UNIVERSITÉ DE POITIERS, L2 Math-Info

GÉOMETRIE ÉLEMENTAIRE

Nadir Matringe

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2012-2013

Chapitre 1

Calcul vectoriel et barycentrique

1.1 Notion de vecteur

On ne définit pas vraiment le plan $\mathcal{P}$, mais c'est celui qui est utilisé par l'étudiant depuis le lycée, et qui possède les propriétés usuelles (par deux points distincts passe une seule droite, on sait définir la distance entre deux points du plan, l'angle entre deux droite, etc.). On notera d'ailleurs $\overline{AB}$ la distance entre deux points A et B du plan. Il faut faire attention ici : comme on le verra plus tard, on peut munir $\mathcal{P}$ de différentes distances, l'essentiel pour cette section, est que si A, B et C sont alignés avec $A \neq C$, le quotient $\overline{AB}/\overline{AC}$ ne dépend pas de la distance choisie, c'est bien le cas si on choisit des distances associées à des porduits scalaires, c'est donc ce genre de distance qu'on utilise. On ne privilégie à priori aucun point du plan, comme étant l'origine.
Intuitivement, un vecteur correspond à une flèche orientée d'un point A vers un point B dans le plan $\mathcal{P}$. Si on considère deux autres points C et D, on dit qu'ils définissent le même vecteur si la flèche orientée de C vers D est identique à la flèche orientée de A vers B, ceci peut s'exprimer de la manière suivante : les segments $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même milieu.
Ainsi, on associe aux couple (A, B) et (C, D) le même vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, et les couples (A, B) et (C, D) peuvent être considéré comme "équivalents" puisqu'ils produisent le même vecteur. Un vecteur correspond à la donnée d'un ensemble de couples "équivalents" du plan. Pour formaliser cela, on introduit la notion de relation d'équivalence.

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E (i.e. pour tout couple (x, y) de E^2, ou bien x est en relation avec y, ce qu'on note $x\mathcal{R}y$, ou bien x n'est pas en relation avec y, exemples classiques sur $\mathbb{R}$: $<$,$>$, $=$, $\leq$, $\geq$). On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout x de E, on a $x\mathcal{R}x$.*
2. *$\mathcal{R}$ est symétrique : pour tout x et y de E, on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y\mathcal{R}x$.*
3. *$\mathcal{R}$ est symétrique : pour tout x, y et z de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.*

Exercice 1.1.1. *Montrer que sur $\mathbb{R}$, parmi les relations $<$,$>$, $=$, $\leq$, $\geq$, seul $=$ est une relation d'équivalence.*

Exercice 1.1.2. *Sur $\mathbb{R}^*$, on définit la relation $\simeq$ par : $x \simeq y$ si et seulement si $x/y > 0$. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^*$.*

La donnée d'une relation d'équivalence sur un ensemble partitionne cet ensemble en classe d'équivalences.

Définition 1.1.2. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E, on appelle classe d'équivalence de $x \in E$ l'ensemble des points qui sont en relation avec x : $Cl(x) = \{y \in E, y \sim x\}$.*

Proposition 1.1.1. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Alors E est la réunion disjointe de ses classes d'équivalences.*

Démonstration. Pour montrer que E est réunion de ses classes d'équivalences, on prend x dans E, et on montre qu'il est dans une classe d'équivalence, et une seule. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, on $x \sim x$, soit $x \in Cl(x)$. Pour montrer que la réunion est disjointe, on montre que si $Cl(x) \neq Cl(y)$, alors $Cl(x) \cap Cl(y) = \emptyset$. Par contraposée, il suffit de montrer que s'il existe z dans $Cl(x) \cap Cl(y)$, alors $Cl(x) = Cl(y)$. On procède par double inclusion : soit x_0 dans $Cl(x)$, alors $x_0 \sim x$. Mais comme z est dans $Cl(x)$, on a $z \sim x$, i.e. $x \sim z$ par réflexivité, et donc $x_0 \sim z$ par transitivité. Finalement, come $z \in Cl(y)$, on a $z \sim y$, et donc $x_0 \sim y$ par transitivité, c'est à dire $x_0 \in Cl(y)$. On en déduit que $Cl(x) \subset Cl(y)$. Mais par réflexivité, $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$, donc x et y jouent des rôles symétriques, et donc $Cl(y) \subset Cl(x)$, d'où $Cl(x) = Cl(y)$. □

Exercice 1.1.3. *Montrer que les classes d'équivalences de $=$ sur $\mathbb{R}$ sont les singletons, et que celles de la relation $\simeq$ sur $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}_{>0}$ et $\mathbb{R}_{<0}$.*

On introduit sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ la relation $\sim$, définie par $(A, B) \sim (C, D)$: les segments $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même milieu, autrement dit lequadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Proposition 1.1.2. *La relation $\sim$ définie ci-dessus est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ des couples de points du plan $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Exercice corrigé au tableau. □

On peut maintenant formellement définir ce qu'est un vecteur.

Définition 1.1.3. *Soient A et B deux points du plan, on défini le vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ comme étant $Cl((A, B)) = \{(C, D) \in \mathcal{P}^2, (C, D) \sim (A, B)\}$, pour la relation $\sim$ sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. On dit que le couple (A, B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$. On note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs.*

On peut définir la longueur d'un vecteur.

Définition 1.1.4. *Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, et (A, B) un représentant de $\overrightarrow{v}$, on note $||\overrightarrow{v}||$ la distance de A à B, on l'appelle longueur de $\overrightarrow{v}$. Elle ne dépend pas du couple représentant $\overrightarrow{v}$ choisi.*

Démonstration. Si (C, D) est un autre représentant de $\overrightarrow{v}$, on a par définition que $ABDC$ est un paralélogramme, donc les côtés AB et DC ont même longueur. □

Exercice 1.1.4. *Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, et A un point de $\mathcal{P}$, montrer qu'il existe un unique point B de $\mathcal{P}$, tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. On utilisera parfois la notation $A = B + \overrightarrow{v}$.*

1.2 Addition et multiplication des vecteurs par un réel

On peut munir l'ensemble des vecteurs d'une addition, i.e. d'une loi interne, associative, et commmutative. Cette operation est connue depuis le lycée au moins, et consiste à dire que la somme de deux flèches, est la flèche obtenue en collant ceux deux flèches par la fin de la première, et le début de la seconde, et en traçant la flèche joignant alors le début de la première à la fin de la seconde. Pour formaliser cela, on pose.

Définition-Proposition 1.2.1. *Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs, si (A, B) est un représentant de $\overrightarrow{v}$, alors, d'après l'exercice 1.1.4, il existe un unique C dans $\mathcal{P}$, tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$. On pose alors*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}.$$

Cette définition est indépendante du couple (A, B) représentant $\overrightarrow{v}$.

Démonstration. Si (A', B') est un autre représentant de $\overrightarrow{v}$, et C' est l'unique point de P tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{B'C'}$, on veut montrer que $ACC'A'$ est un parallélogramme. Mais comme $ABB'A'$ est un paralélogramme, les segments $[AA']$ et $[BB']$ sont parallèles, ont même longueur, et même orientation. Comme $BCC'D'$ est un paralélogramme, les segments $[BB']$ et $[CC']$ sont parallèles ont même longueur, et même orientation. Ainsi, les segments $[AA']$ et $[CC']$ sont parallèles ont même longueur, et même orientation, et $ACC'A'$ est un parallélogramme. □

L'addition des vecteurs a toutes les propriétés qu'on imagine.

Proposition 1.2.1. *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On note $\overrightarrow{0}$ le vecteur dont un représentant est $\overrightarrow{AA}$, pour un point A de $\mathcal{P}$. L'addition des vecteurs vérifie les propriétés suivantes :*

1. *associativité :* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
2. *élément neutre :* $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$.
3. *commutativité :* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
4. *existence de l'opposé : si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, alors on note $-\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$, on a* $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

Il découle facilement que l'élément neutre est unique, et que l'opposé d'un vecteur aussi. On dit que $(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

Exercice 1.2.1. *Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, et B un point de $\mathcal{P}$, montrer qu'il existe un unique point A de $\mathcal{P}$, tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. On utilisera la notation $A = B - \overrightarrow{v}$, qui est équivalente par ailleurs à $B = A + \overrightarrow{v}$.*

On définit maintenant la multiplication d'un vecteur par un scalaire (i.e. un élément de $\mathbb{R}$).

Définition-Proposition 1.2.2. *Soit λ un réel, et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur.*
Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on pose $\lambda.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Si $\overrightarrow{v} \neq 0$, on a deux cas.
Si $\lambda \geq 0$, on note C le point de la demi-droite $[AB)$, tel que $\overline{AC}/\overline{AB} = \lambda$, et on pose $\lambda.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Si $\lambda \leq 0$, on pose $\lambda.\overrightarrow{v} = (-\lambda).(-\overrightarrow{v})$.
Ces définitions ne dépendant pas du couple (A, B) choisi pour représenter $\overrightarrow{v}$.

La multiplication par un scalaire possède elle aussi les bonnes propriétés.

Proposition 1.2.2. *Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$, et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On a :*

1. *associativité :* $\lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v}$.
2. *distributivité :* $(\lambda + \mu).\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{v}$, *et* $\lambda.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda.\overrightarrow{v} + \lambda.\overrightarrow{w}$.
3. $0.\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

On dit que $(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.3 Repère cartésien

On définit maintenant ce que sont deux vecteurs liés, et libres.

Définition-Proposition 1.3.1. *Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, on dit que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont liés si l'un est un multiple de l'autre (éventuellement nul). On dit qu'ils sont libres (ou indépendants) s'ils ne sont pas liés, ceci équivaut à dire que $(\lambda.\overrightarrow{v} + \mu.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}) \Rightarrow (\lambda = \mu = 0)$.*

On va maintenant montrer qu'une famille libre composée de deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est une "base" de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Proposition 1.3.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs indépendants de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, il existe un unique couple (a, b) de nombres réels tel que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. On dit que a et b sont les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Démonstration. On écrit $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, et un unique point C tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Les droites (AB) et (CD) ne peuvent être parallèle, sinon $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ seraient liés. Elles ont donc un unique point d'intersection E. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB}$ ($a = AE/AB$ si E est situé sur la demi droite $[AB)$, et $a = -AE/AB$ sinon). De même, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ED} = b\overrightarrow{CD}$ ($b = ED/CD$ si E est situé sur la demi droite $[DC)$, et $b = -ED/CD$ sinon). On en déduit que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. De plus a et b sont uniques, car si a' et b' vérifient $\overrightarrow{w} = a'\overrightarrow{u} + b'\overrightarrow{v}$, on en déduit $(a - a')\overrightarrow{u} + (b - b')\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, et donc $a = a'$ et $b = b'$ car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une famille libre. $\square$

On en profite pour rappeler comment on calcule les coordonnées dans une novelle base, en fonction des coordonnées dans l'ancienne.

