans le contexte qui nous occupe des réponses générales existent. Un premier exemple est la loi forte des grands nombres que nous énonçons sous une forme qui nous sera utile plus loin.

Théorème 30. — *Soit $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi de moyenne $m = \mathbb{E}[Y_1] \in [0,\infty]$. Alors,*

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \longrightarrow m \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers l'infini, presque sûrement.}$$

Démonstration. — Cette propriété est supposée connue lorsque $m < \infty$: c'est un cas particulier de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov. Supposons $m = \infty$. Pour $k > 0$, posons $Y_n^{(k)} = Y_n \wedge k$. La suite de variables aléatoires obtenues vérifie les hypothèses de la loi forte des grands nombres (indépendance, même loi, espérance $m^{(k)} = \mathbb{E}[Y_1^{(k)}] < \infty$). Puisque pour tout $n \geqslant 1$, on a $Y_n^{(k)} \leqslant Y_n$, alors

$$\frac{Y_1^{(k)} + \cdots + Y_n^{(k)}}{n} \leqslant \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

le terme de gauche tendant presque sûrement vers $m^{(k)}$, on a

$$m^{(k)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \qquad \text{presque sûrement.}$$

Or $Y_1^{(k)} = Y_1 \wedge k$ tend simplement en croissant vers Y_1, et par convergence monotone $m^{(k)} = \mathbb{E}[Y_1^{(k)}]$ tend en croissant vers $m = \mathbb{E}[Y_1] = \infty$. En faisant tendre k vers l'infini, on obtient

$$\infty = \liminf_{n\to\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \qquad \text{presque sûrement.}$$

La limite supérieure est alors aussi égale à l'infini, donc la limite existe et est infinie presque sûrement. □

Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov de loi initiale λ et de matrice de transition p. Le nombre de visites de l'état x à l'instant n est la variable aléatoire

$$V_n^x = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}},$$

la variable aléatoire V_n^x/n est la proportion de temps passé en x avant n.

Nous en arrivons au théorème ergodique.

THÉORÈME 31. — *Soient P une matrice de transition irréductible sur E et λ une mesure de probabilité sur E. Si $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P), alors*

$$\frac{V_n^x}{n} \longrightarrow \frac{1}{m(x)} \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers l'infini, presque sûrement,}$$

où $m(x) = \mathbb{E}^x[T_{\mathrm{e}}^x]$ est le temps moyen de retour en x.

De plus, si la chaîne est récurrente positive, pour toute fonction bornée $f : E \to \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \longrightarrow \bar{f} \qquad \textit{quand } n \textit{ tend vers l'infini, presque sûrement,}$$

où $\bar{f} = \sum_{x \in E} \pi\{x\} \times f(x)$ et π est l'unique mesure de probabilité invariante.

Démonstration. — Si la matrice P est transiente, le nombre total de visites $V_\infty^x = \lim_{n \to \infty}$ est fini presque sûrement, donc

$$\frac{V_n^x}{n} \leqslant \frac{V_\infty^x}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini, presque sûrement,}$$

ce qui est égal à $1/m(x)$ puisque $m(x) = \mathbb{E}^x[T_{\mathrm{e}}^x] = \infty$ par transience.

Supposons la matrice P récurrente. Soient $x \in E$ et $T = T_{\mathrm{e}}^x$. On sait que $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$. Alors par la propriété forte de Markov, $(X_{T+n})_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov $(\delta_{\{x\}}, P)$ (et de plus indépendante de $\mathcal{F}_T^X$ la tribu des événements antérieurs à T). La proportion asymptotique du temps passé en x étant la même pour $(x_n)_{n \geqslant 0}$ et $(X_{T+n})_{n \geqslant 0}$, on peut supposer pour la suite $\lambda = \delta_{\{x\}}$.

Soit S_r^x la longueur de la r-ième excursion en dehors de x. On sait que les variables $(S_r^x)_{r \geqslant 1}$ sont indépendantes, identiquement distribuées, de moyenne $m(x)$. D'une part, l'instant de dernière visite de x avant n est inférieur ou égal à $n - 1 \leqslant n$, c'est-à-dire

$$S_1^x + \cdots + S_{V_n^x - 1}^x \leqslant n - 1 \leqslant n\,;$$

d'autre part, l'instant de première visite de x après $n-1$ est supérieur ou égal à n, c'est-à-dire

$$S_1^x + \cdots + S_{V_n^x}^x \geqslant n.$$

On en déduit que

$$\frac{S_1^x + \cdots + S_{V_n^x - 1}^x}{V_n^x} \leqslant \frac{n}{V_n^x} \leqslant \frac{S_1^x + \cdots + S_{V_n^x}^x}{V_n^x}. \tag{$*$}$$

Par la loi forte des grands nombres présentée sous la forme précédente, on a :

$$\frac{S_1^x + \cdots + S_n^x}{n} \longrightarrow m(x) \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini, presque sûrement.}$$

Puis, comme P est récurrente,

$$V_n^x \longrightarrow \infty \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini, presque sûrement.}$$

On obtient alors par encadrement

$$\frac{n}{V_n^x} \longrightarrow m(x) \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini, presque sûrement,}$$

ou encore

$$\frac{V_n^x}{n} \longrightarrow \frac{1}{m(x)} \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini, presque sûrement.}$$

Supposons que P admet une mesure de probabilité invariante π. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application bornée, et on supposera, par commodité, $\sup_{x\in E} |f(x)| \leqslant 1$. Alors pour tout $F \subset E$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \bar{f}\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{x\in E} f(x)\mathbb{1}_{\{X_k=x\}}\Big) f(X_k) - \sum_{x\in E} f(x)\pi\{x\}\right| \\
&= \left|\sum_{x\in E} f(x)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{X_k=x\}} - \sum_{x\in E} f(x)\pi\{x\}\right| \\
&= \left|\sum_{x\in E} f(x)\frac{V_n^x}{n} - \sum_{x\in E} f(x)\pi\{x\}\right| = \left|\sum_{x\in E} f(x)\left(\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{x\in F} f(x)\left(\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right)\right| + \left|\sum_{x\notin F} f(x)\left(\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{x\in F} |f(x)| \times \left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| + \sum_{x\notin F} |f(x)| \times \left(\frac{V_n^x}{n} + \pi\{x\}\right) \\
&\leqslant \sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| + \sum_{x\notin F}\left(\frac{V_n^x}{n} + \pi\{x\}\right) = \sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| + \sum_{x\notin F}\pi\{x\} + \sum_{x\notin F}\frac{V_n^x}{n} \\
&= \sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| + \sum_{x\notin F}\pi\{x\} + 1 - \sum_{x\in F}\frac{V_n^x}{n} = \sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| \\
&\quad + 2\sum_{x\notin F}\pi\{x\} + \sum_{x\notin F}\pi\{x\} - \sum_{x\in F}\frac{V_n^x}{n} \\
&= \sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| + 2\sum_{x\notin F}\pi\{x\} + \sum_{x\notin F}\left(\pi\{x\} - \frac{V_n^x}{n}\right) \leqslant 2\sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| + 2\sum_{x\notin F}\pi\{x\}.
\end{aligned}$$

Soit $A \subset \Omega$ l'événement sur lequel $V^x(\omega)/n \to \pi$ pour tout $x \in E$, $\omega \in A$, qui est un événement de probabilité 1. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $F \subset E$ fini tel que $\pi(E\backslash F) < \varepsilon/4$. Ensuite, soit N (dépendant de l'aléa $\omega \in A$) tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\sum_{x\in F}\left|\frac{V_n^x}{n} - \pi\{x\}\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{sur tout } A.$$

Alors on a

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \bar{f}\right| < \varepsilon \qquad \text{sur tout } A,$$

ce qui montre la convergence sur A, c'est-à-dire la convergence presque sûre annoncée. □

Exemple. — Si P est irréductible, récurrente positive, en considérant, pour $x \in E$, $f_x : y \in E \mapsto \delta(x, y)$ (symbole de Kronecker), on obtient que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} \longrightarrow \pi\{x\} \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini, presque sûrement,}$$

c'est-à-dire que la fréquence d'apparition de x dans la chaîne tend presque sûrement vers $\pi\{x\}$.

