UNIVERSITÉ DE POITIERS, L2 Math, 4L09

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Nadir Matringe

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011-2012

Chapitre 0

Rappels sur le corps $\mathbb{R}$

Ce chapitre est consacré au corps des réels $\mathbb{R}$ et à ses propriétés topologiques, bien que le mot topologie n'y sera pas utilisé. On commencera par donner construction du corps $\mathbb{R}$, en définissant un réel par son développement en base 10 (une idée formalisée par le mathématicien néerlandais Simon Stevin, à la fin du 16-ème siècle).
On prouvera ensuite un nombre minimal de propriétés qui vont caractériser le corps $\mathbb{R}$.
Dès cet instant, on pourra oublier si on veut la construction de $\mathbb{R}$, et se rappeler simplement que c'est l'unique corps (à unique isomorphisme près) caractérisé par ces propriétés.
On utilisera ensuite ces dernières pour établir toutes les autres propriétés de $\mathbb{R}$ dont on aura besoin.

0.1 Construction du corps $\mathbb{R}$

On suppose qu'on sait construire l'anneau totalement ordonné $\mathbb{Z}$.
Il existe de nombreuses manières de construire le corps des réels. On en propose une, qui n'est ni la plus courte, ni la plus élégante, ni la meilleure théoriquement (ça n'est pas celle qui possède la généralisation la plus importante), mais qui a l'avantage d'être en adéquation avec la manière dont on enseigne ce qu'est un nombre réel depuis l'école primaire.
Un nombre réel est en général perçu comme un développement décimal, voici quelques exemples :

1. $1 = 1,000000... = 0,999999.....$
2. $3,56 = 3,559999999....$
3. $1/3 = 0,33333333.....$
4. $\sqrt{2} = 1,414213.......$
5. $\pi = 3,141592.....$

Pour les nombres négatifs, on adoptera la convention suivante :
on écrira $-5,48659...$ pour $-5+0,48659....$ et non pour l'opposé de $-(5,48659...)$ de $5,48659....$

Les deux premiers exemples montrent qu'un nombre réel peut avoir deux développements décimaux, sur les exemples, on constate que si c'est le cas, l'un est fini, et l'autre se termine par une suite de 9. En fait, une fois qu'on a bien défini $\mathbb{R}$, il est facile de constater que les seuls nombres ayant deux développements décimaux, sont ceux qui ont un développement fini $a_0, a_1 \dots a_n$ avec $a_n \geq 1$, l'autre développement étant alors $b_0, b_1 \dots b_n 9999999....$, ou $a_i = b_i$ pour $i \leq n-1$, et $b_n = a_n - 1$.

On va donc poser $\mathbb{R}$ comme étant l'ensemble des suites $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, avec $a(i) \in \{0, \ldots, 9\}$, pour $i \geq 1$, et a ne stationne pas en 9. Formellement, en notant $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, on pose :

Définition 0.1.1. *Définition de l'ensemble* $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}), a(i) \in \{0, \ldots, 9\} \textit{ si } i \geq 1, \textit{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, a(m) < 9\}.$$

On pensera donc qu'une telle suite a correspond au réel $a(0), a(1).....a(n)......$

On va introduire des lois $+$ et $*$ sur cet ensemble, qui correspondent aux opérations qu'on a l'habitude de faire sur les réels. Ceci se fera en de nombreuses étapes. Tout d'abord, on va formaliser la multiplication et l'addition des réels dont le développement décimal est fini, et qu'on a l'habitude de pratiquer au quotidien.
Pour additionner des nombres dont le développement est fini, on pose :

$$\begin{array}{rl} & 5{,}777891 \\ + & 3{,}555 \\ \hline & 9{,}332891 \end{array}$$ en faisant des retenues successives.

Avec notre convention pour les nombres négatifs, on a aussi $\begin{array}{rl} & 5{,}777891 \\ + & \text{-}3{,}555 \\ \hline & 3{,}332891 \end{array}$.