Proposition 1.3.2. *Soient $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $B' = (\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ deux bases de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u'} + c\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{u} = b\overrightarrow{u'} + d\overrightarrow{v'}$, on note $M_{B'}(B)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (la matrice des vecteurs de B dans la base B'). Alors si un vecteur $\overrightarrow{w}$ à pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans B, et pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans B', on a la relation*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En effet, on écrit $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{u'} + y'\overrightarrow{v'}$, puis, comme $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u'} + c\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{u} = b\overrightarrow{u'} + d\overrightarrow{v'}$, l'égalité de droite donne

$$x'\overrightarrow{u'} + y'\overrightarrow{v'} = (xa + yb)\overrightarrow{u'} + (xc + yd)\overrightarrow{v'}.$$

En identifiant les coefficients dans la base B, on obtient $x' = (xa + yb)$ et $y' = (xc + yd)$, i.e. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\square$

Dès qu'on en fixe une base, on peut identifier $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ à $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.3.3. *Soit $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de $\overrightarrow{P}$, l'application $\phi_B : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ est bijective, et elle vérifie $\phi_B \begin{pmatrix} x + ax' \\ y + ay' \end{pmatrix} = \phi_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a\phi_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On dira que ϕ_B est un ismorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.*

Démonstration. Dire que ϕ_B est bijective veut dire que si $\overrightarrow{w}$ appartient à $\mathcal{P}$, il existe un unique vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, tel que $\overrightarrow{w} = \phi_B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. D'après la proposition 1.3.1, cet énoncé est vrai. Les autres propriétés sont évidentes. □

On peut maintenant définir ce qu'est un repère cartésien du plan $\mathcal{P}$.

Définition 1.3.1. *On appelle repère cartésien du plan $\mathcal{P}$, un triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où O est un point de $\mathcal{P}$, et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ forment une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.*

On peut paramétrer tout point de $\mathcal{P}$ par des coordonnées cartésiennes, dès qu'on a un repère.

Définition 1.3.2. *Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère (cartésien) de $\mathcal{P}$, à tout point P de $\mathcal{P}$, on associe l'unique couple unique de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On écrit alors $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on dit que x est l'abscisse de P, y son ordonnée, et (x, y) ses coordonnées.*

On a le lemme suivant, qui est immédiat.

Lemme 1.3.1. *Si P est un point de $\mathcal{P}$, de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, de coordonnées (a, b) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, alors $P + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$.*

Quand on change de repère, on a aussi une formule reliant les coordonnées, qui se déduit de la proposition 1.3.2.

Proposition 1.3.4. *Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ deux repères de $\mathcal{P}$, si un point P de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées (x, y) dans le premier repère, et (x', y') dans le second, que O' a pour coordonnées (t, u) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et que $M_{B'}(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on a la relation*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-t \\ y-u \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On a $\overrightarrow{O'P} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'}$, $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'} = -t\overrightarrow{i} - u\overrightarrow{j}$. Mais on a $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$, i.e. $x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} = (x-t)\overrightarrow{i} + (y-u)\overrightarrow{j}$. On a donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-t \\ y-u \end{pmatrix}$ d'après la proposition 1.3.2. □

1.4 Alignement et orthogonalité, déterminant et produit scalaire, équations de droites

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère cartésien de $\mathcal{P}$, fixé pour ce pargraphe. On écrira toujours les coordonnées d'un point relativement à ce repère, et les coordonnées d'un vecteur relativement à la base $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 1.4.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ dans la base $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}|$ ou $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, défini comme étant le réel $x_u y_v - x_v y_u$.*

On a la proposition classique :

Proposition 1.4.1. *Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés si et seulement si $|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}| = 0$.*

Démonstration. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés, alors soit l'un des deux est nul, auquel cas la proposition est évidente, sinon il existe λ non nul, tek que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$, mais alors $x_u y_v - y_u x_v = \lambda(x_u y_u - x_u y_u) = 0$. Inversement, si $x_u y_v - y_u x_v = 0$. Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors la famille est liée. Sinon on a $y_v \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} - y_u \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_v \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} - x_u \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $y_v \overrightarrow{u} - y_u \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $x_v \overrightarrow{u} - x_u \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, comme l'une de ces deux relations de dépendance linéaire est non triviale (en effet $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, donc un des réels x_u, y_u, x_v, y_v est non nul), la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée. □

Comme il est clair que trois points A, B et C sont alignés si et selmenet si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés. On en déduit immédiatement l'énoncé qui suit.

Proposition 1.4.2. *Trois points A, B et C sont alignés si et seuelemnt si $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| = 0$.*

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul, et A est un point du plan, on peut définir la droite passant par A de direction $\overrightarrow{u}$ comme étant l'ensemble des points X de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AX}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$. On définit de même la demi-droite passant par A est de direction $\overrightarrow{u}$ comme étant l'ensemble des points X de $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AX}$ soit un multiple positif de $\overrightarrow{u}$.

On a alors, dans les conditions ci-dessus :

Corollaire 1.4.1. *La droite passant par $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de direction $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ a pour équation $(y - y_A)x_u = (x - x_A)y_u$.*

Démonstration. En effet, $\overrightarrow{AX}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ si et seulement si le déterminant $|\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{u}| = 0$, soit $|\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}| = 0$, ce qui donne l'égalité recherchée. □

Exercice 1.4.1. *Montrer que la demi-droite passant par A et de direction $\overrightarrow{u}$ est donnée par l'équation $(y - y_A)x_u = (x - x_A)y_u$ et l'inégalité $(x - x_A)/x_u \geq 0$ si $x_u \neq 0$, et l'inégalité $(y - y_A)/y_u \geq 0$ si $x_u = 0$.*

On en déduit l'équation de le droite (AB).

Proposition 1.4.3. *La droite (AB) est donnée par l'équation :*

$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A).$$

Démonstration. La droite (AB) est la droite assant par A de direction $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on applique alors le corollaire 1.4.1. □

On définit maintenant le produit scalaire de deux vecteurs dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 1.4.2. *Soient $\overrightarrow{u} = x_u \overrightarrow{i} + y_u \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x_v \overrightarrow{i} + y_v \overrightarrow{j}$, alors on note $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = x_u x_v + y_u y_v$, et on dit que c'est le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

On a les propriétés suivantes du produit scalaires, qui sont évidentes.

Proposition 1.4.4. *Le produit scalaire est symétrique : on a $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$ pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.*
Il est bilinéaire : pour t dans $\mathbb{R}$, et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ dans $\overrightarrow{P}$, on a

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + t\overrightarrow{v'} > = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > + t < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v'} >$$

et
$$<\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v}>=<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>+t<\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v}>$$
Il est défini poisitif : pour tout $\overrightarrow{u}$ *dans* $\overrightarrow{P}$*, on a* $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>\geq 0$*, et* $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

Une fois donné un produit scalaire, on peut parler d'orthogonalité.

Définition 1.4.3. *On dit que deux vecteurs sont orthogonaux pour ce produit scalaire si leur produit scalaire est nul.*

On définit maintenant la distance euclidienne associée à ce produit scalaire.

Définition 1.4.4. *Soient* A *et* B *deux points de* $\mathcal{P}$*, la distance* $\overline{AB}$ *associée au produit scalaire* $<.,.>$ *est par défition* $\sqrt{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}>}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2)}$*. On dit aussi que c'est la norme du vecteur* $\overrightarrow{AB}$*, et la note parfois* $||\overrightarrow{AB}||$.

Par exemple, $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont de norme 1, et orthogonaux. On dira que c'est une base orthonormale pour ce produit scalaire.

On rapelle le théorème de Pythagore :

Proposition 1.4.5. *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux, on a* $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AC}^2$.

Démonstration. On a
$$\overline{BC}^2=<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}>$$
$$=<\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}>$$
$$=\overline{BA}^2-2<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2.$$
□

Exercice 1.4.2. *Montrer que si* $B'=(\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})$ *est une autre base de* $\overrightarrow{P}$*, que* $<.,.>'$ *est le produit scalaire associé à la base* B'*, avec* $||.||'$ *la norme correspondante, et que* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ *sont deux vecteurs, alors* $||\overrightarrow{u}||'/||\overrightarrow{v}||'=||\overrightarrow{u}||/||\overrightarrow{v}||$.

On donne maintenant l'équation de la droite passant par un point, et orthogonale à un vecteur.

Proposition 1.4.6. *Si* $A\in\mathcal{P}$*, et* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur de* $\overrightarrow{\mathcal{P}}$*, l'équation de la droite orthogonale à* $\overrightarrow{u}$ *passant par* A *est* $(x-x_A)x_u+(y-y_A)y_u=0$.

Démonstration. Il suffit décrire que X de coordonnées x et y appartient à cette droite si et seulement si $<\overrightarrow{AX},\overrightarrow{u}>=\overrightarrow{0}$. □

On définit ce qu'est un cercle attaché à cette distance.

Définition 1.4.5. *Soit* A *un point de* $\mathcal{P}$*, et* $r\geq 0$*, on note* $C(A,r)=\{X\in\mathcal{P},\overline{AX}=r\}$ *le cercle de centre* A *et de rayon* r.

On rappelle l'équation d'un cercle dans les coordonnées attachées au repère $(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Proposition 1.4.7. *L'équation de* $C(A,r)$ *est* $(x-x_A)^2+(y-y_B)^2=r^2$.

Démonstration. Il suffit d'écrire que X est dans $C(A,r)$ si et seulement si $\overline{AX}^2=r^2$. □

1.5 Barycentres, coordonnées barycentriques et convexité

Un système $(A_1, \ldots, A_n)$ de points de $\mathcal{P}$ est dit pondéré, si a chaque point A_i, on associe un réel a_i. On note $(A_i, a_i)_{i=1\ldots n}$ le système pondéré de points correspondant, on appelle l'ensemble des a_i les coefficients du système. On a le résultat suivant, qui permet de parler de barycentre.