Références

[8] Norris (J.R.), *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press (1998).

[9] Toulouse (P. S.), *Thèmes de Probabilités et Statitistique*, Dunod (1999).

THÈMES À DÉVELOPPER

De nombreux thèmes d'applications ou de prolongement auraient pu être abordés.

En premier lieu, nous abordons la question de l'estimation des coefficients d'une matrice de transition. On peut savoir qu'un processus ou une chaîne est markovien sans connaître la matrice, ou le noyau, associé. Cette section effleure la question pour donner quelques réponses, ou justifications, qui tombe sous le coup du bon sens.

Ensuite, nous décrivons quelques algorithmes, ou méthodes numériques, très populaires utilisant les chaînes de Markov (algorithme d'Hastings–Metropolis, recuit simulé). Ceux-ci sont mis en œuvre et approfondis dans un enseignement spécifique aux *Algorithmes Stochastiques*. On les classe plus ou moins dans ce qui est appelé *algorithmes génétiques* alors que l'inspiration initiale vient clairement de la *Thermodynamique*...

Enfin, nous abordons un peu de théorie discrète du potentiel. La théorie des processus a été très largement motivée, inspirée, nourrie par la théorie du potentiel. Il serait dommage de ne pas l'évoquer dans un cours sur les processus stochastiques, même à temps discret.

Il manque bien entendu de nombreuses autres applications ou illustrations, prolongement plus ou moins immédiats (étude systématique de la périodicité, chaînes indexées par $-\mathbb{N}$, chaînes à mémoire finie, chaînes de Markov cachées, ...). Le temps et la place manquent pour ce faire. Certains d'entre eux seront abordés en seconde année.

A. **Estimation statistique des coefficients d'une matrice de transition**

Précisons d'abord le vocabulaire des statisticiens et leur thématique. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires ; certaines lois ou mécanismes régissant cette suite sont inconnus, par exemple une quantité numérique p qui est dite *paramètre*.

Définition 30. — (i) Un *échantillon* est une suite généralement finie de variables aléatoires $(X_0, \dots, X_N)$.

(ii) Un *échantillon observé* est la suite de valeurs prises par ces variables aléatoires pour un $\omega \in \Omega$ donné, $(X_0(\omega), \dots, X_N(\omega)) = (x_0, \dots, x_n)$.

(iii) Un estimateur de p est une simple fonction (mesurable) $\Lambda_N = \ell_N(X_0, \dots, X_N)$ de l'échantillon ; un estimateur, ou plus précisément une suite d'estimateurs, est consistant si Λ_N converge en probabilité (ou presque sûrement, ce qui est plus fort) vers le paramètre p lorsque N tend vers l'infini ; il est sans biais si $\mathbb{E}[\Lambda_N] = p$.

(iv) Une estimation est un estimateur observé $\lambda_N = \ell_N(x_0, \dots, x_N)$.

Il est fréquent dans la pratique que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, auquel cas ce qui intéresse est de déterminer la loi de X_0 ou certaines de ses caractéristiques. Ceci repose le plus souvent sur la loi des grands nombres pour montrer la consistance des estimateurs.

Néanmoins, il n'est pas rare d'avoir à considérer une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ par exemple avec des modèles biologiques liés aux chaînes d'ADN, ou encore certaines évolutions liées à la vie courante (commerce, finance) admettant une telle modélisation. Ce qui est intéressant est alors d'évaluer les coefficients de la matrice de transition associée, car, sachant qu'on est dans tel état à l'instant n, c'est elle qui permettra d'évaluer ce qu'il se passera plus tard.

Ainsi, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de loi initiale π et de matrice de transition P sur E. Pour un $\omega \in \Omega$, nous supposons disposer de $(X_0(\omega), \dots, X_N(\omega)) = (x_0, \dots, x_n)$ qui sont $N+1$ observations de la chaîne et nous cherchons à l'aide de celles-ci à estimer les coefficients de P. La mesure initiale π n'interviendra pas.

La fonction de log-vraisemblance d'une matrice de transition Q sur E est une fonction tenant compte des observations $(x_0, \dots, x_N)$ qui ont été faites. Elle est définie par

$$\begin{aligned}\ell(Q) &= \ln\bigl(Q(x_0,x_1) \times \cdots \times Q(x_{N-1},x_N)\bigr) \\ &= \ln Q(x_0,x_1) + \cdots + \ln Q(x_{N-1},x_N) = \sum_{x,y\in E} N(x,y) \ln Q(x,y)\end{aligned}$$

où, pour tout x, $y \in E$, $N(x,y)$ est le nombre de transitions (en un pas) observées dans $(x_0, \dots, x_N)$ de x à y. Une méthode standard et peu comprise de la Statistique pour trouver une estimation $\widehat{P}$ de P à partir des données $(x_0, \dots, x_N)$ consiste à rechercher $\widehat{P}$ parmi les matrices stochastiques qui maximisent la fonction de log-vraisemblance ℓ. Le problème ici est qu'on a affaire à une maximisation avec contrainte (matrices stochastiques). Nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Considérons $\mathcal{O}$ l'ensemble ouvert des matrices à coefficients réels *strictement* positifs. Une matrice $Q \in \mathcal{O}$ est stochastique si elle vérifie les contraintes

$$h_x(Q) = \sum_{y\in E} Q(x,y) - 1 = 0, \qquad x \in E.$$

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de telles matrices. On définit le lagrangien associé à ce problème de maximisation par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Q,\lambda) &\longmapsto \ell(Q) + \sum_{x\in E} \lambda_x \times h_x(Q) = \ell(Q) + \sum_{x\in E} \lambda_x \Bigl(\sum_{y\in E} Q(x,y) - 1\Bigr).\end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour que (Q,λ) soit un extremum local de cette fonctionnelle régulière est que sa différentielle s'annulle. Pour la partie en la variable λ, c'est

$$\mathrm{d}_\lambda \mathcal{L}(Q,\lambda) = \sum_{x\in E} h_x(Q)\, \mathrm{d}\lambda_x = 0,$$

donc que $h_x(Q) = 0$ pour tout $x \in E$, ce qui assure qu'alors Q est une matrice stochastique. Pour la partie en la variable Q, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_Q \mathcal{L}_(Q,\lambda) &= \mathrm{d}_Q\Bigl(\ell(Q) + \sum_{x\in E} \lambda_x \times h_x(Q)\Bigr) \\ &= \sum_{x,y\in E} \mathrm{d}_Q\bigl(N(x,y)\ln Q(x,y)\bigr) + \sum_{x\in E} \mathrm{d}_Q\Bigl(\lambda_x \sum_{y\in E} Q(x,y) - 1\Bigr) \\ &= \sum_{x,y\in E} N(x,y)\frac{\mathrm{d}Q(x,y)}{Q(x,y)} + \sum_{x,y\in E} \lambda_x\, \mathrm{d}Q(x,y) \\ &= \sum_{x,y\in E}\Bigl(\frac{N(x,y)}{Q(x,y)} - \lambda_x\Bigr)\mathrm{d}Q(x,y).\end{aligned}$$