Remarquons qu'un réel a qui admet comme développement $a_0, a_1 \ldots a_n$ s'écrit comme la somme des $\underbrace{0}_{position\ 0}, 0 \ldots 0 \underbrace{a_i}_{position\ i}$. Le point clef de la retenue est le suivant :

Si x et y sont dans $\{0, \ldots, 9\}$, et que la division euclidienne de $x + y$ par 10 s'écrit $x + y = 10q + r$, avec $q = 0$ ou $q = 1$, et $r \in \{0, \ldots, 9\}$ qui vaut $x + y$ si $q = 0$, et $x + y - 10$ si $q = 1$, on a

$$\underbrace{0}_{position\ 0}, 0 \ldots 0 \underbrace{x}_{position\ i} + \underbrace{0}_{position\ 0}, 0 \ldots 0 \underbrace{y}_{position\ i} = \underbrace{0}_{position\ 0}, 0 \ldots 0q \underbrace{r}_{position\ i}$$

pour $i \geq 1$.

Formalisons cette première observation. On commence par définir proprement l'ensemble des réels dont le développement est fini.

Définition 0.1.2. *Définition de l'ensemble* $\mathbb{Z}^{(10)}$.
On note $\mathbb{Z}^{(10)}$, *l'ensemble des suites finies qui appartiennent à* $\mathbb{R}$, *c'est à dire les éléments* a *de* $\mathbb{R}$, *tels quil existe* n *dans* $\mathbb{N}$, *qui vérifie* $a(k) = 0$ *dès que* $k \geq n$.

Si $\mathbf{u}$ appartient à $\mathbb{Z}^{(10)}$, on note $\mathbf{n_u}$ le plus petit entier n tel que $u(k)$ soit nul pour $k > n$, en particulier $u = 0 \Leftrightarrow n_u = -1$.
On note $\mathbf{\hat{u}^n}$ la suite de $\mathbb{Z}^{(10)}$, obtenue à partir de u en remplaçant $u(n)$ par 0.
Pour k dans $\mathbb{N}$, on note $\delta_\mathbf{k}$ la suite $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{position\ k}, 0, \ldots)$ de $\mathbb{Z}^{(10)}$.
Si $\mathbf{x}$ appartient à $\mathbb{Z}$, et $\mathbf{y}$ est dans $\{0, \ldots, 9\}$, on note $\mathbf{x}\delta_\mathbf{0}$ la suite $(\mathbf{x}, 0, 0, \ldots)$, et $\mathbf{y}\delta_\mathbf{k}$ la suite $(0, \ldots, 0, \underbrace{\mathbf{y}}_{position\ k}, 0, \ldots)$ pour $k \geq 1$, on appelle temporairement ces réels des réels "élémentaires". On remarque que $y\delta_k$ est simplement une notation pour l'instant, on constatera juste après avoir défini l'addition sur $\mathbb{Z}^{(10)}$, que $y\delta_k$ est bien égal à y fois la somme de δ_k, quand

y est positif, et $|y|$ fois celle de son oppsé, quand y est négatif.

Si x et y sont dans $\{0, \ldots, 9\}$, et que $x+y = 10q+r$, avec q dans $\{0, 1\}$, et r dans $\{0, \ldots, 9\}$, on devra, d'après la discussion en début de paragraphe, nécessairement poser $x\delta_i + y\delta_i = q\delta_{i-1} + r\delta_i$ quand $i \geq 1$.

Plus généralement, que fait on quand on aditionne des réels a et b dont le développement est fini ? On écrit a et b comme étants

$$a_0, a_1 \ldots a_n a_{n+1},$$

et

$$b_0, b_1 \ldots b_n b_{n+1},$$

pour n assez grand (et les deniers a_i et b_i éventuellement nuls), et on procède récursivement :

$$a = a_0, a_1 \ldots a_n + 0, 0 \ldots 0a_{n+1},$$

$$b = b_0, b_1 \ldots b_n + 0, 0 \ldots 0b_{n+1},$$

mais $a + b$ vaut

$$(a_0, a_1 \ldots a_n + b_0, b_1 \ldots b_n) + (0, 0 \ldots 0a_{n+1} + 0, 0 \ldots 0b_{n+1}).$$

et

$$s' = a_0, a_1 \ldots a_n + b_0, b_1 \ldots b_n$$

est bien définie par récurrence. De plus on a déjà vu

$$0, 0 \ldots 0a_{n+1} + 0, 0 \ldots 0b_{n+1} = 0, 0 \ldots qr = 0, 0 \ldots q + 0, 0 \ldots 0r$$

ou $a_{n+1} + b_{n+1} = 10q + r$.
On pose $s = s' + 0, 0 \ldots 0q$ qui est défini par récurrence, et finalement, on obtient

$$a + b = s_0, s_1 \ldots s_n r \ldots.$$

Formellement, on définit comme suit l'addition sur $\mathbb{Z}^{(10)}$.