Théorème 1.5.1. *Soit $(A_i, a_i)_{i=1\ldots n}$ une famille pondérée de points. Deux cas se présentent.*

1. *Si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, alors, le le vecteur $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i}$ ne dépend pas du point M de $\mathcal{P}$, i.e. $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{M'A_i}$ même si $M \neq M'$.*
2. *Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors il existe un unique point G de $\mathcal{P}$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = 0$.*

Démonstration. Pour le premier point, on écrit

$$\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{M'A_i} = \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{M'M} + \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^n a_i)\overrightarrow{M'M} + \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i}.$$

Pour le second point, on note $r = \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, et on fixe un point O de $\mathcal{P}$, et on pose

$$G = O + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{r}\overrightarrow{OA_i}.$$

Alors, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{OA_i} = (\sum_{i=1}^n a_i)\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{OA_i} = -r\overrightarrow{OG} + \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}$$

par définition de G. D'où l'existence de G. Si un autre point G' de $\mathcal{P}$ vérifie $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{G'A_i} = \overrightarrow{0}$, on a alors $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{G'A_i} - \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} - \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, mais $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{G'A_i} - \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^n a_i(\overrightarrow{G'A_i} - \overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i=1}^n a_i(\overrightarrow{G'G}) = r\overrightarrow{G'G}$, donc $r\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{0}$, ce qui implique $G = G'$ car $r \neq 0$. □

On peut maintenant définir le barycentre d'un système pondéré par des coefficients dont la somme est non nulle.

Définition 1.5.1. *Soit $(A_i, a_i)_{i=1\ldots n}$ un système pondéré de points, tel que $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, le point G défini dans le 2. du théorème précédent est appelé le barycentre du système pondéré $(A_i, a_i)_{i=1\ldots n}$.*

Le barycentre est aussi caractérisé par la propriété utile suivante.

Proposition 1.5.1. *Soit $(A_i, a_i)_{i=1\ldots n}$ un système pondéré avec $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, de barycentre G. Pour tout M de $\mathcal{P}$, on a la relation $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i} = (\sum_{i=1}^n a_i)\overrightarrow{MG}$. Pour $M = G$, on retrouve $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.*

Démonstration. On écrit $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = (\sum_{i=1}^n a_i)\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{0}$. □

Si on multiplie les coefficients d'un système pondéré par la même constante, cela ne change pas le barycentre.

Proposition 1.5.2. *Soit $(A_i, a_i)_{i=1\ldots n}$ un système pondéré avec $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, de barycentre G, et $\lambda \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda a_i \neq 0$, et G est aussi le barycentre de $(A_i, \lambda a_i)_{i=1\ldots n}$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire que $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n \lambda a_i\overrightarrow{GA_i} = \lambda(\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{GA_i}) = \overrightarrow{0}$, car $\lambda \neq 0$. □

Par conséquent, si on cherche le barycentre G d'un système pondéré $(A_i, a_i)_{i=1\dots n}$ avec $r = \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, on peut toujours supposer que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, car G est le barycentre de $(A_i, a_i/r)_{i=1\dots n}$, et $\sum_{i=1}^n a_i/r = r/r = 1$. C'est ce qu'on fera parfois.

Il n'est pas évident de calculer un barycentre directement, à par dans le cas de un et deux points.

Exemple 1.5.1. *Le barycentre du système (A, a), avec $a \neq 0$, est égal à A. En effet, on a bien $a\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.*

Pour deux points.

Proposition 1.5.3. *Soit G le barycentre de (A, a) et (B, b) avec $a + b \neq 0$, alors on a $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de placer G sur la droite (AB). En particulier, si $a+b = 1$, soit $b = 1-a$. On a :*
si $b < 0$, G est du côté de A où B n'est pas.
Si $0 \leq b \leq 1$, G est sur le segment $[AB]$.
Si $b > 1$, alors G est du côté de B où A n'est pas.

Cette proposition, associée au résultat suivant, permet de placer par récurrence, le barycentre de n points.

Théorème 1.5.2. *Soient k systèmes pondérés $S_1, \dots, S_m$, avec $S_j = (A_{i,j}, a_{i,j})_{i=1\dots n_j}$. On suppose que*

$$r_j = \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} \neq 0$$

pour tout j entre 1 et m. Soient $t_1, \dots, t_m$ des réels tels que

$$r = \sum_{j=1}^{m} t_j r_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} t_j a_{i,j} \neq 0.$$

Alors, pour tout j, le barycentre G_j de S_j est bien défini, le barycentre G du système $S = (A_{i,j}, t_j a_{i,j})_{i=1\dots n_j, j=1\dots m}$, et le barycentre G' du système $S' = (G_j, t_j r_j)_{j=1\dots m}$ sont aussi bien définis, et on a $G = G'$. On appelle ce phénomène la propriété d'associativité des barycentres, qui peut s'énoncer : le barycentre d'un système de barycentres est un barycentre.

Démonstration. Le point G' vérifie $\sum_{j=1}^m t_j r_j \overrightarrow{G'G_j} = \overrightarrow{0}$, mais par définition de r_j,

$$r_j\overrightarrow{G'G_j} = (\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j})\overrightarrow{G'G_j}.$$

D'après la proposition 1.5.1, on a

$$(\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j})\overrightarrow{G'G_j} = \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\overrightarrow{G'A_{i,j}}$$

car G_j est le barycentre de $(A_{i,j}, a_{i,j})_{i=1\dots n_j}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{0} = \sum_{j=1}^{m} t_j r_j \overrightarrow{G'G_j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} t_j a_{i,j}\overrightarrow{G'A_{i,j}},$$

et G' est bien le barycentre de S, i.e. $G' = G$. □

Par exemple pour calculer le barycentre de trois points, on se ramène au cas de deux points.

Exemple 1.5.2. *Pour calculer le barycentre G d'un système (A,a), (B,b), (C,c), avec $a+b+c \neq 0$, et $a+b \neq 0$, $c \neq 0$. On calcule d'abord le barycentre G_1 de (A,a), (B,b), puis G qui est le barycentre du système $(G_1, a+b)$, (C,c).*

L'introduction de la notion de barycentre permet de paramétriser le plan par des coordonnées barycentriques.

Définition 1.5.2. *Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On dit que (A,B,C) est un repère affine de $\mathcal{P}$.*

On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.5.4. *Soit (A,B,C) est un repère affine de $\mathcal{P}$, alors si $X \in \mathcal{P}$, il existe un unique triplet de réels (a,b,c) vérifiant $a+b+c=1$, tel que X soit le barycentre de (A,a) et (B,b) et (C,c). On dit que (a,b,c) sont les coordonnées barycentriques de X dans le repère affine (A,B,C).*

Démonstration. Comme A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont libres, ils forment donc une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. En particulier, il existe un unique couple (b,c) de réels, tels que $\overrightarrow{AX} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Ceci implique $\overrightarrow{AX} - b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$, puis en décomposant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{XC}$, on obtient $(1-b-c)\overrightarrow{AX} + b\overrightarrow{BX} + c\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{0}$, donc X est le barycentre de (A,a) et (B,b) et (C,c), avec $a = 1-b-c$, soit $a+b+c=1$.
De plus, si (a',b',c') est un autre triplet vérifiant $a'+b'+c'=1$ (i.e. $a' = 1-b'-c'$) tel que X soit le barycentre de (A,a') et (B,b') et (C,c'), on a $(1-b'-c')\overrightarrow{AX} + b'\overrightarrow{BX} + c'\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{0}$. Ceci se réécrit $\overrightarrow{AX} = b'(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}) + c'(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC}) = b'\overrightarrow{AB} + c'\overrightarrow{AC}$. Par unicité de la décomposition de $\overrightarrow{AX}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on obtient $b' = b$, $c' = c$ et donc $a' = (1-b'-c') = (1-b-c) = a$. $\square$

L'utilisation des barycentres s'avère efficace dans de nombreuses situations, elle permet par exemple de démontrer immédiatemment le résultat classique suivant.

Théorème 1.5.3. *Soient A, B et C trois points non alignés, alors les trois médianes du triangle ABC sont concourantes. On nomme leur point d'intersection le centre de gravité du triangle ABC.*

Démonstration. Soit G le barycentre du système $(A,1/3)$, $(B,1/3)$, $(C,1/3)$. C'est en particulier le barycentre de $(A,1/3)$ et $(J,2/3)$, pour J le barycentre de $(B,1/3)$, $(C,1/3)$, i.e. J le milieu de $[BC]$. En particulier G est sur la médiane (AJ). C'est de même le barycentre de $(B,1/3)$ et $(K,2/3)$, pour K le barycentre de $(A,1/3)$, $(C,1/3)$, i.e. K le milieu de $[AC]$. En particulier G est sur la médiane (BK). Finalement, G est le barycentre de $(C,1/3)$ et $(I,2/3)$, pour I le barycentre de $(A,1/3)$, $(B,1/3)$, i.e. I le milieu de $[AB]$. En particulier G est sur la médiane (CI). Le point G est donc l'intersection des trois médianes de ABC. $\square$

On termine par quelques mots sur la convexité.

Définition 1.5.3. *On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est convexe si et seulement si pour toute famille finie $A_1, \ldots, A_n$ de points de $\mathcal{C}$, et toute famille de réels* ***positifs*** *$a_1, \ldots, a_n$, telle que $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ le barycentre de $(A_1,a_1), \ldots, (A_n,a_n)$ appartient à C.*

Soit $S = (A_1, \ldots, A_r)$ une famille de points de $\mathcal{P}$, on dit que $A \in \mathcal{P}$ est un barycentre positif de S s'il existe $a_1, \ldots, a_r$ des réels ≥ 0 tels que $a_1 + \cdots + a_r > 0$, et que A est le barycentre de $(A_1,a_1), \ldots, (A_n,a_n)$. Ainsi, dire que $\mathcal{C}$ est convexe, revient à dire que $\mathcal{C}$ contient les barycentres positifs des familles finies de $\mathcal{C}$.

Exercice 1.5.1. *Montrer que $\mathcal{C}$ est convexe si et seulement si pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{C}$.*

Proposition 1.5.5. *Une intersection de convexes de $\mathcal{P}$ est convexe.*

Démonstration. C'est évident. □

On peut donc définir l'enveloppe convexe d'une partie de $\mathcal{P}$.

