Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées. Application à la simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles.

Nicolas JAMES,
sous la direction de
François BOUCHON et Thierry DUBOIS.

Laboratoire de Mathématiques,
Université Blaise Pascal,
Clermont-Ferrand.

Jeudi 10 décembre 2009.

Domaines d'application

(a) Météorologie

(b) Automobile

Plan de l'exposé

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Sommaire

Contexte
- Eq. de N-S pour un fluide incompressible
- Théorie phénoménologique de la turbulence
- Conséquences en Simulation Numérique Directe
- Schéma M.A.C.

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Eq. de N-S pour un fluide incompressible

Soient $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $t > 0$. La vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$ et la pression $p = p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ sont solutions de

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathrm{div}\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \triangle \mathbf{u}/Re + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega,$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega,$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega,$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ à } t = 0.$$

où

$$Re = U_* L_* / \nu,$$

avec

$$\nu = \mu/\rho \text{ viscosité cinématique.}$$

fluides	glycérine	air à 20 ˚	eau à 20 ˚
ν	1.2×10^{-3}	1.4×10^{-5}	10^{-6}
Re	42	3 594	50 000

TABLE: $L_* = 10^{-2}$ m et $U_* = 5$ $m.s^{-1}$.

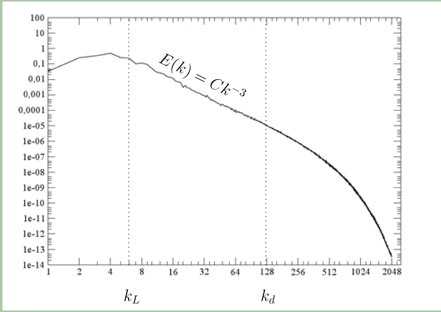
Sommaire
Contexte
Eq. de N-S pour un fluide incompressible
Théorie phénoménologique de la turbulence
Conséquences en Simulation Numérique Directe
Discrétisation en temps
Schéma M.A.C.
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Théorie phénoménologique de la turbulence

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{\imath \mathbf{k}.\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad E(k) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\in S_k} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \,,\ k \in \mathbb{N}$$

$$S_k = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \ ;\ |\mathbf{k}| \in [k - 0{,}5 \ ,\ k + 0{,}5) \right\}$$

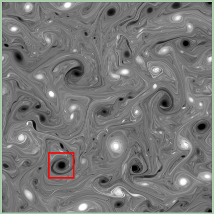
$$E(k) \sim Ck^{-3}, k \in [k_L, k_d], \quad k_d/k_L \sim Re^{1/2}.$$



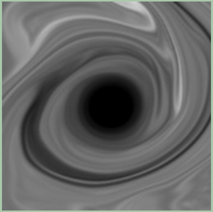
- R.H. Kraichnan, *Inertial ranges in two-dimensional turburlence*, Phys. Fluids **10**, 1967.

Sommaire
Contexte
Eq. de N-S pour un fluide incompressible
Théorie phénoménologique de la turbulence
Conséquences en Simulation Numérique Directe
Discrétisation en temps
Schéma M.A.C.
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

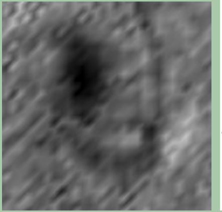
Conséquences en Simulation Numérique Directe



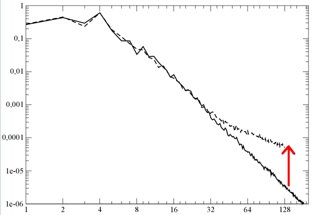
Maillage trop grossier,
→ Perte équilibre Transfert / Dissipation,
→ Accumulation Energie sur les modes élevés,
→ Solution non physique.



(c) 4096



(d) 256



(e) Spectres d'énergie

Méthode Multi-niveaux :
Décomposition échelles de la vitesse **et** correction petites échelles

Sommaire
Contexte
Eq. de N-S pour un fluide incompressible
Théorie phénoménologique de la turbulence
Conséquences en Simulation Numérique Directe
Discrétisation en temps
Schéma M.A.C.
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Schéma en temps B.D.F. + Méth. de Proj.