On trouve alors une unique solution, sous réserve que $\lambda_x \neq 0$,

$$\widehat{P}(x,y) = -\frac{N(x,y)}{\lambda_x}, \qquad x,\, y \in E.$$

Il faut ensuite préciser les λ_x pour obtenir une matrice stochastique

$$1 = \sum_{y \in E} \widehat{P}(x,y) = -\sum_{y \in E} \frac{N(x,y)}{\lambda_x} \qquad \text{donc} \qquad \lambda_x = -\sum_{y \in E} N(x,y),$$

λ_x est donc l'opposé du nombre d'apparitions de x dans $(x_0, \ldots, x_{N-1})$. La fonction ℓ étant concave sur l'ouvert convexe $\mathcal{O}$, et les contraintes étant affines, l'extremum $\widehat{P}$ ainsi trouvé est un maximum global de ℓ sur $\mathcal{C}$ d'après un théorème usuel d'optimisation. Ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{P}(x,y) = \frac{N(x,y)}{\sum_{z \in E} N(x,z)} &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{x_n = x, x_{n+1} = y\}}}{\sum_{z \in E} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{x_n = x, x_{n+1} = z\}}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{x_n = x, x_{n+1} = y\}}}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{z \in E} \mathbb{1}_{\{x_n = x, x_{n+1} = z\}}} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{x_n = x, x_{n+1} = y\}}}{\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{x_n = x\}}}\end{aligned}$$

qui est la proportion de transitions observées de x à y est l'estimation cherchée de $P(x,y)$, l'estimateur s'obtenant en remplaçant x_n par X_n dans la formule ci-dessus.

La méthode ci-dessus ne fonctionne pas si pour un certain x, $\lambda_x = 0$, ce qui signifie que x n'apparaît pas parmi $(x_0, \ldots, x_{N-1})$. Dans ce cas on se désintéresse de l'état x, que ce soit pour estimer un $P(x,y)$, ce qui donnerait 0 pour estimation naturelle, ou pour estimer un $P(y,x)$, puisque si $x_N \neq x$, alors x n'est pas vu, et si $x_N = x$, $x_{N-1} = y$, $\hat{P}(y,x)$ est égal à 1 divisé par le nombre d'apparition de y parmi $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ ce qui peut être trop peu représentatif. On fait comme si l'état x n'existait pas. Bien sûr, si pour de plus grands N ceci cesse d'être le cas, on prend alors en compte x.

Cas de la récurrence. — Supposons la matrice P irréductible et récurrente. Le dénominateur de

$$\widehat{P}(x,y) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{X_n = x, X_{n+1} = y\}}}{\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}}$$

est le nombre de visites de x avant n et on sait qu'il tend vers l'infini. On peut réécrire le numérateur comme la somme des indicatrices de l'atteinte de y après un premier pas au début d'une excursion hors de x. Puisqu'on sait que les excursions sont indépendantes et de même loi, ces nouvelles indicatrices sont elles aussi indépendantes et de même loi, la loi de Bernoulli de paramètre $P(x,y)$. Par la loi forte des grands nombres, on obtient alors la convergence presque sûre de la suite d'estimateurs vers l'espérance de ces indicatrices, à savoir $P(x,y)$.

Cas de la transience. — Lorsque la matrice P est irréductible transiente — le cardinal de E est alors nécessairement infini —, il est clair en revanche que cet estimateur est rarement consistant. En effet, un état x n'étant fréquenté qu'un nombre fini de fois, la suite des estimations est stationnaire et ne donne alors qu'une fraction pouvant s'éloigner notablement de la probabilité de transition cherchée. Il faut alors changer de méthode. On s'arrange pour faire suffisamment d'observations pour voir la chaîne quitter N fois l'état x, ce qui revient à faire partir N fois la chaîne de l'état x de manières indépendantes. En maximisant dans ce cadre

$$\sum_{x,y \in E} N(x,y) \ln Q(x,y) \qquad \text{avec} \qquad \sum_{y \in E} Q(x,y) = 1,$$

on obtient alors pour estimateur du maximum de vraisemblance

$$\widehat{P}(x,y) = \frac{N(x,y)}{N}\,.$$

Comme $N(x,y) = Y_1 + \cdots + Y_N$, où $Y_n = 1$ si la n-ième transition va de x à y, et 0 sinon, par la propriété de Markov forte, les Y_n sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et on a par la loi forte des grands nombres

$$\widehat{P}(x,y) = \frac{N(x,y)}{N} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_N}{N} \longrightarrow \mathbb{E}[Y_1] = P(x,y) \qquad \text{presque sûrement},$$

d'où la consistance.

Cas de non irréductibilité. — On essaie de combiner au mieux les deux approches précédentes mais c'est très délicat car si on ne connaît pas la matrice de transition P, il faut pouvoir tester si un état est récurrent ou transient…

B. **Simulation de lois, l'algorithme de Hastings–Metropolis**

Soit E un espace d'états au plus dénombrable et μ une mesure finie non nulle sur E. On souhaite simuler la loi de probabilité $\pi = \mu/\mu(E)$. Deux problèmes peuvent se poser. Le premier est le calcul de $\mu(E)$ qui est dans certains cas pratiques difficile, le second est qu'on veut disposer d'une méthode qui ne nécessite pas trop de calculs. Pour notre propos, on supposera $\mu\{x\} > 0$ pour tout $x \in E$, ce qui revient à ignorer les états de mesure nulle.

Exemple. — Soit E l'ensemble des permutations σ de $\{1, \ldots, 10\}$ vérifiant $\sum_{j=1}^{10} j \times \sigma(j) \geqslant 250$. Cet ensemble est fini, et non vide puisqu'il contient notamment l'ensemble des permutations laissant fixe $\{7, 8, 9, 10\}$. Nous souhaitons choisir uniformément une permutation dans E. Ici μ est la mesure uniforme sur E et $\mu(E) = \mathrm{Card}(E)$, ce cardinal semblant difficile à expliciter par des méthodes combinatoires ou autres.

IDÉE. — *Construire une matrice de transition P sur E, irréductible et apériodique et telle que à μ en soit une mesure réversible. En effet, on aura alors :*

(i) *La mesure de probabilité $\pi = \mu/\mu(E)$ est invariante par P.*

(ii) *Il y a convergence vers l'équilibre : si $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P), alors, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}\{X_n = x\} \to \pi\{x\}$ quand n tend vers l'infini.*

Construction. — On considère une matrice de transition Q sur E, irréductible et apériodique telle que $Q(x,y) = 0$ implique $Q(y,x) = 0$ — construite par exemple à partir d'un graphe de sommets E.

Soit $D = \{(x,y) \in E \times E : Q(x,y) > 0\}$ et soit $\alpha : D \to]0,1]$ défini par

$$\alpha(x,y) = \min\left(\frac{Q(y,x) \times \mu\{y\}}{Q(x,y) \times \mu\{x\}}, 1\right),$$

où on notera l'importance de l'hypothèse de stricte positivité de μ pour cette définition. On définit la matrice P par

$$x \neq y \in E, \qquad P(x,y) = \begin{cases} Q(x,y) \times \alpha(x,y) & \text{si } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$x \in E, \qquad P(x,x) = 1 - \sum_{y \neq x} P(x,y).$$

Ceci définit bien une matrice stochastique : les sommes sur les lignes valent 1 ; les coefficients non diagonaux sont positifs ; et pour les coefficients diagonaux on a $0 \leqslant \sum_{y \neq x} P(x,y) \leqslant \sum_{y \neq x} Q(x,y) \leqslant 1$, et donc $P(x,x) \geqslant 0$.