Définition 0.1.3. *addition des réels à développement décimal fini*
Soient a et b dans $\mathbb{Z}^{10)}$, on définit $a + b$ par récurrence sur $n_{a,b} = max(n_a, n_b)$.
Si $n_{a,b} = -1$, on pose $a + b = \mathbf{0}$.
Si $n_{a,b} = 0$, on pose $a + b = (a(0) + b(0), 0, 0, \ldots)$.
Si on a défini $a + b$ pour $n_{a,b} \leq n$, avec $n \geq 1$, et que $n_{a,b} = n + 1$, on pose :
$a + b = (s(0), \ldots, s(n), r, 0, 0, \ldots)$, où $s = (\hat{a}^{n+1} + \hat{b}^{n+1}) + q\delta_n$, et $a(n+1) + b(n+1)$ a pour division euclidienne $10q + r$.

On vérifie ensuite les propriétés escomptées de l'addition.

Proposition 0.1.1. *La loi $+$ sur $\mathbb{Z}^{(10)}$, est associative, commutative. Elle possède pour élément neutre la suite nulle, et si $a \in \mathbb{Z}^{(10)}$, il existe une (unique) suite $-a$ dans $\mathbb{Z}^{(10)}$, telle que $a + (-a)$ soit la suite nulle.*

Démonstration.
Commutativité : Soient a et b dans $\mathbb{Z}^{(10)}$, on montre $a+b=b+a$ par récurrence sur $n_{a,b}$.
Si $n_{a,b} \leq 0$, c'est trivial.
Sinon on a en notant $a(n+1)+b(n+1)=10q+r$:

$$a+b=(((\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1})+q\delta_n)(0),\dots,((\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1})+q\delta_n)(n),r,0,0,\dots),$$

mais $\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1}=\hat{b}^{n+1}+\hat{a}^{n+1}$ par récurrence, et donc

$$a+b=(((\hat{b}^{n+1}+\hat{a}^{n+1})+q\delta_n)(0),\dots,((\hat{b}^{n+1}+\hat{a}^{n+1})+q\delta_n)(n),r,0,0,\dots)=b+a$$

Associativité : Soient a , b et c dans $\mathbb{Z}^{(10)}$, on démontre $(a+b)+c=a+(b+c)$ par récurrence sur l'entier $n_{a,b,c}=max(n_a,n_b,n_c)$. Si $n_{a,b,c} \leq 0$, c'est évident.
On suppose donc la propriété vérifiée pour $n_{a,b,c} \leq m$, avec $m \leq 0$, soient a, b et c dans $\mathbb{Z}^{(10)}$ tels que $n_{a,b,c}=m+1$.
On écrit les divisions euclidiennes suivantes :

$$a(n+1)+b(n+1)=10q+r,\ b(n+1)+c(n+1)=10q'+r',\ \text{et}\ a(n+1)+b(n+1)+c(n+1)=10q''+r'',$$

de sorte qu'on a

$$r+c(n+1)=10q_1+r'',\ a(n+1)+r'=10q_2+r'',\ \text{et}\ q''=q+q_1=q'+q_2.$$

Mais alors :

$$(a+b)=((\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1}+q\delta_n)(0),\dots,(\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1}+q\delta_n)(n),r,0,0,\dots),$$

où on a pas mis de parenthèses dans l'expression $\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1}+q\delta_n$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi :

$$(a+b)+c=(s(0),\dots,s(n),r'',0,0,\dots),$$

où $s(i)=(\hat{a}^{n+1}+\hat{b}^{n+1}+\hat{c}^{n+1}+(q+q_1)\delta_n)(i)$, le non-parenthèsage découlant de l'hypothèse de réccurence, et l'ordre des termes de la commutativité de $+$.
Mais comme $q+q_1=q''=q'+q_2$, à nouveau par hypothèse de récurrence, cette dernière quantité vaut $([\hat{a}^{n+1}+((\hat{b}^{n+1}+\hat{c}^{n+1})+q'\delta_n)]+q_2\delta_n)(i)$, et comme r'' est aussi le reste de la division de $a(n+1)+r'$ par 10, on en déduit