Définition-Proposition 1.5.1. *Soit $\mathcal{X}$ une partie de $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ l'intersection de tous les convexes qui contiennet $\mathcal{X}$, c'est le plus petit convexe qui contient $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ est une intersection de convexe, elle est donc convexe. Si $\mathcal{C}'$ est un convexe qui contient $\mathcal{X}$, on a $\mathcal{C}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{C}'$ car $\mathcal{C}(X)$ est l'intersection de $\mathcal{C}'$ avec tous les autres convexes qui contiennent $\mathcal{X}$.

□

On a la caractérisation suivante de l'enveloppe convexe.

Proposition 1.5.6. *$\mathcal{C}(\mathcal{X})$ est l'ensemble des barycentres positifs des familles finies de $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathcal{X})$, et que $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ est convexe, il est clair qu'un barycentre positif d'une famille finie de $\mathcal{X}$ est contenu dans $\mathcal{C}(\mathcal{X})$, donc $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{X})$. De plus, si $A_1, \ldots, A_s$ est une famille de points de $\mathcal{C}'$, alors chaque A_i est le barycentre d'un système $(X_{i,1}, x_{i,1}), \ldots, (X_{i,r_i}, x_{i,r_i})$, avec $X_{i,j} \in \mathcal{X}$, $x_{i,j} \geq 0$ et $t_i = \sum_{j=1}^{r_i} x_{i,j} > 0$. Soit A le barycentre de $(A_1, a_1), \ldots, (A_s, a_s)$, avec $a_i \geq 0$, et $\sum_{i=1}^{r} a_i > 0$, le théorème 1.5.2 implique alors qua A est le barycentre du système $(X_{i,j}, a_i x_{i,j})_{i=1,\ldots,s, j=1,\ldots,r_i}$, donc A appartient à $\mathcal{C}'$ car pour tout i et j, on a $a_i x_{i,j} \geq 0$, et qu'au moins l'un d'entre eux est > 0. Ainsi, $\mathcal{C}'$ est convexe, elle contient $\mathcal{X}$, elle contient donc $\mathcal{C}(\mathcal{X})$. Au final, on a bien $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(\mathcal{X})$ □

Exercice 1.5.2. *Montrer que l'enveloppe convexe de deux points du plan $\mathcal{P}$ est le segment qui lie ces deux points, et que l'enveloppe convexe de trois points du plan, est le triangle dont ces points sont les sommets.*

Exercice 1.5.3. *(Théorème de Carathéodory). Montrer que si $X \subset \mathcal{P}$, et que $A \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, alors il existe trois points de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$, tels que A est dans l'enveloppe de ces trois points. (Indication, par récurrence, se ramener au cas ou A est dans l'envelppe convexe de 4 points de X, le passage de 4 à 3 est plus difficile).*

1.6 Applications affines

Une application affine est une application de $\mathcal{P}$ dans lui même, qui préserve la "structure affine".

Définition 1.6.1. *Soit T une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même. On dit que T est affine si il existe $\overrightarrow{T} \in End_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{P})$ telle que pour tout X et Y de $\mathcal{P}$, on ait $\overrightarrow{T(X)T(Y)} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY})$. Dans ce cas, $\overrightarrow{T}$ est unique, et appelée la linéarisée de T.*

Si on muni $\mathcal{P}$ d'un repère affine $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, une application affine s'écrit comme suit en termes de coordonnées dans ce repère.

Proposition 1.6.1. *Soit T une application de $\mathcal{P}$ muni du repère affine $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ dans lui-même. Elle est affine si et seulement si il existe $A\in\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$, et $B\in\mathbb{R}^2$, tels que $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B$. De plus A et B sont uniques, $A=Mat_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(\overrightarrow{T})$, et $B=Mat_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(T(O))=T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.*

Démonstration. Si T est affine, on a $\overrightarrow{T(O)T(X)}=\overrightarrow{T}(\overrightarrow{OX})$ pour tout X dans $\mathcal{P}$, soit en passant aux coordonnées dans le repère, $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=Mat_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(\overrightarrow{T})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Ceci donne un sens. Inversement, une application de la forme $T:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B$ est affine, car de manière évidente, on obtient $\overrightarrow{T(X)T(Y)}=A(\overrightarrow{XY})$ ($B-B$ disparaît), et $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ets bien linéaire. Ensuite, si $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B=A'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B'$ pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$, on en déduit que $B=B'$ en prenant $x=y=0$, puis que $A=A'$ en prenant respectivement $(x=1,y=0)$ et $(x=0,y=1)$. Finalement, on a vu au début de la preuve, qu'on pouvait prendre $A==Mat_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(\overrightarrow{T})$, c'est donc le seul choix possible, et $B=T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nécessairement. $\square$

On a la caractérisation suivante des applications affines :

Proposition 1.6.2. *Soit T une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, elle est affine si et seulement si elle conserve les barycentres. Ceci veut dire que si M est le barycentre de $(A_1,a_1),\ldots,(A_s,a_s)$, alors $T(M)$ est le barycentre de $(T(A_1),a_1),\ldots,(T(A_s),a_s)$.*

Démonstration. Si T est affine, et que M est le barycentre de $(A_1,a_1),\ldots,(A_s,a_s)$, alors

$$\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{A_iM}=\overrightarrow{0}.$$

Comme $\overrightarrow{T}$ ets linéaire, on en déduit que $\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{T}(\overrightarrow{A_iM})=\overrightarrow{T}(\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{A_iM})=\overrightarrow{T}(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{T}(\overrightarrow{A_iM})=\overrightarrow{T(A_i)T(M)}$, on en déduit que $\sum_{i=1}^{s}a_i\overrightarrow{T(A_i)T(M)}=\overrightarrow{0}$, et $T(M)$ est le barycentre de $(T(A_1),a_1),\ldots,(T(A_s),a_s)$.
Inversement, si T préserve les barycentres, soient (O,A,B) trois points non alignés, de telle sorte que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OB}$ forment une base de $\overrightarrow{P}$. Soient X et Y dans $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{OX}=x_1\overrightarrow{u}+x_2\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{OY}=y_1\overrightarrow{u}+y_2\overrightarrow{v}$, i.e. X est le barycentre de $(O,1-x_1-x_2),(A,x_1),(B,x_2)$, et Y est le barycentre de $(O,1-y_1-y_2),(A,y_1),(B,y_2)$, en particulier, $\overrightarrow{XY}=(y_1-x_1)\overrightarrow{u}+(y_2-x_2)\overrightarrow{v}$. On en déduit que $T(X)$ est le barycentre de $(T(O),1-x-1-x-2),(T(A),x_1),(T(B),x_2)$, et $T(Y)$ le barycentre de $(T(O),1-y_1-y_2),(T(A),y_1),(T(B),y_2)$. On a donc $\overrightarrow{T(O)T(X)}=x_1\overrightarrow{u'}+x_2\overrightarrow{v'}$, et $\overrightarrow{T(O)T(Y)}=y_1\overrightarrow{u'}+y_2\overrightarrow{v'}$, où $\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{T(O)T(A)}$ et $\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{T(O)T(B)}$. Notons $\overrightarrow{T}$ l'unique application linéaire qui envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{u'}$, et $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{v'}$. On a alors $\overrightarrow{T(X)T(Y)}=\overrightarrow{T(O)T(Y)}-\overrightarrow{T(O)T(X)}=(y_1-x_1)\overrightarrow{u'}+(y_2-x_2)\overrightarrow{v'}$, soit $\overrightarrow{T(X)T(Y)}=(y_1-x_1)\overrightarrow{T}(\overrightarrow{u})+(y_2-x_2))\overrightarrow{T}(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{T}((y_1-x_1)\overrightarrow{u}+(y_2-x_2)\overrightarrow{v})=\overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY})$. Ainsi T est bien affine. $\square$

Une autre propriété fondamentale des applications affines, est qu'elles sont déterminées par l'image de trois points non alignés.

Théorème 1.6.1. *Soient X_1, X_2 et X_3 trois points non alignés de $\mathcal{P}$, et Y_1, Y_2 et Y_3 trois points quelconques de $\mathcal{P}$. Alors il existe une unique application affine T de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, telle que $T(X_i) = Y_i$ pour i entre 1 et 3.*

Démonstration. Le couple de vecteurs $(\overrightarrow{X_1X_2}, \overrightarrow{X_1X_3})$ est une base de $\overrightarrow{P}$, car X_1, X_2 et X_3 ne sont pas alignés. Il existe donc une unique application linéaire $\overrightarrow{T}$ de $\overrightarrow{P}$ dans lui même, telle que $\overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{Y_1Y_2}$, et $\overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X_3}) = \overrightarrow{Y_1Y_3}$. On pose alors $T(X) = Y_1 + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X})$ pour tout X dans $\mathcal{P}$. On a

$$\overrightarrow{T(X)T(X')} = \overrightarrow{Y_1T(X')} - \overrightarrow{Y_1T(X)} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X'}) - \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X}) = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X'} - \overrightarrow{X_1X}) = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{XX'}).$$

L'application T est donc affine, de linéarisée $\overrightarrow{T}$, et on a $T(X_1) = Y_1$, $T(X_2) = Y_1 + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X_2}) = Y_1 + \overrightarrow{Y_1Y_2} = Y_2$, et de même $T(X_3) = Y_3$. Ainsi, T vérifie les propriétés requises, il reste à montrer que T est unique.
Si T' est une autre application affine qui vérifie ces propriétés, on a $\overrightarrow{T'}(\overrightarrow{X_1X_2}) = \overrightarrow{Y_1Y_2}$, et $\overrightarrow{T'}(\overrightarrow{X_1X_3}) = \overrightarrow{Y_1Y_3}$ nécessairement, ainsi $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T'}$. Puis, comme $T(X_1) = T'(X_1) = Y_1$, on en déduit que $T'(X) = T'(X_1) + \overrightarrow{T'}(\overrightarrow{X_1X}) = T(X_1) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X_1X}) = T(X)$ pour tout X dans $\mathcal{P}$. CQFD. □

On termine en remarquant que la composée de deux applications affines est encore affine.