L'irréductibilité de P est une conséquence immédiate de celle de Q puisque si on a, pour $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \in E$,

$$Q(x_0, x_1) \times \cdots \times Q(x_{n-1}, x_n) > 0 \qquad \text{alors} \qquad P(x_0, x_1) \times \cdots \times P(x_{n-1}, x_n) > 0$$

et réciproquement. L'apériodicité de P résulte aussi de celle de Q puisqu'en utilisant ce qui précède constate que $Q^n(x, y) > 0$ si et seulement si $P^n(x, y) > 0$. Nous allons voir que la mesure μ est réversible pour P. Soient $(x, y) \in D$, $x \neq y$. Si par exemple $\alpha(x, y) \leqslant 1$, alors $\alpha(y, x) = 1$ et on a

$$\begin{aligned}\mu\{x\} \times P(x, y) = \mu\{x\} \times Q(x, y) \times \alpha(x, y) &= \mu\{x\} \times Q(x, y) \times \frac{Q(y, x) \times \mu\{y\}}{Q(x, y) \times \mu\{x\}} \\ &= Q(y, x) \times \mu\{y\} = \mu\{y\} \times Q(y, x) \times \alpha(y, x) = \mu\{y\} \times P(y, x).\end{aligned}$$

Pour $(x, y) \notin D$, $x \neq y$, on a $\mu\{x\} \times P(x, y) = 0 = \mu\{y\} \times P(y, x)$. Enfin, il n'y a rien à dire pour le cas $x = y$. La matrice P ainsi construite vérifie les conditions imposées.

C. **Le recuit simulé**

La méthode du recuit provient de la métallurgie et de la verrerie : afin d'éliminer dans la structure d'un produit (métal, verre) des inhomogénéités ou fractures qui pourraient le rendre cassant, on le chauffe puis le laisse lentement refroidir afin que sa structure interne se réorganise de manière plus stable. Ceci a inspiré une méthode probabiliste de recherche de minima globaux de fonction. Elle utilise des chaînes de Markov inhomogènes, l'inhomogénéité provenant de l'abaissement progressif de la température, et donc la modification au fil du temps des règles d'évolution de la chaîne.

Soit $U : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive bornée. Cette fonction sera appelée *énergie* ou *potentiel* sur l'espace des états E, espace toujours supposé au plus dénombrable muni de sa tribu discrète. On cherche à déterminer l'ensemble E_U de ses minima globaux, ensemble qui peut être éventuellement vide lorsque E est infini dénombrable.

On explore aléatoirement l'espace des états selon une matrice de transition Q sur E vérifiant

$$\begin{cases} \text{(i) il existe une mesure } \lambda \text{ sur } E \text{ réversible pour } Q\,; \\ \text{(ii) il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } Q^p \text{ ait tous ses coefficients positifs.} \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

La matrice Q permettra de déterminer un nouvel état vers lequel on pourra choisir ou non de transiter.

Remarque. — La condition (i) implique que λ est une mesure invariante de Q. La condition (ii) implique que pour tout $n \geqslant 0$, Q^{p+n} a tous ses coefficients strictement positifs ; en particulier, Q est apériodique. La réciproque est vraie lorsque E est fini.

Exemple. — Lorsque E est un ensemble fini, on peut construire Q à partir d'un graphe connexe de sommets E, comme il a été vu précédemment. Lorsque E est infini, on peut, par exemple identifier E à $\mathbb{Z}$, se donner une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{Z}$ partout strictement positive, symétrique par rapport à 0, et définir $Q(x, y) = \mu\{y - x\}$. La condition (i) est alors satisfaite avec λ la mesure uniforme sur $\mathbb{Z}$ et (ii) est vérifiée avec $p = 1$.

La température est notée $(T_n)_{n \geqslant 0}$; c'est une suite numérique, décroissante de nombres strictements positifs tendant vers 0. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $\beta_n = 1/T_n$ l'inverse de la température. La suite $(\beta_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante et tend vers l'infini. On définit de manière algorithmique une chaîne de Markov inhomogène $(X_n)_{n \geqslant 0}$ qui se stabilise lorsque n tend vers l'infini dans l'ensemble des minima globaux E_U de U.

HEURISTIQUE[1]. — *Supposons que pour $n \geqslant 0$, l'algorithme soit dans un état $X_n = x \in E$ d'énergie $U(x)$. Puisqu'on ignore si c'est un minimum global, on choisit un nouvel état y selon la loi $Q(x, .)$. Alors*

— *si $U(y) \leqslant U(x)$, on pose $X_{n+1} = y$;*

— *si $U(y) > U(x)$, alors on choisit*

$$X_{n+1} = \begin{cases} x & \textit{avec probabilité } 1 - \mathrm{e}^{-\beta_n(U(y)-U(x))}, \\ y & \textit{avec probabilité } \mathrm{e}^{-\beta_n(U(y)-U(x))}. \end{cases}$$

Remarques. — *a*) On constate que le passage d'un état x à un état y d'énergie strictement supérieure est d'autant plus difficile que la différence des énergies est grande.

b) Pour des températures proches de 0, c'est-à-dire des β_n grands, il est de plus en plus difficile de passer à un état d'énergie supérieure, il est donc plus fortement probable de passer dans un état d'énergie inférieure ou de rester dans le même état.

La difficulté est de choisir la suite de température $(T_n)_{n\geqslant 0}$ pour que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ explore suffisamment d'états et converge vers un minimum global, autrement dit

— $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (inhomogène) récurrente ;

— $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi vers une mesure portée par l'ensemble des minima globaux de U.

Cas de la tempéture constante. — On suppose la suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ constante, il en est donc de même pour $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$. Ainsi, soit $\beta > 0$. On considère la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de matrice de transition P_β définie, pour x et $y \in E$, par

$$P_\beta(x,y) = Q(x,y)\,\mathrm{e}^{-\beta\max(U(y)-U(x),0)} = \begin{cases} Q(x,y) & \text{si } U(y) \leqslant U(x), \\ Q(x,y)\,\mathrm{e}^{-\beta(U(y)-U(x))} & \text{si } U(y) > U(x). \end{cases}$$

Cette matrice correspond à la description faite dans l'heuristique pour une température constante.

Soit

$$Z_\beta = \sum_{y\in E} \lambda\{y\}\,\mathrm{e}^{-\beta U(y)}.$$

Si $Z_\beta < \infty$, on définit la *mesure de Gibbs*, ou *mesure de Gibbs–Boltzmann*, par

$$\mu_\beta\{x\} = \frac{\lambda\{x\}}{Z_\beta}\,\mathrm{e}^{-\beta U(x)}, \qquad x \in E.$$

C'est une mesure de probabilité associée à la fonction d'énergie U et à la température $T = 1/\beta$. Elle dépend évidemment de l'espace mesuré (E, λ).