Soit $\delta t > 0$. Notons $\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)$ et $p^k(\mathbf{x}) \approx p(\mathbf{x}, t_k)$, $t_k = k\delta t$.

$$\frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - 4\mathbf{u}^k + \mathbf{u}^{k-1}}{2\delta t} - \triangle\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}/Re = -\nabla p^k + \mathbf{f}^{k+1}$$
$$-2\,\mathrm{div}\big(\mathbf{u}^k \otimes \mathbf{u}^k\big) + \mathrm{div}\big(\mathbf{u}^{k-1} \otimes \mathbf{u}^{k-1}\big),$$
$$\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}.$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - 2\delta t\,\nabla\big(\delta p^{k+1}\big)/3$$
$$\mathrm{div}\ \mathbf{u}^{k+1} = 0$$
$$\big(\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}\big)|_{\partial\Omega}\,.\mathbf{n} = 0.$$

où $\delta p^{k+1} = p^{k+1} - p^k$.

$$\triangle\left(\delta p^{k+1}\right) = 3\,\mathrm{div}\ \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}/2\delta t$$
$$\partial_{\mathbf{n}}\left(\delta p^{k+1}\right)|_{\partial\Omega} = 0,$$

Sommaire
Contexte
Eq. de N-S pour un fluide incompressible
Théorie phénoménologique de la turbulence
Conséquences en Simulation Numérique Directe
Discrétisation en temps
Schéma M.A.C.
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

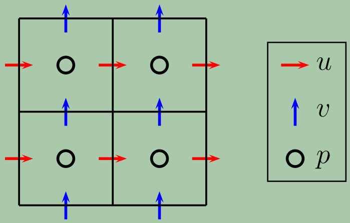
Schéma M.A.C. : placement des inconnues

Soit $\Omega = (0, L) \times (0, H)$.
On pose $\ell = L/n_\ell$, $h = H/n_h$, $x_i = i\,\ell$ et $y_j = j\,h$.
On suppose que $\ell = h$.

$$K_{i,j} = \left[x_{i-1}\ ,\ x_i\right] \times \left[y_{j-1}\ ,\ y_j\right]$$

$$u_{i\,j}(t) \;\simeq\; \frac{1}{\ell\ h}\int_{K_{i+\frac{1}{2},\,j}} u(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}, \quad v_{i\,j}(t) \;\simeq\; \frac{1}{\ell\ h}\int_{K_{i\,j+\frac{1}{2}}} v(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}$$

$$p_{i\,j}(t) \;\simeq\; \frac{1}{\ell\ h}\int_{K_{i\,j}} p(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}.$$



- F.H. Harlow et J.E. Welch, *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*, Phys. Fluids **8**, 1965.

Sommaire
Contexte
Eq. de N-S pour un fluide incompressible
Théorie phénoménologique de la turbulence
Conséquences en Simulation Numérique Directe
Discrétisation en temps
Schéma M.A.C.
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Sommaire

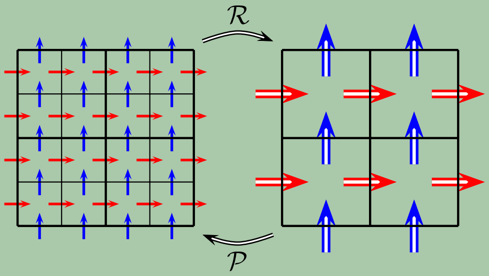
Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
- Opérateurs d'interpolation
- Propriétés des opérateurs
- Séparation des échelles
- Algorithme multi-niveaux
- Résultats numériques

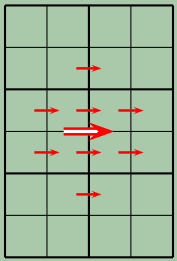
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Opérateurs d'interpolation : restriction



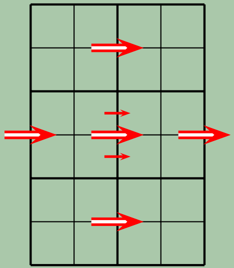
$$
\begin{aligned}
(\mathcal{R}u)_{i,j} = \Big(& u_{2i-1,\,2j} + u_{2i-1,\,2j-1} \\
& + u_{2i,\,2j+1} + u_{2i,\,2j} \\
& + u_{2i,\,2j-1} + u_{2i,\,2j-2} \\
& + u_{2i+1,\,2j} + u_{2i+1,\,2j-1} \Big)/8
\end{aligned}
$$