Proposition 1.6.3. *Soient T et T' deux application saffines de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, alors $T' \circ T$ est affine, et on a $\overrightarrow{T' \circ T} = \overrightarrow{T'} \circ \overrightarrow{T}$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire $\overrightarrow{T'(T(X))T'(T(Y))} = \overrightarrow{T'}(\overrightarrow{T(X)T(Y)}) = \overrightarrow{T'}(\overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY}))$. □

Chapitre 2

Nombres complexes et transformations du plan

2.1 Construction du corps des nombres complexes

2.1.1 Une construction de $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre, on identifie le plan vectoriel $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ fixé, à $\mathbb{R}^2$, par la bijection $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto O + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \in \mathcal{P}$. On identifie aussi $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ à $\mathbb{R}^2$ par la bijection $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Il faudra donc faire attention au fait qu'un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désignera parfois un point, parfois un vecteur. Par la deuxième identification, on a $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le produit scalaire associé à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est donné par $< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} >= xx' + yy'$. Si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sa norme est donné par $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points de $\mathcal{P}$, la distance qui les sépare est donnée par $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Comme $\mathbb{R}^2$ est un R-espace vectoriel, il est en particulier muni d'une addition coordonnée par coordonnée. On va le munir d'une multiplication. On commence par introduire de nouvelles notations : on désignera désormais par $\mathbf{1}$ le vecteur $\overrightarrow{e_1}$, et par ß le vecteur $\overrightarrow{e_2}$, ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b$ß avec a et b dans $\mathbb{R}$, on désignera par $\mathbf{0}$ le vecteur nul, et par z un vecteur générique de $\mathbb{R}^2$, qu'on veut pouvoir multiplier avec un autre.

Définition 2.1.1. *Soient $z = a\mathbf{1} + b$ß et $z' = a'\mathbf{1} + b'$ß deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on notera $z.z'$ le vecteur $(aa' - bb')\mathbf{1} + (ab' + ba')$ß.*

Remarque 2.1.1. *On vérifie immédiatement que ß$^2 = -\mathbf{1}$, et que $\mathbf{1}.z = z.\mathbf{1} = z$ pour tout vecteur z.*

La multiplication introduite ci-dessus, confère à $\mathbb{R}^2$ une structure de **corps**.

Théorème 2.1.1. *Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des lois + et ., alors $\mathbb{C}$ est un corps, autrement dit :*

1. $(\mathbb{C},+)$ *est un groupe abélien, i.e.* $+$ *est associative* $((z+z')+z''=z+(z'+z''))$*, commutative* $(z+z'=z'+z)$*, elle admet un élément neutre (*$\mathbf{0}$ *qui vérifie* $\mathbf{0}+z=z$ *pour tout* z*), et tout élémnt* z *de* $\mathbb{C}$ *admet un inversopposé pour* $+$ *(le vecteur* $-z$*).*
2. $(\mathbb{C},+,.)$ *est un corps : la loi . est associative* $(z.(z'.z'')=(z.z').z'')$*, commutative* $(z.z'=z'.z)$*, distributive par rapport à* $+$ $(z.(z'+z'')=z.z'+z.z'')$*, elle admet* $\mathbf{1}$ *pour élément neutre (*$\mathbf{1}.z=z.\mathbf{1}=z$*), de plus, tout élément non nul* z *de* $\mathbb{C}$ *admet un inverse* z^{-1} *pour ..*

Démonstration. Il s'agit de vérifications simples, qu'on admet. Le dernier point, concernant l'inverse d'un élément non nul pour la multiplication, est moins évident, on y reviendra sous peu. □

On rappelle que $(\mathbb{R},+,.)$ est un corps. L'application $t\in\mathbb{R}\mapsto t\mathbf{1}\in\mathbb{C}$ est injective, et préserve les lois $+$ et ., on peut donc considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-corps de $\mathbb{C}$. On cosidérera ainsi $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, et on omettra souvent $\mathbf{1}$ dans la notation $t\mathbf{1}$, lorsque $t\in\mathbb{R}$. Si $t\in\mathbb{R}$, et $z\in\mathbb{C}$, on peut considérer tz comme le vecteur z multiplié par le scalaire t, ou comme la multiplication des deux nombres complexes t et z, ces deux opérations aboutissent au même résultat. Comme tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $a\mathbf{1}+b$ß avec a et b dans $\mathbb{R}$, on écrira plus simplement $z=a+$ßb, ou encore $a+ib$ (i.e. $i=$ ß).

Définition 2.1.2. *Pour* $z=a+ib$ *avec* a *et* b *dans* $\mathbb{R}$*, on appelle* a *la partie réelle de* z*, notée* $Re(z)$*, et* b *sa partie imaginaire. Le complexe* z *est réel si et seulement si* $Im(z)=0$*. Si* $Re(z)=0$*, on dit que c'est un imaginaire pur.*

On définit maintenant ce qu'est le conjugué d'un nombre complexe.

Définition 2.1.3. *Soit* $z=a+ib$ *dans* $\mathbb{C}$*, on note* $\overline{z}=a-ib$*, et on appelle* $\overline{z}$ *le conjugué de* z*.*

On rappelle les propriétés de base de la conjugaison complexe.

Proposition 2.1.1. *Si* z *et* z' *sont deux nombres complexes, on a* $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z}'$ *et* $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z}'$*. Le complexe* z *appartient à* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\bar{z}=z$*, et à* $i\mathbb{R}$ *(i.e. est imaginaire pur) si et seulement si* $\bar{z}=-z$*.*

Démonstration. On prouve les deux dernières propriétés. Soit $z=a+ib$, avec a et b dans $\mathbb{R}$, on a : $\overline{z}=z\Leftrightarrow a+ib=a-ib\Leftrightarrow ib=-ib\Leftrightarrow 2ib=0\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
De même : $\overline{z}=-z\Leftrightarrow a+ib=-a+ib\Leftrightarrow a=-a\Leftrightarrow 2a=0\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$. □

On a alors.

Proposition 2.1.2. *Si* $z=a+ib\in\mathbb{C}$*, on a* $z\overline{z}=a^2+b^2$*. On note* $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$*, et on l'appelle le module de* z*. On a* $|zz'|=|z||z'|$ *pour* z *et* z' *dans* $\mathbb{C}$*. Le complexe* z *est nul si et seulement si* $|z|$ *est nul.*

Démonstration. On ne démontre que les derniers points : $|zz'|^2=zz'\overline{zz'}=zz'\overline{z}\overline{z'}=z\overline{z}z'\overline{z'}=|z|^2|z'|^2$, puis on passe aux racines carrées. On a $|z|=0$ si et seulement si $a^2+b^2=0$, i.e. $a=b=0$, soit $z=0$. □

On peut maintenant donner une formule explicite pour z^{-1} quand z est non nul.

Proposition 2.1.3. *Lorsque* z *est non nul,* $z^{-1}=\overline{z}/|z|^2$*.*

Démonstration. Comme z est non nul, on a $|z|^2>0$. Alors $\overline{z}/|z|^2$ est biend défini, et $z(\overline{z}/|z|^2)=|z|^2/|z|^2=1$, donc $z^{-1}=\overline{z}/|z|^2$. □

On rappelle que $z = a + ib$ peut être identifié au vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, via cette identification, on a donc $||\overrightarrow{v}|| = |z|$. De même, si z' correspond au vecteur $\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, on peut exprimer le produit scalaire $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >$ en fonction de z et z'.

Proposition 2.1.4. *Si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ correspondent aux complexes z et z', on a $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >= Re(z\overline{z'})$.*

Démonstration. On a $Re(z\overline{z'}) = Re((a+ib)(a'-ib')) = Re(aa'+bb'+i(-ab'+ba')) = aa'+bb'$ $=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >$. □

2.1.2 Bilan et propriétés les plus importantes

On a construit un **corps** $(\mathbb{C}, +, .)$, qui contient $(\mathbb{R}, +, .)$ comme sous-corps. Il vérifie les proriétés importantes suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i, qui vérifie $i^2 = -1$.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et de base $(1, i)$, i.e. tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$. On note $Re(z) = a$ la partie réelle de z, et $Im(z) = b$ la partie imaginaire de z.
3. Si $z = a + ib$ est un complexe avec a et b dans $\mathbb{R}$, on note $\overline{z} = a - ib$ le conjugué de z. La conjugaison vérifie les propriétés suivantes :
   a) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ pour z et z' dans $\mathbb{C}$.
   b) $\overline{z} = z$ si et seulement si z appartient à $\mathbb{R}$ (z est réel), et $\overline{z} = -z$ si et seulement si z appartient à $i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur).
   c) Pour $z == a + ib$ avec a et b dans $\mathbb{R}$, on a $z\overline{z} = a^2 + b^2$.
4. Si $z = a + ib$ est un complexe avec a et b dans $\mathbb{R}$, on note $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. On appelle $|z|$ le module de z, il vérifie les propriétés suivantes :

   a) $|zz'| = |z||z'|$ pour z et z' dans $\mathbb{C}$.
   b) $|z| \geq 0$, et $|z| = 0$ si et seulement si z=0.
5. Tout élément z non nul de $\mathbb{C}$ admet un inverse pour la multiplication, on a $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

On a un isomorphisme naturel de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, donné par l'application

$$\phi : a + ib \in \mathbb{C} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci veut dire que $\phi(z + \lambda z') = \phi(z) + \lambda\phi(z')$ pour tout z et z' de $\mathbb{C}$, et que ϕ est une bijection entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. On appelle alors $z = a + ib$ **l'affixe** du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

Cet isomorphisme permet aussi d'identifier $\mathbb{C}$ au plan affine $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$, muni du repère ($O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Si $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$, on appelle $z_P = a + ib$ **l'affixe** du point P.

Dans toute la suite de ce chapitre, on identifie le plan affine $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$ muni du repère affine ($\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), et on identifie $\overrightarrow{P}$ à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire $< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} >= xx' + yy'$ associé à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Via cette identification, on a les propriétés suivantes :

1. Si A et B sont dans $\mathcal{P}$, alors $|z_A - z_B| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ est la distance de A à B.
2. Si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\overrightarrow{P}$ d'affixe $z = x + iy$, et $\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\overrightarrow{P}$ d'affixe z', alors $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >= xx' + yy' = Re(z\overline{z'}) = Re(z'\overline{z})$.

Exercice 2.1.1. *Donner l'équation complexe d'un cercle de centre d'affixe z_0, et de rayon $r > 0$.*

Exercice 2.1.2. *Donner l'équation complexe de la droite passant par le point M d'affixe z_0, et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$.*

2.1.3 Décomposition polaire des nombres complexes non nuls

On fixe un repère affine $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ orthonormal sur le plan P, qui l'identifie donc à l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, muni du repère $(O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, et du produit scalaire associé à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})$.