1. En optimisation combinatoire, Théorie des graphes et Théorie de la complexité, une heuristique est un algorithme qui fournit rapidement (en temps polynomial) une solution réalisable, pas nécessairement optimale, pour un problème d'optimisation NP-difficile. Une heuristique, où méthode approximative, est donc le contraire d'un algorithme exact qui trouve une solution optimale pour un problème donné. L'intérêt de l'heuristique étant que pour les problèmes NP-difficiles, les algorithmes exacts connus sont tous de complexité exponentielle et donc sans aucun intérêt en pratique (ni en théorie d'ailleurs). On utilise presque systématiquement une heuristique pour obtenir une première solution réalisable dans un processus de résolution exacte. (Wikipédia)

Remarque. — La constante Z_β est généralement difficile à calculer. C'est pourquoi les physiciens pour simuler une mesure de Gibbs se servent de la méthode de Hastings–Metropolis, méthode qui a d'ailleurs inspiré celle du recuit simulé.

PROPOSITION 13. — *On suppose que les propriétés $(\mathcal{P})$ sont vérifiées, et que Z_β est fini. Alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de matrice de transition P_β est irréductible, apériodique, de loi de probabilité réversible — et donc invariante — la mesure de Gibbs μ_β.*

Démonstration. — Puisque Q est irréductible et apériodique, et que le facteur

$$\exp\bigl(-\beta \max(U(y)-U(x),0)\bigr) \qquad x, y \in E,$$

est toujours strictement positif, P_β est aussi irréductible et apériodique (voir le raisonnement semblable pour l'algorithme de Hastings–Metropolis). Il reste simplement à voir que μ_β est réversible pour P_β. Pour x, $y \in E$, on a

$$\begin{aligned}
Z_\beta \times \mu_\beta\{x\} \times P_\beta(x,y) &= \bigl(\lambda\{x\}\,\mathrm{e}^{-\beta U(x)}\bigr) \times \bigl(Q(x,y)\,\mathrm{e}^{-\beta \max(U(y)-U(x),0)}\bigr) \\
&= \bigl(\lambda\{x\}Q(x,y)\bigr) \times \bigl(\mathrm{e}^{-\beta(\max(U(y)-U(x),0)+U(x))}\bigr) \\
&= \bigl(\lambda\{y\}Q(y,x)\bigr) \times \bigl(\mathrm{e}^{-\beta(\max(U(y),U(x))}\bigr) \\
&= \bigl(\lambda\{y\}Q(y,x)\bigr) \times \bigl(Q(y,x)\,\mathrm{e}^{-\beta(\max(0,U(x)-U(y))+U(y))}\bigr) \\
&= \bigl(\lambda\{y\}\,\mathrm{e}^{-\beta U(y)}\bigr) \times \bigl(Q(y,x)\,\mathrm{e}^{-\beta \max(U(x)-U(y),0)}\bigr) \\
&= Z_\beta \times \mu_\beta\{y\} \times P_\beta(y,x)
\end{aligned}$$

du fait de la réversibilité de λ pour Q. □

COROLLAIRE 3. — *En conservant les mêmes hypothèses qu'à la proposition précédente, pour toute loi initiale η et tout $\beta > 0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\sup_{A\subset E}\bigl|\eta P_\beta^n(A) - \mu_\beta(A)\bigr|\Bigr) = 0.$$

Démonstration. — Par convergence vers l'équilibre, on sait que pour tout $x \in E$,

$$\eta P_\beta^n\{x\} - \mu_\beta\{x\} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $F \subset E$ fini tel que $\mu_\beta(F) \geqslant 1 - \varepsilon/4$, ou encore $\mu_\beta(F^c) \leqslant \varepsilon/4$. Soit $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in F$,

$$\bigl|\eta P_\beta^n\{x\} - \mu_\beta\{x\}\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\,\mathrm{Card}(F)}\,.$$

On a alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\bigl|1 - \eta P_\beta^n(F)\bigr| &\leqslant \bigl|1 - \mu_\beta(F)\bigr| + \bigl|\mu_\beta(F) - \eta P_\beta^n(F)\bigr| \\
&\leqslant \bigl|1 - \mu_\beta(F)\bigr| + \sum_{x\in F}\bigl|\mu_\beta\{x\} - \eta P_\beta^n\{x\}\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}\,,
\end{aligned}$$

et ainsi $\eta P_\beta^n(F) \geqslant 1 - \varepsilon/2$, ou encore $\eta P_\beta^n(F^c) \leqslant \varepsilon/2$. Soit maintenant $A \subset E$ une partie de E. On a

$$\begin{aligned}
\left|\eta P_\beta^n(A) - \mu_\beta(A)\right| &\leqslant \left|\eta P_\beta^n(A \cap F) - \mu_\beta(A \cap F)\right| + \left|\eta P_\beta^n(A \cap F^c) - \mu_\beta(A \cap F^c)\right| \\
&\leqslant \sum_{x \in A \cap F} \left|\eta P_\beta^n\{x\} - \mu_\beta\{x\}\right| + \eta P_\beta^n(A \cap F^c) + \mu_\beta(A \cap F^c) \\
&\leqslant \sum_{x \in A \cap F} \left|\eta P_\beta^n\{x\} - \mu_\beta\{x\}\right| + \eta P_\beta^n(F^c) + \mu_\beta(F^c) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4 \operatorname{Card} F} \times \operatorname{Card}(A \cap F) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et $A \subset E$, on a $\left|\eta P_\beta^n(A) - \mu_\beta(A)\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui est la propriété annoncée. □

Remarque. — On munit généralement un ensemble E au plus dénombrable de sa tribu discrète ainsi que de sa topologie discrète. Dans ce contexte, on peut montrer que la convergence d'une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ vers une mesure de probabilité μ sur E équivaut à la convergence des suites $(\mu_n(A))_{n\geqslant 0}$ vers $\mu(A)$ pour tout $A \subset E$ (ou encore celle de $(\mu_n\{x\})_{n\geqslant 0}$ vers $\mu\{x\}$ pour tout $x \in E$). Le type de convergence apparaissant dans ce corollaire est donc la *convergence uniforme* sur l'ensemble des parties de E, ce qui est un résultat fort.

Avec l'hypothèse $(\mathcal{P})$, on sait que la mesure λ charge tous les points, c'est-à-dire $\lambda\{x\} > 0$ pour tout $x \in E$. Nous notons

$$m = \inf\{U(x) : x \in E\} \qquad \text{et rappelons que} \qquad E_U = \{x \in E : U(x) = m\}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\exp(\beta m)$, on peut alors réécrire la mesure de Gibbs sous la forme

$$\mu_\beta\{x\} = \frac{\lambda\{x\}\, \mathrm{e}^{-\beta(U(x)-m)}}{\lambda(E_U) + \sum_{y \notin E_U} \lambda\{y\}\, \mathrm{e}^{-\beta(U(y)-m)}}\,, \qquad x \in E.$$

Si on considère cette expression, le comportement de μ_β lorsque β tend vers l'infini est immédiat. Ceci est précisé dans les deux propositions qui suivent.

