Interpolation polynomiale : cours à reproduire lors du TP Latex numéro 3

le 8 février 2012

Soit n un entier. Afin d'alléger les notations, $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Rappelons que $\mathbb{P}_n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.

1 Motivation

Considérons $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ du plan $\mathbb{R}^2$, d'abscisses distinctes deux à deux.

Exemple 1 *Dans le contexte des sciences expérimentales, ces données peuvent provenir d'une expérience, par exemple la température y (en degrés) en fonction du temps x (en heures).*

i	x_i	y_i
0	0	5
1	6	10
2	12	19
3	18	18

Nous voulons représenter le phénomène observé par une fonction P polynômiale. Ce polynôme doit vérifier

$$P(x_i) = y_i, \ \forall i = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

2 Le polynôme de Lagrange

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, définissons le polynôme ℓ_i par :

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0,\ldots,n,\ j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2}$$

Le polynôme ℓ_i est de degré n exactement. Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, il vérifie

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases} \tag{3}$$

Posons

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x). \tag{4}$$

Le polynôme p_n est de degré inférieur ou égal à n. Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, il vérifie

$$p_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{i\,k} = y_k. \tag{5}$$

Théorème 1 *Soient $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ du plan $\mathbb{R}^2$, d'abscisses distinctes deux à deux. Il existe un **unique** polynôme $p \in \mathbb{P}_n$ tel que*

$$p(x_i) = y_i, \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \tag{6}$$

*c'est le polynôme p_n défini par (4). Il est appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange** aux points (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.*

Remarque 1 *Il existe une infinité de polynôme p vérifiant (6), par exemple :*

$$p(x) = p_n(x) + \lambda \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

où p_n est le polynôme d'interpolation de Langrange aux points x_i, $i = 0, \ldots, n$ et λ est un réel quelconque.

Remarque 2 *Lorsque les points x_i sont distincts deux à deux, l'ensemble $\mathcal{B} = \{\ell_0, \ldots, \ell_n\}$ est une **base** de $\mathbb{P}_n$, appellée **base de Lagrange** associée aux points $x_0, \ldots, x_n$.*

3 Forme de Newton du polynôme d'interpolation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant les abscisses x_i, $i = 0, \ldots, n$.

Notation 1 *Soient $k \in \{0, \ldots, n\}$ et i entier inférieur ou égal à k. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_i, \ldots, x_k$ est noté :*

$$p_{i \to k}.$$

Lorsque $i = 0$, on note

$$p_k = p_{0 \to k}.$$

Définition 1 *Soient $k \in \{0, \ldots, n\}$ et i entier inférieur ou égal à k. Le polynôme $p_{i \to k}$ est de degré inférieur ou égal à $k - i$*

$$p_{i \to k} \in \mathbb{P}_{k-i}.$$

*On note $f[x_i, \ldots, x_k]$ le coefficient dans $p_{i \to k}$ qui porte sur x^{k-i}. Ce coefficient est appelé **différence divisée** d'ordre $k - i$.*

Remarque 3 *Les différences divisées d'ordre* 0 *sont données par*

$$f[x_i] = f(x_i),\ \forall i = 0, \ldots, n. \tag{7}$$

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$, le polynôme $q_k = p_k - p_{k-1} \in \mathbb{P}_k$ et vérifie $q_k(x_i) = 0,\ \forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Il s'ensuit que

$$q_k(x) = C(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}),$$

où C est une constante réelle. La constante C est le coefficient qui porte sur x^k dans q_k, c'est le même que dans p_k. On a donc :

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i), \tag{8}$$

Définition 2 *On déduit des relations* (7) *et* (8) *que*

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i). \tag{9}$$

Cette décomposition est appelée ***forme de Newton*** *du polynôme d'interpolation.*

Définition 3 *Les polynômes*

$$N_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) \tag{10}$$

sont appelés ***polynômes de Newton****. L'ensemble* $\mathcal{C} = \{N_k,\ k = 0, \ldots, n\}$ *est une* ***base*** *de* $\mathbb{P}_n$*, appellée* ***base de Newton***

Théorème 2 *Soient* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *et* i *entier inférieur à* k*. On a la relation suivante :*

$$f[x_i, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_k] - f[x_i, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}.$$

Proposition 1 *En factorisant la forme de Newton* (9)*, il vient :*

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\Big(f[x_0, x_1] + (x - x_1)\Big(\ldots\big(f[x_0, \ldots, x_{n-1}] + (x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n]\big)\Big)\Big).$$

L'algorithme de Hörner s'écrit

- *Initialisation :*

$$p \leftarrow f[x_0, \ldots, x_n]$$

- *Pour* k *décroissant de* $n - 1$ *à* 0 *faire :*

$$p \leftarrow f[x_0, \ldots, x_k] + (x - x_k)\ p.$$