On ne définit pas ici la notion d'angle orienté entre deux vecteurs, on admet son existence, et on rappelle simplement qu'un angle $\hat{\theta}$, correspond à la classe d'équivalence d'un nombre réel θ modulo 2π, i.e. deux réels θ et θ' définissent le même angle $\hat{\theta}$ si et seulement si $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ (ce qu'on notera $\theta' \equiv \theta[2\pi]$). Si θ est un réel qui correspond à l'angle orienté $\hat{\theta}$, on dira que θ est un représentant de $\hat{\theta}$. On rappelle qu'un angle à un unique représentant dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. On commencera par définir ce qu'est l'argument $Arg(z)$ d'un nombre complexe **non nul** z.

Définition 2.1.4. *Soit z dans $\mathbb{C} - \{0\}$, en identifiant $z = a + ib$ au point $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan $\mathbb{R}^2$, on note $Arg(z)$ l'angle orienté de $\overrightarrow{e_1}$ vers $\overrightarrow{0M}$, on l'appelle argument de z.*

Si θ est un réel, on définit le complexe $e^{i\theta}$.

Définition 2.1.5. *Soit θ un réel, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $cos(\theta) + i\sin(\theta)$, c'est un nombre complexe de module $1 = \sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)}$. Il ne dépend que de l'angle $\hat{\theta}$ associé à θ, c'est à dire que si $\theta' \equiv \theta[2\pi]$, alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.*

Remarque 2.1.2. *Comme les conditions $cos(\theta) = cos(\theta')$ et $sin(\theta) = sin(\theta')$ impliquent $\theta' \equiv \theta[2\pi]$, on en déduit que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta' \equiv \theta[2\pi]$, i.e. si et seulement si θ et θ' représentent le même angle.*

Il est immédiat qu'on a.

Proposition 2.1.5. *Soit θ un réel, alors $e^{i\theta}$ est l'affixe du point M du cercle unité centré en O, tel que $\hat{\theta}$ soit l'angle orienté entre $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{0M}$. En particulier, $Arg(e^{i\theta}) = \hat{\theta}$.*

On a alors le théorème suivant, qu'on admet.

Théorème 2.1.2. *Soit z dans $\mathbb{C} - \{0\}$, on pose $r = |z|$, et $\hat{\theta} = Arg(z)$, alors $z = re^{i\theta}$. De plus, si $|z| = r'e^{i\theta'}$, avec $r' > 0$, et θ' un réel, alors $r = r'$, et $\theta' \equiv \theta[2\pi]$.*

Remarque 2.1.3. *: en particulier, pour calculer θ, en fonction des réels a et b tels que $z = a+ib$, on résoud $cos(\theta) = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, et $sin(\theta) = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.*

Une propriété fondamentale de l'exponentielle complexe, que l'on admet, est la suivante.

Proposition 2.1.6. *Soient θ et θ' deux angles, alors $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.*

Exercice 2.1.3. *Donner la forme algébrique de $(1+i)^{105}$.*

Exercice 2.1.4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, mettre ses solutions sous forme polaire.*

On termine cette section par un rappel sur les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Proposition 2.1.7. *Soit a un nombre complexe, et $n \geq 1$, si $a = 0$, alors l'équation $z^n = 0$ n'a que 0 comme solution, si $a = |a|e^{i\theta_a}$ est non nul, avec $\theta_a \in [0, 2\pi[$, alors $z^n = a$ a exactement n solutions distinctes, dont la liste est $\{|a|^{1/n}e^{i(\theta_a+2k\pi)/n}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$, en particulier, les solutions de $z^n = 1$ (les racines n-ièmes de l'unité) sont les n-éléments distincts de l'ensemble $\{e^{2ik\pi/n}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$.*

2.2 Transformations du plan

On commence par donner la définition d'une transformation affine du plan $\mathcal{P}$.

Définition 2.2.1. *Une transformation affine T de $\mathcal{P}$ est une bijection affine de $\mathcal{P}$ dans lui même. D'après le chapitre précédent, on peut lui associer une matrice inversible A de taille 2×2, et un vecteur colonne B à deux lignes, telle que $T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.*

On dit que A est la partie linéaire de T. L'application réciproque d'une transformation affine, est elle-même une transformation affine.

Exercice 2.2.1. *Montrer que si $T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ est une transformation affine comme ci-dessus, alors $T^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + D$, avec $C = A^{-1}$, et $D = -A^{-1}B$.*

On s'intéressera aux transformations affines de $\mathcal{P}$ qui préservent le rapport entre les distances. Ces dernières sont appelées similitudes, on verra qu'elles peuvent s'écrire simplement en termes de nombres complexes, ce qui s'avèrera très pratique dans de nombreux problèmes géométriques.

Définition 2.2.2. *On appelle une similitude (affine) de $\mathcal{P}$, une transformation affine S de $\mathcal{P}$, telle qu'il existe $\lambda > 0$, tel que pour tous A et B de $\mathcal{P}$, on a $||\overrightarrow{S(A)S(B)}|| = \lambda||\overrightarrow{AB}||$. On appelle λ le rapport de S. Ceci s'écrit aussi $||\overrightarrow{S}(\overrightarrow{AB})|| = \lambda||\overrightarrow{AB}||$.*

Un classe particulière des similitudes est celle des isométries.

Définition 2.2.3. *On appelle isométrie (affine) de $\mathcal{P}$, une similitude de rapport $\lambda = 1$, en d'autres termes, c'est une transformation affine de $\mathcal{P}$ qui préserve les distances. L'égalité $||\overrightarrow{S}(\overrightarrow{AB})|| = ||\overrightarrow{AB}||$ nous dit que S est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{S}$ préserve la norme.*

On rappelle l'identité de polarisation :

Proposition 2.2.1. *Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ dans $\overrightarrow{P}$, on a la relation*

$$< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}' >= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}'||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{v}'||^2).$$

Démonstration. En effet, on a en développant : $||\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}'||^2 = ||\overrightarrow{v}||^2 + 2 < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}' > + ||\overrightarrow{v}'||^2$. □

On en déduit.

Proposition 2.2.2. *Une transformation affine T de $\mathcal{P}$ est une isométrie si et seulement is elle conserve le produit scalaire, i.e. si pour tout quadruplet (X, Y, X', Y') de points $\mathcal{P}$, on a $< \overrightarrow{T(X)T(Y)}, \overrightarrow{T(X')T(Y')} >=< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{X'Y'} >$. Ceci s'écrit encore*

$$< \overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY}), \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X'Y'}) >=< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{X'Y'} >,$$

i.e. T est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{T}$ préserve le produit scalaire.

Démonstration. Si T conserve le produit scalaire, on a alors

$$||\overrightarrow{T(X)T(Y)}||^2 =< \overrightarrow{T(X)T(Y)}, vT(X)T(Y) >=< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} >= ||\overrightarrow{XY}||^2,$$

ainsi T préserve bien la distance. Inversement, si T préserve la distance, on a d'après l'identité de polarisation :

$$< \overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY}), \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X'Y'}) >= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY}) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{X'Y'})||^2 - ||\overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY})||^2 - ||\overrightarrow{T}(\overrightarrow{X'Y'})||^2)$$

$$= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{X'Y'})||^2 - ||\overrightarrow{T}(\overrightarrow{XY})||^2 - ||\overrightarrow{T}(\overrightarrow{X'Y'})||^2) = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{X'Y'}||^2 - ||\overrightarrow{XY}||^2 - ||\overrightarrow{X'Y'}||^2)$$

$$=< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{X'Y'} >,$$

et T préserve bien le produit scalaire. □

On rappelle la formule suivante :

Proposition 2.2.3. *Si A et A' appartiennent a $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, alors pour tout vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ de $\overrightarrow{P}$, on a $< A(\overrightarrow{v}), A'(\overrightarrow{v'}) >=<^t A'A(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v'} >$, où ${}^tA'$ est la transposée de A'.*

On utilisera aussi le lemme évident suivant :

Lemme 2.2.1. *L'orthogonal de $\overrightarrow{P}$ dans $\overrightarrow{P}$ est $\{\overrightarrow{0}\}$.*

Démonstration. Si $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P}$, on a en particulier que $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à lui-même, et donc que $||\overrightarrow{v}||^2 =< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} >= 0$, d'où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. □

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1. *L'application affine $T : X \mapsto AX+B$, de $\mathcal{P}$ dans lui même, est une isométrie si et seulement si ${}^tAA = I_2$.*

Démonstration. Si ${}^tAA = I_2$, d'après la proposition 2.2.3, on a $< A(\overrightarrow{v}), A(\overrightarrow{v'}) >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >$ pour tous $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ de $\overrightarrow{P}$. On en déduit que $\overrightarrow{T} = A$ préserve le produit scalaire, et donc que T est une isométrie. Inversement, si T est une isométrie, alors $\overrightarrow{T} = A$ préserve le produit scalaire. On en déduit que $<^t AA(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v'} >=< A(\overrightarrow{v}), A(\overrightarrow{v'}) >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >$ pour tous $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ de $\overrightarrow{P}$. Ceci implique que $<^t AA(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >= 0$ pour tous $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ de $\overrightarrow{P}$, i.e. que pour tout $\overrightarrow{v}$, ${}^tAA(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P}$, donc vaut zéro. Ainsi, ${}^tAA$ est bien l'identité. □

2.2.1 Premiers exemples

Définition 2.2.4 (Translations)**.** *Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$, on note $T_{\overrightarrow{v}}$ l'application $X \mapsto X + \overrightarrow{v}$ de $\mathcal{P}$ dans lui-même. On la nomme la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.*

C'est évidemment une transformation affine de $\mathcal{P}$, de réciproque $T_{-\overrightarrow{v}}$. C'est aussi une isométrie, en effet, on a $\overrightarrow{T_{\overrightarrow{v}}} = I_d$, et donc $\overrightarrow{T_{\overrightarrow{v}}}$ préserve la norme.

Définition 2.2.5 (Rotations)**.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et X_0 dans $\mathcal{P}$, on note $R_{X_0,\bar{\theta}}$ l'application*

$$X \mapsto X_0 + R(\theta)\overrightarrow{X_0X}$$

de $\mathcal{P}$ dans lui-même, où $R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$. On la nomme la rotation de centre X_0 et d'angle $\bar{\theta}$.

C'est évidemment une transformation affine de $\mathcal{P}$, de réciproque $R_{X_0,-\bar{\theta}}$. C'est aussi une isométrie, d'après ce qui suit. On a $\overrightarrow{R_{X_0,\bar{\theta}}} = R(\theta)$, mais on vérifie que ${}^tR(\theta)R(\theta) = I_2$, et donc $R_{X_0,-\bar{\theta}}$ est une isométrie.