Proposition 14. — *On suppose $E_U \neq \varnothing$. Alors μ_β tend vers la mesure de probabilité déduite de la restriction de λ à E_U lorsque β tend vers l'infini :*

$$\lim_{\beta\to\infty} \mu_\beta\{x\} = \frac{1}{\lambda(E_U)} \times \mathbb{1}_{E_U}(x)\, \lambda\{x\}, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{E}.$$

Démonstration. — S'il est besoin d'une démonstration, celle-ci est laissée en exercice. □

Proposition 15. — *Soient $\varepsilon > 0$ et $E_U^\varepsilon = \{x \in E : U(x) \leqslant m + \varepsilon\}$. Alors*

$$\lim_{\beta\to\infty} \mu_\beta(E_U^\varepsilon) = 1.$$

Démonstration. — S'il est besoin d'une démonstration, celle-ci est laissée en exercice. □

Cas de la température variable. — On montre que le réglage optimal de la décroissance de la température au cours du temps est inverse logarithmique

$$\beta_n = \frac{1}{C} \ln(n + \mathrm{e}), \qquad n \geqslant 0,$$

où $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ est la constante de Neper[2] dont le rôle est simplement de partir d'une température strictement positive. Si C est proche de 0, c'est-à-dire $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ croissant rapidement, la loi limite pourrait ne pas être portée par E_U et n'être portée que par des minima locaux au sens de la matrice de transition Q, et ainsi ignorer d'autres minima, en particulier des minima globaux. Si C est grand, la convergence peut être très lente, ce qui est pénalisant d'un point de vue pratique. On définit l'oscillation de U selon la matrice de transition Q par

$$\mathrm{osc}_Q(U) = \max\{U(y) - U(x) : x, y \in I \text{ tels que } Q(x,y) > 0\}.$$

Théorème 32. — *On suppose la condition $(\mathcal{P})$ réalisée et U bornée. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov inhomogène de loi initiale η définie par l'algorithme de recuit associé à la suite d'inverses de températures*

$$\beta_n = \frac{1}{C}\ln(n+\mathrm{e}), \quad n \geqslant 0, \qquad \textit{avec} \quad C > p \times \mathrm{osc}_Q(U),$$

où $p \geqslant 0$ est tel que Q^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Alors, on a

$$\textit{pour tout } \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n \in E_U^\varepsilon\} = 1.$$

En particulier, si E est fini,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n \in E_U\} = 1.$$

Démonstration. — Admise. □

Remarque. — Il n'a été nulle part question dans ces énoncés de vitesse de convergence. Les questions de ce type sont pourtant fondamentales pour les applications numériques.

Exemple (le problème du voyageur de commerce). — Un voyageur de commerce doit visiter N villes en partant de l'une d'entre elle et en y revenant à la fin. Le problème est de trouver un ou des trajets minimisant la distance totale (le point de départ et d'arrivée n'a pas vraiment d'importance puisque le voyageur fait une boucle). Nous considérons donc N points dans un certain espace métrique de distance d (ce qui compte est de pouvoir mesurer la distance entre deux villes). L'espace des états E est l'ensemble des arrangements de ces N villes, il s'identifie donc à l'ensemble $\mathcal{S}_N$ des permutations de $\{1,\ldots,N\}$ qui est fini de cardinal $N!$ ce qui peut être trop grand pour examiner chaque état. La fonction d'énergie s'écrit alors

$$U(\sigma) = \sum_{x=1}^{N-1} d(\sigma(x), \sigma(x+1)) + d(\sigma(N), \sigma(1)), \qquad \sigma \in \mathcal{S}_N,$$

le dernier terme étant la distance à parcourir pour retourner à son point de départ.

Une structure de graphe connexe simple de sommets $\mathcal{S}_N$ est obtenue en considérant les transpositions $\mathcal{T}_N$ de $\{1,\ldots,N\}$ qui est un ensemble de cardinal $N(N-1)/2$. En effet, on sait que toute permutation est la composée d'au plus $N-1$ transpositions. En considérant $\mathcal{T}'_N = \mathcal{T}_N \cup \{\mathrm{Id}\}$ qui est de cardinal $N(N-1)/2+1$, on constate que toutes permutations σ et σ' peuvent être conjuguées par exactement $N-1$ éléments de $\mathcal{T}'_N$:

$$\sigma' = \tau_{N-1} \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \sigma, \qquad \text{avec } \tau_1, \ldots, \tau_{N-1} \in \mathcal{T}'_{N-1}.$$

2. John Napier, plus connu sous son nom francisé Neper, né à Édimbourg en 1550 et mort le 4 avril 1617 au château de Merchiston, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. (Wikipédia)

Ceci suggère de définir la matrice de transition Q par

$$Q(\sigma,\sigma') = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{Card}\mathcal{T}'_N} = \dfrac{1}{N(N-1)/2+1} & \text{si } \sigma' = \tau\circ\sigma \text{ pour } \tau\in\mathcal{T}_N, \text{ ou } \sigma'=\sigma,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

La matrice Q a pour mesure réversible la mesure uniforme λ sur E et Q^{N-1} a tous ses coefficients strictement positifs. Il ne reste alors qu'à choisir convenablement la constante C, puis de lancer une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ depuis un état quelconque, et enfin attendre en espérant observer assez rapidement des états d'énergie minimale.

Le choix de Q dans ce problème n'est peut-être pas le meilleur envisageable. D'une permutation donnée, on peut passer à $N(N-1)/2$ autres permutations ou conserver celle de départ, alors qu'il y a en tout $N!$ permutations. Ceci suggère que la transition à l'aide de Q est très locale et qu'il faut beaucoup de temps pour explorer l'ensemble des cas possibles, ou, au moins, un sous-ensemble significatif de celui-ci. De plus, le réglage de la constante C s'avère assez délicat. Elle est très fortement liée au choix de Q et peut s'avérer complexe à choisir.

D. **Théorie du potentiel**

Aspects classiques. — Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et de sa structure euclidienne canonique, D un domaine de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, ∂D sa frontière (éventuellement vide si $D=\mathbb{R}^n$), ϱ une application sur D (une application de D dans $\mathbb{R}$, une mesure sur D, une distribution), et une application $f:\partial D\to\mathbb{R}$. Un *potentiel* $\phi:\bar{D}\to\mathbb{R}$ est une solution de l'équation de Poisson[3]

$$\begin{cases} -\Delta\phi(x) = \varrho(x) & \text{pour } x\in D,\\ \phi(x) = f(x) & \text{pour } x\in\partial D,\end{cases}$$

où

$$\Delta\phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}(x), \qquad x\in D,$$

est le laplacien de l'application ϕ dans l'ouvert D de $\mathbb{R}^n$. Ce type d'équation apparaît de manière centrale en théorie classique de la gravitation, en électrostatique, en thermostatique, etc. Elle est étudiée lorsque D est une variété riemannienne, un graphe, ou encore toute autre structure où naturellement apparaît un laplacien.[4]

Discrétisation. — Soit $\varepsilon>0$ petit. On a approximativement

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) \approx \frac{\phi(x+\varepsilon e_i)-\phi(x)}{\varepsilon} \qquad\text{ou encore}\qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\approx\frac{\phi(x)-\phi(x-\varepsilon e_i)}{\varepsilon}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}(x) &\approx \frac{\partial\phi/\partial x_i(x) - \partial\phi/\partial x_i(x-\varepsilon e_i)}{\varepsilon}\\ &\approx \frac{(\phi(x+\varepsilon e_i)-\phi(x))/\varepsilon - (\phi(x)-\phi(x-\varepsilon e_i)/\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\phi(x+\varepsilon e_i)+\phi(x-\varepsilon e_i)-2\phi(x)}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

3. Siméon Denis Poisson (21 juin 1781 à Pithiviers – 25 avril 1840 à Sceaux) est un mathématicien, géomètre et physicien français. (Wikipédia)

4. Pierre-Simon Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge et mort le 5 mars 1827 à Paris, est un mathématicien, astronome et physicien français. Il est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne. (Wikipédia)

Par conséquent,

$$\Delta\phi(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(x+\varepsilon e_i)+\phi(x-\varepsilon e_i)-2\phi(x)}{\varepsilon^2} = \frac{2n}{\varepsilon^2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n}\phi(x\pm\varepsilon e_i)-\phi(x)\Bigg),$$

la dernière somme comportant $2n$ termes. Ainsi, sur $\varepsilon\mathbb{Z}^n$, on a

$$\Delta\phi(x) \approx \frac{2n}{\varepsilon^2}(P-\mathrm{Id})\phi(x)$$

où P est la matrice de transition de la marche aléatoire symétrique sur $\varepsilon\mathbb{Z}^n$. Une discrétisation du problème précédent s'écrit alors

$$\begin{cases} \phi(x) = P\phi(x)+c(x) & \text{pour } x\in D,\\ \phi(x) = f(x) & \text{pour } x\in\partial D,\end{cases}$$

où D et ∂D sont deux ensembles au plus dénombrables disjoints, $E = D\cup\partial D$, éventuellement $\partial D = \varnothing$, P est une matrice de transition sur E, c (égale à $\varepsilon^2/2n\times\varrho$) est la fonction de charge ou de coût, f la condition au bord.