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Neutre et opposé : il est évident que la suite nulle $\mathbf{0}$ est élément neutre de $+$.
Si $a \in \mathbb{Z}^{(10)}$, on vérifie alors que la suite a est égale à la somme $\sum_{i=0}^{n_a} a(i)\delta_i$, notation qui est bien définie car on sait déjà que $+$ est associative et commutative.
Mais alors, si on sait que $a(i)\delta_i$ admet un opposé $-[a(i)\delta_i]$, par associativité et commutativité de $+$, l'opposé de a sera $\sum_{i=0}^{n_a} -[a(i)\delta_i]$. On pose alors $-[a(0)\delta_0]=(-a(0),0,\dots)$, et on a bien $-[a(0)\delta_0]+a(0)\delta_0=\mathbf{0}$.
Pour construire un opposé à $a(i)\delta_i$, pour $i \geq 1$, qu'on peut d'ailleurs supposer non nul, on rappelle que $a(i)\delta_i$ correspond à $0,0\dots0a_i$ (avec a_i dans $\{1,\dots,9\}$), dont l'opposé est $-1+0,9\dots9(10-a_i)$.
Pour formaliser cela, on pose donc

$$-[a(i)\delta_i]=-\delta_0+(0,9,\dots,9,10-a_i,0,\dots).$$

une récurrence immédiate montre alors que $-[a(i)\delta_i]+a(i)\delta_i=\mathbf{0}$.
L'associativité de $+$ implique que le neutre et l'opposé sont uniques. □

Le lemme suivant est alors clair :

Lemme 0.1.1. *Tout élément* $a = (a(0), \dots, a(n_a), 0, \dots)$ *de* $\mathbb{Z}^{(10)}$ *est égal à* $\sum_{i=0}^{n_a} a(i)\delta_i$. *Quand* $a(i)$ *est positif, alors* $a(i)\delta_i$ *vaut* $\underbrace{\delta_i + \cdots + \delta_i}_{a(i)\ fois}$, *et sinon* $a(i)\delta_i$ *vaut* $\underbrace{(-\delta_i) + \cdots + (-\delta_i)}_{-a(i)\ fois}$.

Il reste à définir la multiplication. On rapelle que dans notre compréhension intuitive des réels, on a

$$0,\underbrace{0}_{1}\dots 0\underbrace{1}_{n} \times 0,\underbrace{0}_{1}\dots 0\underbrace{1}_{m} = 0,\underbrace{0}_{1}\dots 0\underbrace{1}_{n+m}.$$

Plus généralement, si x et y sont deux éléments de $\{0, \dots, 9\}$, et que la division euclidienne de xy par 10 s'écrit $xy = 10q + r$, avec r (mais aussi q, nécessairement) dans $\{0, \dots, 9\}$, on a

$$0,\underbrace{0}_{1}\dots 0\underbrace{x}_{n} \times 0,\underbrace{0}_{1}\dots 0\underbrace{y}_{m} = 0,\underbrace{0}_{1}\dots 0q\underbrace{r}_{n+m}.$$

Cette dernière constatation, et le lemme précédent, nous forcent à définir $*$ de la manière suivante.

Définition 0.1.4. *Si* x *et* y *sont dans* $\mathbb{Z}$, *on pose* $x\delta_0 * y\delta_0 = xy.\delta_0$.
Si x *et* y *sont dans* $\{0, \dots, 9\}$, *que* $xy = 10q + r$, *avec* q *et* r *dans* $\{0, \dots, 9\}$, *et que* n *ou* m *est plus grand que* 1, *on pose* $(x.\delta_n) * (y.\delta_m) = q.\delta_{n+m-1} + r.\delta_{n+m}$.
Enfin, si a *et* b *sont dans* $\mathbb{Z}^{(10)}$, *on pose :*

$$a * b = \sum_{i=0, j=0}^{i=n_a, j=n_b} (a(i)\delta_i * b(j)\delta_j).$$

La multiplication ainsi définie sur $\mathbb{Z}^{(10)}$ se comporte comme on l'espère.

Proposition 0.1.2. *La multiplication* $*$ *introduite sur* $\mathbb{Z}^{(10)}$ *dans la définition 3.2.2, fait de* $(\mathbb{Z}^{(10)}, +, *)$ *un anneau commutatif, i.e. la loi* $*$ *est associative, commutative, et distributive par rapport à* $+$, *et possède* δ_0, *qu'on notera aussi* **1**, *comme élément neutre.*

Démonstration. D'après la définition de la multiplication, comme on sait déjà que $+$ est associative et commutative, il suffit de vérifier l'associativité et la commutativité de $*$ dans une expression du type $(a\delta_m * b\delta_n) * c\delta_p$, ce qui est aisé. □

Remarque 0.1.1. *On constate l'égalité* $\delta_n = (\delta_1)^n$ *pour* n *dans* $\mathbb{N}$.