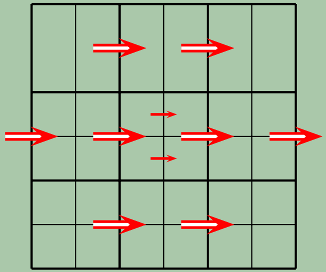
Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Opérateurs d'interpolation
Propriétés des opérateurs
Séparation des échelles
Algorithme multi-niveaux
Résultats numériques
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Opérateurs d'interpolation : prolongement

$$(\mathcal{P}u)_{2i,2j} = \Big[u_{i-1,j} + 2u_{i,j+1} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}\Big]/8$$



$$(\mathcal{P}u)_{2i-1,2j} = \Big[u_{i-1,j+1} + 3u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + 3u_{i,j}\Big]/8$$



Propriétés des opérateurs

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Opérateurs d'interpolation
Propriétés des opérateurs
Séparation des échelles
Algorithme multi-niveaux
Résultats numériques
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Opérateurs d'ordre deux :

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{R} u^{\mathbf{n}} - u^{\mathbf{n}/2} \right\|_\infty &\leq Ch^2, \\ \left\| \mathcal{P} u^{\mathbf{n}/2} - u^{\mathbf{n}} \right\|_\infty &\leq Ch^2 \end{aligned}$$

Conservation de la divergence discrète :

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}/2} \left(\mathcal{R} \mathbf{u} \right)_{i,\,j} &= \sum_{p,\,q} d_{p,\,q} D_{\mathbf{n}} \left(\mathbf{u} \right)_{p,\,q} \\ D_{\mathbf{n}} \left(\mathcal{P} \mathbf{u} \right)_{i,\,j} &= \sum_{p,\,q} e_{p,\,q} D_{\mathbf{n}/2} \left(\mathbf{u} \right)_{p,\,q} \end{aligned}$$

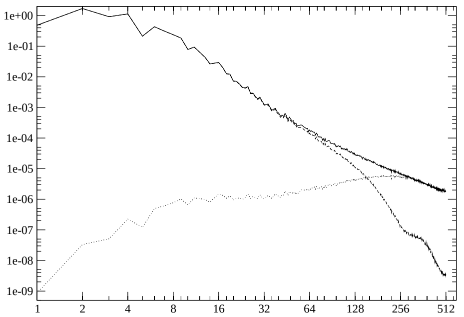
où $D_{\mathbf{n}}$ est la divergence discrète sur la grille $\mathcal{G}_{\mathbf{n}}$.

Séparation des échelles : 2 niveaux

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{PR}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \mathcal{PR}\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{z}\|_\infty \leq Ch^2$$

$$D\mathbf{u} = 0 \Rightarrow D\mathbf{y} = 0 = D\mathbf{z}$$



Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Opérateurs d'interpolation

Propriétés des opérateurs

Séparation des échelles

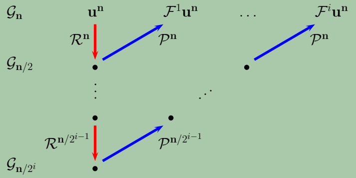
Algorithme multi-niveaux

Résultats numériques

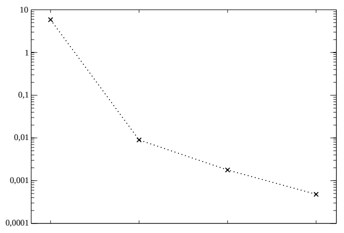
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

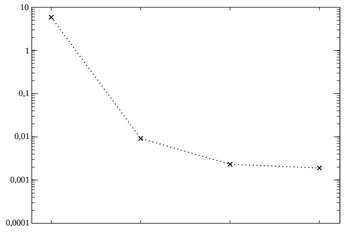
Séparation des échelles : *n* niveaux



$$\mathcal{F}^i = \mathcal{P}^{(i)} \circ \mathcal{R}^{(i)},$$
$$\delta^i_{\mathcal{F}}\mathbf{u} = \left(\mathcal{F}^{i-1} - \mathcal{F}^i\right)\mathbf{u},$$
$$\mathbf{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta^i_{\mathcal{F}}\mathbf{u}\right) + \mathcal{F}^n\mathbf{u}.$$



(f) cas « résolu »



(g) cas « sous-résolu »

FIGURE: Energie des différentes échelles, 4 niveaux.