Remarque. — Jusqu'à présent, nous avons fait agir des matrices de transition sur des mesures de probabilité en multipliant la matrice ligne correspondant à la mesure de probabilité avec la matrice carrée représentant la matrice de transition ; ainsi on obtient une nouvelle matrice ligne qui est interprétée comme une mesure de probabilité. Avec cette convention, il est naturel de voir les fonctions $\phi : E\to\mathbb{R}$ comme des matrices colonnes. En effet, si λ est une mesure sur E, l'intégrale d'une fonction $\phi = (\phi(x))_{x\in E}$ par rapport à λ s'écrit

$$\lambda(\phi) = \sum_{x\in E}\lambda\{x\}\times\phi(x) = (\dots,\lambda\{x\},\dots)\times\begin{pmatrix}\vdots\\ \phi(x)\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P,

$$\mathbb{E}^x[\phi(X_1)] = \sum_{y\in E}P(x,y)\phi(y), \qquad \text{et ainsi} \qquad (\mathbb{E}^x[\phi(X_1)])_{x\in E} = P\phi,$$

ce qui définit une nouvelle fonction $P\phi : E\to\mathbb{R}$ qui est toujours vue comme un vecteur colonne indexé par E. Encore plus généralement, on a bien entendu

$$\mathbb{E}^x[\phi(X_n)] = \sum_{y\in E}P^n(x,y)\phi(y), \qquad \text{et ainsi} \qquad (\mathbb{E}^x[\phi(X_n)])_{x\in E} = P^n\phi.$$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E de matrice de transition P, et T le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n\geqslant 0 : X_n\in\partial D\}\in[0,\infty]$$

qui est le temps d'atteinte de la frontière, ou bord, ∂D.

Théorème 33. — *On suppose les fonctions $c : D\to\mathbb{R}_+$ et $f : \partial D\to\mathbb{R}_+$ à valeurs positives. En posant*

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x\Bigg[\sum_{0\leqslant n<T}c(X_n)+f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\Bigg], \qquad x\in E,$$

alors :

(i) *le potentiel* $\phi : E \to \mathbb{R}_+$ *vérifie*

$$\begin{cases} \phi(x) = P\phi(x) + c(x) & \text{pour } x \in D, \\ \phi(x) = f(x) & \text{sur } x \in \partial D\,; \end{cases} \tag{$*$}$$

(ii) *si* $\psi : E \to \mathbb{R}$ *vérifie*

$$\begin{cases} \psi(x) \geqslant P\psi(x) + c(x) & \text{pour } x \in D, \\ \psi(x) \geqslant f(x) & \text{pour } x \in \partial D\,; \end{cases} \tag{$**$}$$

et $\psi(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in E$*, alors* $\psi(x) \geqslant \phi(x)$ *pour tout* $x \in E$.

(iii) *Si* $\mathbb{P}^x\{T < \infty\} = 1$ *pour tout* $x \in E$*, alors* $(*)$ *a au plus une solution bornée.*

Démonstration. — (i) Il est clair que $\phi = f$ sur ∂D ($T = 0$). Si $x \in D$, par la propriété de Markov appliquée à $T \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}^x\Big[\sum_{1\leqslant n<T} c(X_n) + f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \,\Big|\, X_1 = y\Big] = \mathbb{E}^y\Big[\sum_{0\leqslant n<T} c(X_n) + f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \,\Big|\, X_1 = y\Big] = \phi(y).$$

Ainsi, en sortant de l'espérance définissant $\phi(x)$ le terme de la somme correspondant à $n = 0$, à savoir $c(x)$, puis en appliquant la formule des probabilités totales, on a

$$\phi(x) = c(x) + \sum_{y\in E} P(x,y)\,\mathbb{E}^y\Big[\sum_{1\leqslant n<T} c(X_n) + f(X_T)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \,\Big|\, X_1 = y\Big] = c(x) + \sum_{y\in E} P(x,y)\phi(y),$$

et donc $(*)$ est vérifiée.

Remarque. — Si c est identiquement nulle sur D, les solutions de $(*)$ sont appelées *fonctions harmoniques* associées à l'opérateur P. Si (iii) s'applique, $\mathbb{P}^x\{T < \infty\} = 1$ pour tout $x \in E$, et on a

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x[f(X_T)].$$

Lorsque le temps est $\mathbb{R}_+$, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (processus de Markov de générateur la moitié du laplacien de $\mathbb{R}^n$), le résultat analogue est le théorème de Kakutani.

(ii) Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$\phi_n(x) = \mathbb{E}^x\Big[\sum_{k=0}^{n} c(X_k)\mathbb{1}_{\{k<T\}} + f(X_T)\mathbb{1}_{\{T\leqslant n\}}\Big].$$

Par convergence monotone, $(\phi_n(x))_{n\geqslant 0}$ tend en croissant vers $\phi(x)$ pour tout $x \in E$. De même qu'au point précédent,

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(x) = c + P\phi_n(x) & \text{pour } x \in D, \\ \phi_{n+1}(x) = f(x) & \text{pour } x \in \partial D. \end{cases}$$

Supposons que ψ vérifie $(**)$ avec $\phi \geqslant 0 = \phi_0$. Alors $\psi \geqslant P\psi + c \geqslant P\phi_0 + c = \phi_1$ sur D et $\psi \geqslant f = \phi_1$ sur ∂D, donc $\psi \geqslant \phi_1$ sur E. En poursuivant de même, on obtient par récurrence que $\psi \geqslant \phi_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi $\psi \geqslant \phi$ comme annoncé.

(iii) On va montrer que si ψ vérifie $(**)$, alors

$$\psi(x) \geqslant \phi_{n-1}(x) + \mathbb{E}^x[\psi(X_n)\mathbb{1}_{\{T\geqslant n\}}]$$

avec égalité lorsqu'il y a égalité dans $(**)$. Cela donnera une nouvelle preuve de (ii). Mais, de plus, dans le cas de l'égalité, si $|\psi(x)| \leqslant M$ et $\mathbb{P}^x\{T < \infty\} = 1$ pour tout $x \in E$, alors, quand n tend vers l'infini, on a

$$\left|\mathbb{E}^x[\psi(X_n)\mathbb{1}_{\{T\geqslant n\}}]\right| \leqslant M \times \mathbb{P}^x\{T \geqslant n\} \longrightarrow 0,$$

et donc $\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$, ce qui prouve (iii).