Définition 2.2.6 (Homotéties)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, et X_0 dans $\mathcal{P}$, on note $H_{X_0,\lambda}$ l'application*

$$X \mapsto X_0 + \lambda\overrightarrow{X_0X}$$

de $\mathcal{P}$ dans lui-même. On la nomme l'homotétie de centre X_0 et de rapport λ.

C'est évidemment une transformation affine de $\mathcal{P}$, de réciproque $H_{X_0,\lambda^{-1}}$. C'est une similitude de rapport $|\lambda|$.

2.2.2 Projections et symétries orthogonales

Soit Δ est une droite de $\mathcal{P}$. On définit d'abord la projection orthogonale associée à cette droite :

Théorème 2.2.1. *Soit Δ est une droite de $\mathcal{P}$, pour tout X dans $\mathcal{P}$, il existe un unique point $p_\Delta(X)$ de Δ, tel que la droite $\overrightarrow{Xp_\Delta(X)}$ soit orthogonal à Δ. C'est aussi l'unique point de Δ, tel que distance de X à $p_\Delta(X)$ soit le minimum des distances entre X et un point de Δ. Il est caractérisé par $\overrightarrow{p_\Delta(X)X} \perp \overrightarrow{p_\Delta(X)Y}$ pour tout point Y de Δ.*

Démonstration. Si X appartient à Δ, le résultat est évident, et $p_\Delta(X) = X$. Sinon, on considère la perpendiculaire à Δ, passant par X, elle coupe Δ en un unique point A. D'après le théorème de Pythagore, ce point vérifie bien la propriété souhaitée que $p_\Delta(X)$ minimise la distance de X à un point de Δ. La caractérisation est évidente. □

Proposition 2.2.4. *L'application $X \mapsto p_\Delta(X)$ est affine de $\mathcal{P}$ dans lui même, on la nomme la projection orthogonale sur Δ. Si $\overrightarrow{u_\Delta}$ est un des deux vecteurs directeurs de Δ, de norme 1, on a $\overrightarrow{p_\Delta(X)p_\Delta(Y)} =< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{u_\Delta} > \overrightarrow{u_\Delta}$ pour tous X et Y dans $\mathcal{P}$.*
Son image est Δ, ce n'est donc pas une transformation (elle n'est pas bijective).

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u_\Delta}$ un vecteur directeur de Δ, qui est de norme 1. Soient X et Y dans $\mathcal{P}$, comme $p_\Delta(X)$ et $p_\Delta(Y)$ sont des points de Δ, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{p_\Delta(X)p_\Delta(Y)} = \lambda\overrightarrow{u_\Delta}$. On va montrer que $\lambda =< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{u_\Delta} >$. Mais comme $< \overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_\Delta} >= 1$, on en déduit que

$$\lambda =< \lambda\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_\Delta} >=< \overrightarrow{p_\Delta(X)p_\Delta(Y)}, \overrightarrow{u_\Delta} > .$$

On décompose $\overrightarrow{p_\Delta(X)p_\Delta(Y)}$ comme la somme $\overrightarrow{p_\Delta(X)X}+\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{Yp_\Delta(Y)}$, et comme $< \overrightarrow{p_\Delta(X)X}, \overrightarrow{u_\Delta} >= 0$ et $< \overrightarrow{Yp_\Delta(Y)}, \overrightarrow{u_\Delta} >= 0$, on en déduit que $< \overrightarrow{p_\Delta(X)p_\Delta(Y)}, \overrightarrow{u_\Delta} >=< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{u_\Delta} >$, i.e. $\lambda =< \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{u_\Delta} >$.
On constate ensuite, par linéarité à gauche du produit scalaire, que l'application

$$\overrightarrow{p_\Delta} : \overrightarrow{v} \mapsto < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_\Delta} > \overrightarrow{u_\Delta}$$

est linéaire, et comme $\overrightarrow{p_\Delta(X)p_\Delta(Y)} = \overrightarrow{p_\Delta}(\overrightarrow{XY})$ pour tous X et Y dans $\mathcal{P}$, on en déduit que p_Δ est affine. □

On définit ensuite la symétrie arthogonale associée à la droite Δ.

Définition 2.2.7. *Soit Δ est une droite de $\mathcal{P}$, pour tout X dans $\mathcal{P}$, on note $s_\Delta(X)$ le point $p_\Delta(X) + \overrightarrow{Xp_\Delta(X)}$. On appelle l'application $X \mapsto s_\Delta(X)$ la symétrie orthogonale associée Δ.*

On rappelle le lemme de géométrie euclidienne suivant.

Lemme 2.2.2. *Si $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P} - \{0\}$, alors $\{v\}^\perp = \{\overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{P}, < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'} >= 0\}$ est une droite vectorielle (i.e. un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{P}$ de dimension 1). De plus $\overrightarrow{P} = Vect(\overrightarrow{v}) \oplus \{v\}^\perp$.*

Démonstration. En effet, le vecteur v est orthogonal en particulier à lui même, donc $||v||^2 =< v, v >= 0$, et donc v est nul. □

Proposition 2.2.5. *La symétrie s_Δ est une isométrie affine du plan, de réciproque s_Δ.*

Démonstration. On note $\overrightarrow{s_\Delta}$ l'application linéaire

$$\overrightarrow{s_\Delta} : \overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{v} - 2 < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_\Delta} > \overrightarrow{u_\Delta}$$

de $\overrightarrow{P}$ dans lui-même (on remarque que $\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ quand $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_\Delta}$, et que $\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ quand $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_\Delta}$). On vérifie que $\overrightarrow{s_\Delta(X)s_\Delta(X)} = \overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{XY})$ pour tout couple de points (X, Y) de $\mathcal{P}$, et s_Δ est donc affine.
Ensuite, soit $\overrightarrow{v}$ dans $\overrightarrow{P}$, on le décompose en $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, avec $\overrightarrow{v_1} \in Vect(\overrightarrow{u_\Delta})$, et $\overrightarrow{v_2} \in \overrightarrow{u_\Delta}^\perp$. On a alors $\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$, et donc $||\overrightarrow{s_\Delta}(\overrightarrow{v})||^2 = ||\overrightarrow{v_1}||^2 + || - \overrightarrow{v_2}||^2 = ||\overrightarrow{v_1}||^2 + ||\overrightarrow{v_2}||^2 = ||\overrightarrow{v}||^2$ d'après Pythagore, donc s_Δ est une isométrie.
Enfin, pour X dans $\mathcal{P}$, on obtient $s_\Delta(s_\Delta(X)) = s_\Delta(p_\Delta(X) + \overrightarrow{Xp_\Delta(X)})$. Notons $Y = s_\Delta(X) = p_\Delta(X) + \overrightarrow{Xp_\Delta(X)}$, alors $\overrightarrow{p_\Delta(X)Y} = \overrightarrow{Xp_\Delta(X)}$ est orthogonal à Δ, ceci implique nécessairement que $p_\Delta(Y) = p_\Delta(X)$. On en déduit $s_\Delta(Y) = p_\Delta(Y) + \overrightarrow{Yp_\Delta(Y)} = p_\Delta(X) - \overrightarrow{Xp_\Delta(X)} = p_\Delta(X) + \overrightarrow{p_\Delta(X)X} = X$. On en déduit $s_\Delta \circ s_\Delta$, et donc s_Δ est sa propre réciproque.

□

2.2.3 Classification des isométries et similitudes du plan

On va décrire maintenant les isométries du plan, à partir des isométries introduites précédemment. On commence par une série de lemmes. Le premier d'entre eux, fondamental, rappelle ce que peut être la composée de deux symétries orthogonales.

Lemme 2.2.3. *Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites de $\mathcal{P}$.*
Si Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, soit X_1 dans Δ_1, et $X_2 = p_{\Delta_2}(X_1)$ dans Δ_2, alors le vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{X_1X_2}$ ne dépend pas de X_1 dans Δ_1, et on a

$$s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = T_{2\overrightarrow{v}}.$$

Si Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en X_0, soit θ l'angle orienté positivement de Δ_1 à Δ_2, alors

$$s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = R_{X_0,2\theta}.$$

Démonstration. On l'admet. Pour le second cas (le premier est similaire), l'idée consiste à regarder l'image par $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ de X_0, de X_1 dans Δ_1 différent de X_0, et de X_2 dans Δ_2 différent de X_0. On constate, par exemple en faisant un dessin, et en utilisant des triangles isocèles appropriés, que $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}(X_i) = R_{X_0,2\theta}(X_i)$ pour i entre 0 et 2. On en déduit que les deux applications sont les mêmes, puisque X_0, X_1 et X_2 ne sont pas alignés. $\square$

Lemme 2.2.4. *Si une isométrie affine non triviale de $\mathcal{P}$ admet (au moins) deux points fixes X_1 et X_2, c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta = (X_1X_2)$.*

Démonstration. On note $\Delta = (X_1X_2)$, et I l'isométrie en question. Tout d'abord, I fixe Δ : comme I est affine, elle préserve les barycentres, en particulier le barcyentre de $(X_1, a_1), (X_2, a_2)$ $(a_1 + a_2 \neq 0)$est envoyé sur le barycentre de $(I(X_1), a_1), (I(X_2), a_2)$, c'est à dire sur lui-même, puisque $I(X_i) = X_i$ pour i dans $\{1, 2\}$, elle fixe donc les barycentres de X_1 et X_2, i.e. la droite Δ. Comme I n'est pas l'identité, il existe X_3 hors de Δ non fixé par I, on note $Y_3 = I(X_3)$. On a alors $< \overrightarrow{I(p_D(X_3))I(X_3)}, \overrightarrow{I(p_D(X_3))I(Y)} >=< \overrightarrow{p_D(X_3)X_3}, \overrightarrow{p_D(X_3)Y} >$ pour tout point Y de $\mathcal{P}$ car I est une isométrie. En particulier, $< \overrightarrow{I(p_D(X_3))I(X_3)}, \overrightarrow{I(p_D(X_3))I(Y)} >= 0$ lorsque Y appartient à Δ, mais comme dans ce cas, on a $I(Y) = Y$, et $I((p_D(X_3)) = p_D(X_3)$ puisque I fixe Δ, on en déduit que $< \overrightarrow{p_D(X_3)I(X_3)}, \overrightarrow{p_D(X_3)Y} >= 0$ pour tout Y dans Δ. Par la caractérisation des projections orthogonales (théorème 2.2.1), on en déduit que $p_D(I(X_3)) = p_D(X_3)$, et que $I(X_3)$ est sur la droite orthogonale à Δ passant par X_3. Comme il est à égale distance de $p_D(X_3) = I(p_D(X_3))$ que X_3, mais qu'il ne lui est pas égal, c'est le symétrique orthogonal de X_3 par rapport à Δ. Mais alors, I et s_Δ coïncident en les trois points non alignés X_1, X_2, et X_3, elles sont donc égales, car ce sont des applications affines. $\square$