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

- Opérateurs d'interpolation
- Propriétés des opérateurs
- Séparation des échelles
- Algorithme multi-niveaux
- Résultats numériques

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Algorithme multi-niveaux

1. énergie cinétique (locale) des niveaux d'échelle sur des groupements de mailles

$$E_{p,\,q}(\delta^i_{\mathcal{F}}\mathbf{u}),\ i \in \{1, 2, 3\}$$

2. coefficients de correction locaux :

$$c_{p,\,q} = \frac{E_{p,\,q}(\delta^2_{\mathcal{F}}\mathbf{u})}{\sqrt{E_{p,\,q}(\delta^3_{\mathcal{F}}\mathbf{u})E_{p,\,q}(\delta^1_{\mathcal{F}}\mathbf{u})}}$$

3. limitateur $c_{min} \leq c_{p,\,q} \leq 1$ (dans la pratique $c_{min} = 0.99$)
4. interpolation des coefficients de correction sur chaque maille
5. correction de la vitesse intermédiaire :

$$\mathbf{u} \ \leftarrow \ \mathbf{y} + c\,\mathbf{z}$$

Sommaire

Contexte

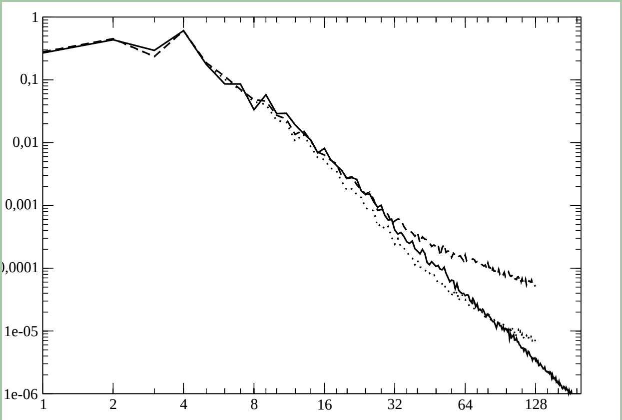
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
- Opérateurs d'interpolation
- Propriétés des opérateurs
- Séparation des échelles
- Algorithme multi-niveaux
- Résultats numériques

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

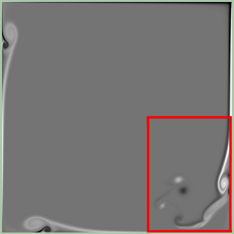
Conclusion - perspectives

Résultats numériques : périodique

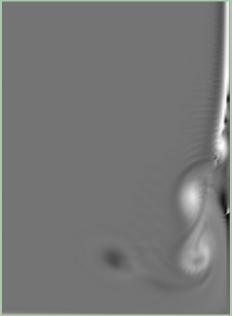
- accumulation énergie maîtrisée
- pente du spectre $\approx Ck^{-3}$
- dynamique des grandes échelles retrouvée



Résultats numériques : cavité



- DNS grossière → accumulation petites structures près de la paroi
- Méth. multi-niveaux → développement de la couche limite amélioré



(a) DNS 256

(b) Muli-niv. 256

(c) DNS 1024

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Opérateurs d'interpolation
Propriétés des opérateurs
Séparation des échelles
Algorithme multi-niveaux
Résultats numériques

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Conclusion - perspectives

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
- Méthodes de type frontière immergée
- Schéma numérique
- Solveur rapide
- Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
- Méthodes de type frontière immergée
- Schéma numérique
  - L'obstacle
  - Les ratios
  - Le placement des inconnues
  - Discrétisation de l'étape de prédiction
  - Discrétisation de l'étape de correction
- Solveur rapide
- Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Méthode de type frontière immergée sur maillage cartésien

fronti\unhbox \voidb@x \b

ère$_i$*mmergé*$\widehat{\ }$*e*$_t$*exte.jpg*è$\widehat{\ }$*re*$_i$*mmergé*$\widehat{\ }$*e*$_t$*exte.jpg*

- Écoulements plus réalistes
- Application de la méthode multi-niveaux développée.
- Dans la littérature : forçage, ghost cell, pénalisation, cut cell (avec mergin cell, slaving cell), ...
- Développement d'une nouvelle méthode de type « cut cell ».