Pour $x \in E$, on a

$$\psi(x) \geqslant c(x) + \sum_{y\in\partial D} P(x,y)f(y) + \sum_{y\in D} P(x,y)\psi(y),$$

et ainsi, par des substitutions successives à droite de cette inégalité sur ψ,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\geqslant c(x) + \sum_{y\in\partial D} P(x,y)f(y) + \sum_{y\in D} P(x,y)c(y) + \cdots \\
&\quad \cdots + \sum_{y_1\in D,\dots,y_{n-1}\in D} P(x,y_1) \times \cdots P(y_{n-2},y_{n-1})c(y_{n-1}) \\
&\quad + \sum_{y_1\in D,\dots,y_{n-1}\in D, y_n\in\partial D} P(x,y_1) \times \cdots P(y_{n-1},y_n)f(y_n) \\
&\quad + \sum_{y_1\in D,\dots,y_{n-1}\in D, y_n\in D} P(x,y_1) \times \cdots P(y_{n-1},y_n)\psi(y_n) \\
&= \mathbb{E}^x\big[c(X_0)\mathbb{1}_{\{T>0\}} + f(X_1)\mathbb{1}_{\{T=1\}} + c(X_1)\mathbb{1}_{\{T>1\}} + \cdots \\
&\quad \cdots + c(X_{n-1})\mathbb{1}_{\{T>n-1\}} + f(X_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}} + \psi(X_n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}\big] \\
&= \phi_{n-1}(x) + \mathbb{E}^x\big[\psi(X_n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}\big]
\end{aligned}$$

comme demandé, avec égalité lorsqu'il y a égalité dans $(**)$. □

Comme nous le verrons plus loin, le résultat du théorème suivant n'est pas sans lien avec le problème précédent.

Théorème 34. — *On suppose la fonction $c : E \to \mathbb{R}$ bornée. On pose, pour $\alpha \in [0,1[$,*

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c(X_n)\right].$$

Alors ϕ est l'unique solution bornée de

$$\phi(x) = \alpha \times P\phi(x) + c(x), \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Démonstration. — Soit $C \geqslant 0$ tel que $|c(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in E$. Alors,

$$|\phi(x)| \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{C}{1-\alpha}.$$

Donc ϕ est aussi bornée. Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{E}^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}c(X_n) \;\middle|\; X_1 = y\right] = \mathbb{E}^y\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c(X_n)\right] = \phi(y).$$

Ainsi, d'une manière analogue à la preuve du théorème précédent,

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c(X_n)\right]$$

$$= c(x) + \alpha \sum_{y \in E} P(x,y)\,\mathbb{E}^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} c(X_n) \,\middle|\, X_1 = y\right] = c(x) + \alpha \sum_{y\in E} P(x,y)\phi(y),$$

et donc $\phi = \alpha \times P\phi + c$.

D'un autre côté, soit $\psi : E \to \mathbb{R}$ bornée et vérifiant $\psi = \alpha \times P\phi + c$. On pose $M = \sup\{|\psi(x) - \phi(x)| : x \in E\} < \infty$. Comme $\psi - \phi = \alpha \times P(\psi - \phi)$, pour tout $x \in E$, on a

$$|\psi(x) - \phi(x)| \leqslant \alpha \sum_{y\in E} P(x,y) \times |\psi(y) - \phi(y)| \leqslant \alpha \times M.$$

Ainsi, $M \leqslant \alpha \times M$ et puisque $\alpha < 1$, on a $M = 0$ et donc $\psi = \phi$. □

Matrice de Green. — On suppose que $\partial D = \varnothing$. Le potentiel ϕ est alors défini par

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\infty} c(X_n)\right], \qquad x \in E,$$

où $c : E \to \mathbb{R}$ est par exemple à valeurs positives afin de ne pas rencontrer de problèmes de sommation et d'intégration. Par le théorème de Fubini, ou au moins formellement, on a

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[c(X_n)] = \sum_{n=0}^{\infty} P^n c(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P^n\right) c(x) = Gc(x)$$

où G est la *matrice de Green* de la matrice de transition P :

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n.$$

Ainsi, si on sait calculer G, on sait calculer le potentiel ϕ associés à une charge c. Il est à noter que les colonnes de G sont elles-mêmes des potentiels puisqu'elles correspondent aux charges égales à 1 en un point et nulles ailleurs. De plus, si x, $y \in E$, on a

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^x(X_n = y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^x[\mathbb{1}_{\{X_n = y\}}] = \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right].$$

Alors $G(x,y) = \infty$ équivaut au fait que x mène à y et y est récurrent. En particulier les coefficients diagonaux de G qui sont infinis correspondent aux états récurrents. Plus précisément, on a

$$G(x,y) = \frac{\mathbb{P}^x\{H^y < \infty\}}{1 - \mathbb{P}^y\{T^y < \infty\}},$$

où $H^y = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = y\}$ est le temps d'atteinte de y, et $T^y = \inf\{n > 0 : X_n = y\}$ est le temps de retour en y.

Résolvantes. — Pour l'équation $\phi = \alpha \times P\phi + c$, on a de manière similaire

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c(X_n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\, \mathbb{E}^x[c(X_n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P^n c(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P^n\right) c(x) = R_\alpha c(x)$$

où la famille de matrices $(R_\alpha)_{0 \leqslant \alpha < 1}$ est la *résolvante* de la matrice de transition P :

$$R_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P^n, \qquad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Contrairement à la matrice de Green, tous les coefficients de R_α sont finis pour $0 \leqslant \alpha < 1$. De plus, lorsque l'espace d'états est fini, l'identité géométrique permet d'établir que

$$R_\alpha = (\mathrm{Id} - \alpha P)^{-1},$$

ce qui justifie le nom de résolvante.

Exercice (cas d'une frontière non vide, $\partial D \neq \emptyset$). — Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un espace d'états E muni d'une partition $\{D, \partial D\}$, $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in \partial D\}$. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ le potentiel associé à une charge $c : D \to \mathbb{R}$ et une condition au bord $f : \partial D \to \mathbb{R}$. On pose

$$\widetilde{X} = \begin{cases} X_n & \text{si } n \leqslant T, \\ \delta & \text{si } n > T, \end{cases}$$

où δ est un nouvel état. Montrer que $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

On définit $\tilde{c} : E \cup \{\delta\} \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{c}(x) = \begin{cases} c(x) & \text{si } x \in D, \\ f(x) & \text{si } x \in \partial D, \\ 0 & \text{si } x = \delta. \end{cases}$$

Vérifier que

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x\Big[\sum_{0\leqslant n<\widetilde{T}} \tilde{c}\big(\widetilde{X}_n\big)\Big] = \mathbb{E}^x\Big[\sum_{n\geqslant 0} \tilde{c}\big(\widetilde{X}_n\big)\Big],$$

où $\widetilde{T} = T + 1 = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = \delta\}$. Constater qu'ainsi on s'est ramené à la situation d'une frontière vide.

Exercice. — Soit $c : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive. On partage E en la réunion disjointe de deux sous-ensembles D et ∂D, et on suppose que les équations linéaires

$$\begin{cases} \phi(x) = P\phi(x) + c(x) & \text{pour } x \in D, \\ \phi(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial D, \end{cases}$$

ont une unique solution bornée. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de matrice de transition P est certaine d'atteindre ∂D.

Considérons une nouvelle partition $\{\widetilde{D}, \partial\widetilde{D}\}$ une nouvelle partition de E telle que $\widetilde{D} \subset D$. Montrer que les équations linéaires

$$\begin{cases} \psi(x) = P\psi(x) + c(x) & \text{pour } x \in \widetilde{D}, \\ \psi(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\widetilde{D}, \end{cases}$$

ont une unique solution bornée et que $\psi(x) \leqslant \phi(x)$ pour tout $x \in E$.

TABLE DES MATIÈRES