Lemme 2.2.5. *Une isométrie du plan qui admet un unique point fixe est une rotation.*

Démonstration. Soit I une telle isométrie, et X_0 son point fixe. Soit $X_1 \neq X_0$ dans $\mathcal{P}$, alors $I(X_1)$ est différent de X_1, et à égale distance de X_0 que X_1. Soit alors $R = R_{X_0,\theta}$ l'unique rotation de centre X_0 qui envoie X_1 sur $I(X_1)$. L'isométrie $J = R^{-1} \circ I$ fixe au moins deux points : X_0 et X_1. Si ça n'était pas l'identité, ça serait s_Δ, où $\Delta = (X_0X_1)$. Mais r peut toujours s'écrire $s'_\Delta \circ s_\Delta$ pour Δ' la droite passant par X_0, faisant un angle $\theta/2$ avec Δ. On en déduirait que $r^{-1} \circ I = s_\Delta{}^{-1} \circ s_{\Delta'}^{-1} \circ I = s_\Delta$, soit $I = s_{\Delta'}$ car $s_\Delta^2 = Id$, ce qui est absurde car on a supposé que I n'avait qu'un seul point fixe. Donc J est l'identité, et donc $I = R$. $\square$

Théorème 2.2.2. *Une isométrie du plan est soit une translation, soit la composée d'une translation avec une rotation non triviale, soit la composée d'une translation avec une symétrie non triviale. Ces trois classes sont distinctes.*

Démonstration. Soit I une isométrie du plan. Soit X_0 dans $\mathcal{P}$, et $\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{X_0 I(X_0)}$, alors $T_{-\overrightarrow{v}} \circ I$ fixe X_0. D'après les lemmes précédents, c'est donc soit l'identité, soit une rotation non triviale, soit une symétrie. La première partie du théorème en découle. Il reste à voir que ces trois classes sont distinctes. Mais Si $I = T_{\overrightarrow{v}}$, on a $\overrightarrow{I} = Id$, si $I = T_{\overrightarrow{v}} \circ R_{X_0,\theta}$ avec θ non congru à $0[2\pi]$, on a $\overrightarrow{I} = R(\theta)$, et si $I = T_{\overrightarrow{v}} \circ s_\Delta$, on a $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{s_\Delta}$. Il est clair que $R(\theta) \neq Id$ car θ est non congru à $0[2\pi]$, donc les deux premières classes sont distinctes. De plus, si $B = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$, où $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur directeur de Δ, et $\overrightarrow{u_2}$ est une base de $\overrightarrow{u_1}^\perp$, alors

$$Mat_B(\overrightarrow{s_\Delta}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

son déterminant vaut donc -1, ceci implique que la troisième classe est différente des deux premières, dans les quelles les linéarisées ont pour déterminant 1. ☐

Le résultat suivant permet de classifier les similitudes du plan.

Proposition 2.2.6. *Soit X_0 dans $\mathcal{P}$. Si S est une similitude de rapport $\lambda > 0$, alors S s'écrit comme la composée $H_{X_0,\lambda} \circ I$ pour I une isométrie de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Le rapport de $H^{-1}_{X_0,\lambda} \circ S$ est $\lambda^{-1}\lambda = 1$, c'est donc une isométrie I. ☐

Définition 2.2.8. *Soit S une similitude, on dit qu'elle es directe si $det(\overrightarrow{S}) > 0$, et indirecte si $det(\overrightarrow{S}) < 0$.*

Exercice 2.2.2. *Montrer qu'une isométrie est directe si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'une rotation (éventuellement triviale), et indirecte si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale.*

2.3 Ecriture matricielle et complexe des similitude

On commence par faire la remarque suivante.

Proposition 2.3.1. *Soit s une symétrie orthogonale. Alors l'application $L_s : S \mapsto S \circ s$ établit une bijection entre l'ensemble des similitudes directes et indirectes.*
Sa restriction à l'ensemble des isométries directes établit aussi une bijection entre l'ensemble des isométries directes et indirectes.

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que si S est une similitude directe, alors $S \circ s$ est une similitude indirecte car $det(\overrightarrow{S \circ s}) = det(\overrightarrow{S} \circ \overrightarrow{s}) = det(\overrightarrow{S})det(\overrightarrow{s}) = -det(\overrightarrow{S})$ car $det(\overrightarrow{s}) = -1$. Ainsi, L_s va bien de l'ensemble des similitudes directes dans celui des similitudes indirecetes. On vérifie que l'application $L'_s : S \mapsto S \circ s$ envoie l'ensemble des similitudes indirectes dans celui des similitudes directes de la même manière, et que c'est la réciproque de L_s car $s \circ s = Id$. On démontre de manière similaire l'énoncé sur la retriction de L_s aux isométries directes. ☐

2.3.1 Ecriture matricielle

On donne maintenant la forme des matrices des linéarisées des isométries directes.

Proposition 2.3.2. *Soit $I : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ une isométrie directe, alors il existe un unique angle θ, tel que $A = R(\theta)$.*

Démonstration. Soit I une ismétrie, elle est soit de la forme $T_v \circ R_{X_0,\theta}$, pour θ un angle éventuellement congru à $0[2\pi]$, soit de la forme $T_v \circ s_\Delta$. Dans le premier cas, on a $\overrightarrow{I} = R(\theta)$, et $det(\overrightarrow{I}) = 1$, alors que dans le second, on a $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{s_\Delta}$, et $det(\overrightarrow{I}) = -1$. Ainsi, si I est directe, on est dans le premier cas, et le résultat en découle. $\square$

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.1. *Soit* $I : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ *une isométrie indirecte, alors il existe un unique angle* θ*, tel que* $A = R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit s la symétrie orthogonale de $\mathcal{P}$ associée à l'axe des abscisses, on a $Mat(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})(\overrightarrow{s}) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. D'après la proposition 2.3.1, si I est une isométrie indirecte, elle es de la forme $I' \circ s$, pour I' une isométrie directe unique. En passant aux linéarisées, on obtient que $\overrightarrow{I} = R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ pour un unique angle θ. $\square$

On en déduit le résultat suivant pour les similitudes.

Proposition 2.3.3. *Soit* $S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ *une similitude directede* $\mathcal{P}$ *de rapport* $\lambda > 0$*, alors* $A = \lambda R(\theta)$.
Soit $S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ *une similitude indirectede* $\mathcal{P}$ *de rapport* $\lambda > 0$*, alors*

$$A = \lambda R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Si S est une similitude de rapport λ, alors $\lambda^{-1}\overrightarrow{S}$ est la linéarisée d'une isométrie d'après la proposition 2.2.6. Le résultat découle alors de la proposition 2.3.2 et de son corollaire. $\square$

On appelle θ **l'angle de la similitude**. Il est possible, en utilisant le lemme suivant, de donner une autre écriture des matrices de similitudes.

Lemme 2.3.1. *Soit* (α, β) *un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^2$*, il existe un unique* $\lambda > 0$*, et un unique angle* θ*, tels que* $\alpha = \lambda cos(\theta)$ *et* $\beta = \lambda sin(\theta)$.

Démonstration. On écrit la décomposition polaire du nombre complexe **non nul** $a + ib$. $\square$

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 2.3.4. *Soit* $S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *une similitude de* $\mathcal{P}$*. Si* S *est directe, il existe un unique vecteur non nul* $(\alpha, \bar{)}$ *tel que* $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.
Si S *est indirecte, il existe un unique vecteur non nul* $(\alpha, \bar{)}$ *tel que* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

2.3.2 Ecriture complexe

Les similitudes de $\mathcal{P}$ ont pour propriété le fait d'être agréablement décrites via les nombres complexes. On identifie $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$ comme expliqué en début de chapitre.

Théorème 2.3.1. *Soit S^+ une similitude directe de $\mathbb{C}$, alors il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $S^+(z) = az + b$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.*
Soit S^- une similitude directe de $\mathbb{C}$, alors il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $S^-(z) = a\overline{z} + b$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. On a vu au paragraphe précédent que S^+, vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, et qu'il existe un unique vecteur (α, β) non nul tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Soit x_B et y_B les coordonnées de B. On pose $a = \alpha + i\beta$, et $b = x_B + iy_B$. Un calcul simple montre que l'affixe de $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ est $a(x + iy) + b$. Ainsi, $S^+(z) = az + b$.
Soit s l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'affixe de $s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $x - iy$, i.e. $s(z) = \overline{z}$. Comme on a vu que si on écrivait $S^- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, alors il existait un unique vecteur (α, β) non nul tel que $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} s$, on en déduit que si on pose à nouveau $a = \alpha + i\beta$, et $b = x_B + iy_B$, on a bien $S^-(z) = a\overline{z} + b$. □

Dans tous les cas, le rapport de la similitude vaut $|a|$, et son angle vaut $Arg(a)$. Pour les similitudes directes, on va de plus définir le centre de la similitude directe.

Proposition 2.3.5. *Une similitude directe qui n'est pas une translation, possède un unique point fixe. On appelle ce point fixe le centre de la similitude. Si $S(z) = az + b$ pour tout z dans $\mathbb{C}$, le centre de S est $\omega = b/(1 - a)$.*

Démonstration. Soit S une similitude directe, on l'écrit $S : z \mapsto az + b$. Dire que S n'est pas une translation équivaut à dire $a \neq 1$. Dans ce cas, l'équation $az + b = z$ a pour unique solution $z = b/(1 - a)$. □

On peut alors écrire de S en fonction de son rapport, son angle et son centre.

Proposition 2.3.6. *Soit S une similitude de rapport $\lambda > 0$, d'angle θ, et de centre ω, alors $S(z) = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$*

Démonstration. On écrit $S(z) = az+b$, de telle sorte que $\omega = b/(1-a)$. On a alors $a(z-\omega)+\omega = az+\omega(1-a) = az+b$. Donc on a $S(z) = \omega+a(z-\omega)$, ce qui donne le résultat puisque $\theta = Arg(a)$ et $\lambda = |a|$. □