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

L'obstacle

Les ratios

Le placement des inconnues

Discrétisation de l'étape de prédiction

Discrétisation de l'étape de correction

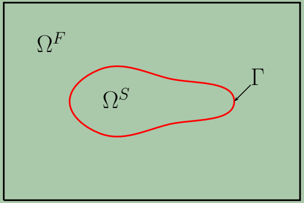
Solveur rapide

Résultats numériques

Conclusion - perspectives

L'obstacle

Domaine d'étude rectangulaire.
Obstacle Ω^S délimité par une courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$.



Distance algébrique à la courbe Γ

$$
\begin{aligned}
d : \Omega &\to \mathbb{R} \\
\mathbf{x} &\mapsto \begin{cases} d(\mathbf{x}, \Gamma) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^S \\ -d(\mathbf{x}, \Gamma) & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

L'obstacle

Les ratios

Le placement des inconnues

Discrétisation de l'étape de prédiction

Discrétisation de l'étape de correction

Solveur rapide

Résultats numériques

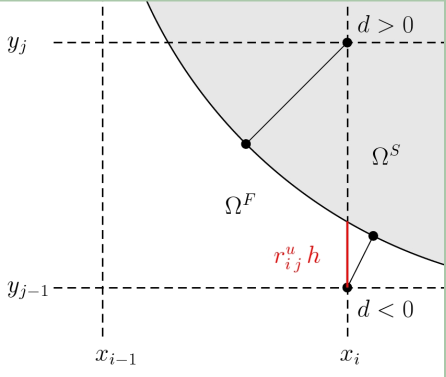
Conclusion - perspectives

Les ratios

$$r_{i\,j}^{u} \approx \frac{|\sigma_{i,j}^{u} \cap \Omega^F|}{|\sigma_{i,j}^{u}|} \in [0,1],$$

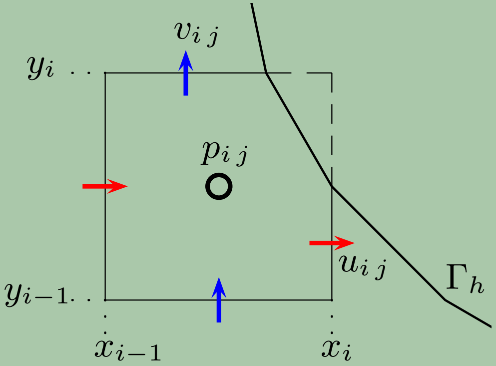
où

$$\sigma_{i,j}^{u} = \{x_i\} \times [y_{j-1}, y_j] \,.$$



Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Placement des inconnues



- Position de la vitesse adaptée à l'expression de la divergence discrète.
- Interpolation du gradient de la pression.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Construction du schéma : étape de prédiction

Loin de l'obstacle : discrétisations centrées d'ordre 2.

A proximité de l'obstacle

$$\begin{cases} \triangle \mathbf{u} \ : \ \text{discrétisation D. F. d'ordre 1} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \ : \ \text{discrétisation V. F. d'ordre 1} \end{cases}$$

• N. Matsunaga et T. Yamamoto, *Superconvergence of the Shortley-Weller approximation for Dirichlet problems*, J. Comp. Appl. Math. **116**, 2000.

$\xrightarrow{\text{elliptique lineaire}}$ **Schéma d'ordre** 2.

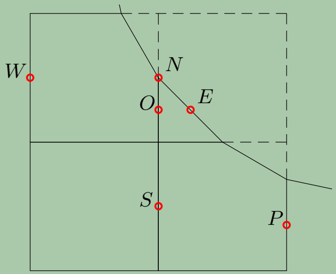
Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Discrétisation étape de prédiction : $\triangle u$

Schéma D. F. d'ordre un $\Leftrightarrow$ Approx. exacte pour $P \in \mathbb{R}_2[X, Y]$.

$\mathcal{V} = \{O, N, S, E, W, P\}$

- O la position de $u_{i\,j}$,
- N, S, E, W parmis inconnues/bord,
- P arbitraire.



Trouver les coeff. $\alpha_M \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\sum_{M \in \mathcal{V}} \alpha_M u(M) = \triangle u(O) + \mathcal{O}(h).$$

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

L'obstacle

Les ratios

Le placement des inconnues

Discrétisation de l'étape de prédiction

Discrétisation de l'étape de correction

Solveur rapide

Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

L'obstacle

Les ratios

Le placement des inconnues

Discrétisation de l'étape de prédiction

Discrétisation de l'étape de correction

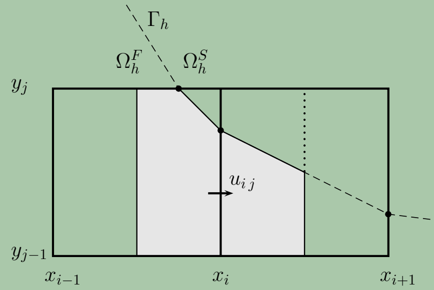
Solveur rapide

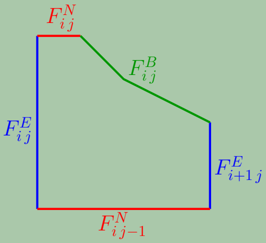
Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Discrétisation étape de prédiction : $\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ (1/3)

$$\tilde{K}_{i,j} = K_{i,j} \cap \Omega^F$$





$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{i,j} &= \int_{\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}} \left(\partial_x(u^2) + \partial_y(uv)\right)\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}} \left(u^2 n_x + (uv) n_y\right)\, dS \\
&= F^E_{i+1,j} - F^E_{i,j} + F^N_{i,j} - F^N_{i,j-1} + F^B_{i,j}.
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ reconstruction des flux

Discrétisation étape de prédiction : div $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ (2/3)

$$\mathcal{I}_{i,j} \approx F^{E\,app}_{i+1,j} - F^{E\,app}_{i,j} + F^{N\,app}_{i,j} - F^{N\,app}_{i,j-1} + F^{B\,app}_{i,j} = NL_1(\mathbf{u})_{i,j}.$$

Ordre d'approximation

$$C_h = \left\{ \min_{\left|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}\right|>0} \left|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}\right| \right\} / h^2.$$

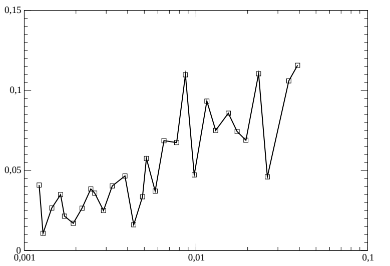
S'il existe une constante $C_0 > 0$ t.q. $C_h > C_0$, $\forall h$, alors

$$\frac{1}{\left|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}\right|} \left(NL_1(\mathbf{u})_{i,j} - \mathcal{I}_{i,j}\right) = \mathcal{O}(h),$$

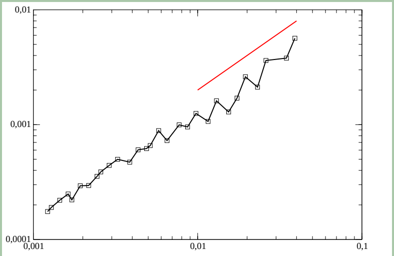
dès que $\left|\tilde{K}_{i+\frac{1}{2},j}\right| > 0$.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Discrétisation étape de prédiction : div $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ (3/3)



Coefficient C_h en fonction du pas d'espace h



Erreur d'approximation de la non-linéarité en fonction de h

$\Downarrow$

ordre 1

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Construction du schéma : étape de correction

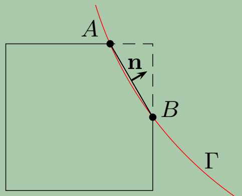
- div $\mathbf{u}$: Divergence discrète / maille
- ∇p : Opérateur d'interpolation du gradient de pression

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Divergence discrète en présence d'un obstacle (1/2)

$$\iint_{\tilde{K}_{i,j}} \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\mathbf{x} = \int_{\partial \tilde{K}_{i,j}} \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS$$
$$= \int_{\sigma^u_{i,j} \cap \Omega^F} u dS - \int_{\sigma^u_{i-1,j} \cap \Omega^F} u\, dS$$
$$+ \int_{\sigma^v_{i,j} \cap \Omega^F} v dS - \int_{\sigma^v_{i,j-1} \cap \Omega^F} v\, dS + \int_{\widehat{AB}} \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS,$$

où $\widehat{AB} = \Gamma \cap K_{i,j}$.



Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

L'obstacle

Les ratios

Le placement des inconnues

Discrétisation de l'étape de prédiction

Discrétisation de l'étape de correction

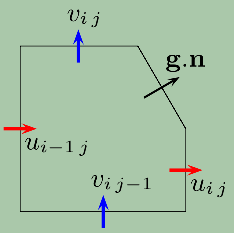
Solveur rapide

Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Divergence discrète en présence d'un obstacle (2/2)

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives



- Si $h \ll$ rayon de courbure de Γ :

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS \approx \int_{[AB]} \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS$$
$$\approx L\,\mathbf{g}\Big(\big(A+B\big)/2\Big).\mathbf{n}_{i,j}.$$

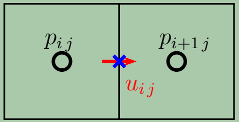
- $\displaystyle\int_{\sigma^u_{i,j}\cap\Omega^F} u\, dS \approx r^u_{i,j}\ h\ u_{i,j}$ et $\displaystyle\int_{\sigma^v_{i,j}\cap\Omega^F} v\, dS \approx r^v_{i,j}\ h\ v_{i,j}.$

$$\begin{aligned}(D_{obs}\mathbf{u})_{i,j} &= h\,(r^u_{i,j}u_{i,j} - r^u_{i-1,j}u_{i-1,j}) + h\,(r^v_{i,j}v_{i,j} - r^v_{i,j-1}v_{i,j-1}) \\ &\quad + L\,\mathbf{g}\Big(\big(A+B\big)/2\Big)\,.\,\mathbf{n}_{i,j} \\ &= (D^0_{obs}\mathbf{u})_{i,j} + D^{supp}_{i,j}\end{aligned}$$

Opérateur d'interpolat° du gradient de pression $\mathcal{P}_\phi$

En l'absence d'obstacle

$$Gp = \begin{pmatrix} \left(p_{i+1,j} - p_{i,j}\right)/h \\ \left(p_{i,j+1} - p_{i,j}\right)/h \end{pmatrix}$$

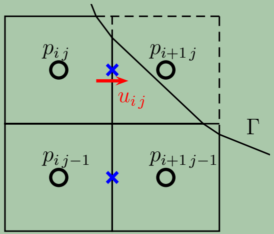


$$D(G\delta p) = \frac{3\ h^2}{2\ \delta t} D(\tilde{\mathbf{u}})$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2\ \delta t}{3\ h^2} G\delta p$$

$$\Rightarrow\ D(\mathbf{u}) = 0$$

En présence d'obstacle



$$D^0_{obs}(\mathcal{P}_\phi(G\delta p)) = \frac{3\ h^2}{2\ \delta t} D_{obs}(\tilde{\mathbf{u}})$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \frac{2\ \delta t}{3\ h^2} \mathcal{P}_\phi(G\delta p)$$

$$\Rightarrow\ D_{obs}(\mathbf{u}) = 0$$

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Solveur rapide (1/2)

Obstacle → systèmes linéaires **non symétriques**

Méthode de résolution de systèmes linéaires **itératives**.
Mailles coupées
→ Systèmes mal conditionnés
→ Convergence difficile
→ Simulation sur maillage grossier
→ Simulation d'écoulements à *Re* faible

Méthode de résolution des systèmes linéaires **directe**.

1. *Etape de pré-traitement* : $\mathcal{O}(n^3)$ opérations. Si obstacle *immobile*, **une fois** par simulation.
2. Dans ce cas, $\mathcal{O}\left(n^2 \log n\right)$ opérations par itération (idem écoulement sans obstacle).

- B.L. Buzbee, F.W.Dorr, J.A. George et G.H. Golub, *The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions*, *SIAM J. Num. Anal.* **8**, 1971.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Solveur rapide (2/2)

Exemple de simulation :

$\Omega = (-5,5)^2$, obstacle $=$ disque, $D = 1$,

Maillage uniforme, $n = 1024$, 412 mailles coupées

Tps CPU prétraitement : 6 *min*

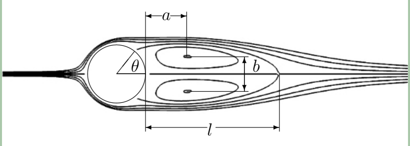
Tps CPU par itération : 1.6 *s*

Mémoire allouée : 300 Mo $\approx an^2$, $a = 310$ octets/point.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Résultats numériques : $Re = 1, 10, 20, 40$

Écoulements stationnaires



- R. Bouard et M. Coutanceau, *Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation*, J. Fluid Mech. **79**, 1977.

$$\sum \text{Forces}_{/\text{obstacle}} = \begin{pmatrix} F_d \\ F_l \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\rho A u_\infty \begin{pmatrix} C_d \\ C_l \end{pmatrix},$$

Auteurs	$Re = 40$				
	C_d	θ	l	a	b
Bouard et al		53.8	2.13	0.76	0.59
Calhoun	1.62	54.2	2.18		
Dennis et al	1.52	53.8	2.35		
Fornberg	1.50	55.6	2.24		
Linnick et al	1.54	53.6	2.28	0.72	0.60
Taira et al	1.55	54.1		0.73	0.60
Présente étude	1.50	53.4	2.26	0.710	0.60

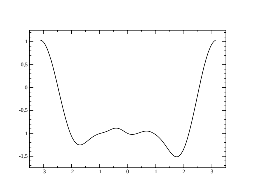
Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Résultats numériques : $Re = 80, 200$

Écoulement instationnaire.

Fréquence d'émission des tourbillons = nombre de Strouhal St.

Auteurs	$Re = 200$		
	C_d	C_l	St
Linnick et al	1.34 ± 0.044	0.69	0.197
Liu et al	1.31 ± 0.049	0.69	0.192
Miyake et al	1.34 ± 0.043	0.67	0.196
Présente étude	1.380 ± 0.0445	0.678	0.197



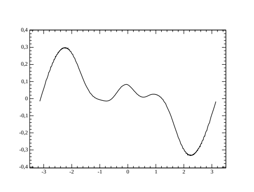


FIGURE: Répartion de la pression et de la contrainte de cisaillement sur l'obstacle.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Ecoulement autour d'un cylindre, $Re = 200$.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Résultats numériques : $Re = 9500$

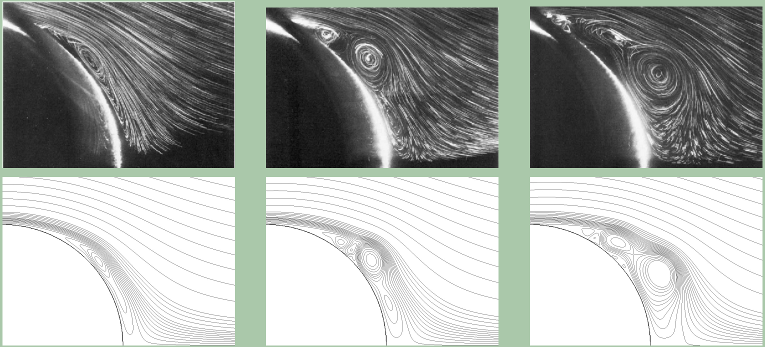


FIGURE: Décollement de la couche limite : comparaison avec des résultats expérimentaux.

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

Méthodes de type frontière immergée

Schéma numérique

L'obstacle

Les ratios

Le placement des inconnues

Discrétisation de l'étape de prédiction

Discrétisation de l'étape de correction

Solveur rapide

Résultats numériques

Conclusion - perspectives

Ecoulement autour d'un cylindre, $Re = 9500$.

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Méthodes de type frontière immergée
Schéma numérique
L'obstacle
Les ratios
Le placement des inconnues
Discrétisation de l'étape de prédiction
Discrétisation de l'étape de correction
Solveur rapide
Résultats numériques
Conclusion - perspectives

Sommaire

Contexte

Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles

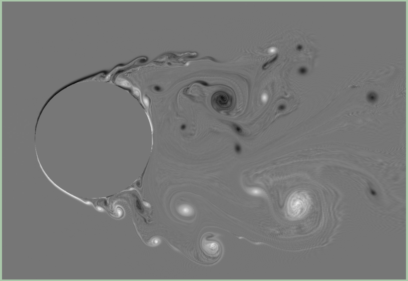
Conclusion - perspectives

Sommaire
Contexte
Méthodes multi-niveaux sur grilles décalées
Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacles
Conclusion - perspectives

Conclusion et perspectives

- méthode multi-niveaux originale dans le contexte MAC qui permet un gain du temps de calcul.

- nouvelle méthode ≪ *cut cell* ≫ qui apporte précision et rapidité.



1. méth. multi-niveaux autour d'un obstacle 2d
2. méth. multi-niveaux en 3d
3. écoulements tri-dimensionnels (cylindre)
4. méthode de raffinement local
5. méthode de décomposion de domaine