Il reste maintenant à étendre $+$ et $*$, de $\mathbb{Z}^{(10)}$ à $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour cela, on va avoir besoin d'expliquer ce que veut dire qu'une suite de réels tend vers un autre réel.
Intuitivement, il est clair que si y est un réel $y = y(0), y(1) \dots y(n) \dots$, et qu'une suite $x_k = x_k(0), x_k(1) \dots x_k(n) \dots$ de réels vérifie : pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe K_N dans $\mathbb{N}$, tel que $x_k(i) = y(i)$ pour i entre 0 et N, dès qu'on a $k \geq K_N$, alors on peut dire que x_k tend vers y.
En d'autres termes, si le développement décimal de x_k est de plus en plus proche de celui de y, alors x tend vers y.
Cependant, cette notion de convergence est un peu trop restrictive, étant donné notre définition de $\mathbb{R}$. En effet, la suite $x_k = 0,99 \dots \underbrace{9}_{position\ k} 0 \dots$ ne tendrait pas vers 1 avec cette définition, puisqu'on s'est restreint dans la définition de $\mathbb{R}$, à séléctionner le développement fini quand un

réel avait deux développements.
On remarque cependant que pour

$$x_k = 0,9\dots 9 \underbrace{9}_{position\ k} 0\dots,$$

alors

$$-x_k = -1 + 0,0\dots 0 \underbrace{1}_{position\ k} 0\dots,$$

en particulier, avec nos conventions, on a

$$x_k - 1 = -1,9\dots 9 \underbrace{9}_{position\ k} 0\dots,$$

et

$$1 - x_k = 0,0\dots 0 \underbrace{1}_{position\ k} 0\dots,$$

en particulier, la valeur absolue $|1 - x_k|$, à un développement décimal qui se rapproche de celui de zéro. On va donc introduire un ordre, et une valeur absolue sur $\mathbb{Z}^{(10)}$, avant de définir la notion de convergence.

Tout d'abord, on rappelle ce qu'est une relation d'ordre, et un ordre total.

Définition 0.1.5. *Soit X un ensemble, et $\leq$ une relation binaire (i.e. qui met en relation deux éléments de X) sur X, on dit que $\leq$ est une relation d'ordre si :*

1. *$\leq$ est réflexive : $x \leq x$ pour x dans X.*
2. *$\leq$ est antisymétique : $(x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$ pour x et y dans X.*
3. *$\leq$ est transitive : $x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ pour x, y et z dans X.*

On dit de plus que l'ordre qu'elle définit sur X est total, si tout coulpe d'éléments de X est comparable (i.e. $x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tout x et y dans X).

On ordonne $\mathbb{R}$ de la manière naturelle suivante :

Proposition 0.1.3. *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$, on note $a \leq b$ si ou bien $a = b$, ou bien $a < b$, i.e. $a(k) < b(k)$, pour k le plus petit entier naturel tel que $a(k) \neq b(k)$ lorsque $a \neq b$ (k existe puisque c'est le minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$). L'ensemble $\mathbb{R}$, muni de la relation $\leq$ est totalement ordonné.*

Exercice 0.1.1. *Démontrer la proposition précédente. Montrer que si a appartient à $\mathbb{R}$, alors on a $a \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow a(0) \geq 0$.*

On vérifie que $\leq$ est compatible avec $+$ sur $\mathbb{Z}^{(10)}$:

Lemme 0.1.2. *Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{Z}^{(10)}$, alors $(a \geq 0$ et $b \geq 0) \Rightarrow (a + b \geq 0)$, et $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$ (en particulier $a \leq 0 \Leftrightarrow -a \geq 0$).*

Démonstration. On montre d'abord que si a et b sont positifs, c'est aussi le cas de $a+b$, et ce par récurrence sur $n = max(n_a, n_b)$. Si $n \leq 0$, c'est clair. Sinon, $a = \hat{a}^n + a(n)\delta_n$, et $b = \hat{b}^n + b(n)\delta_n$, on a bien sà≫r que $\hat{a}^n$ et $\hat{b}^n$ sont positifs car leur 0-ième terme l'est d'après l'exercice 0.1.1. Ainsi $\hat{a}^n + \hat{b}^n \geq \mathbf{0}$ par hypothèse de récurrence, mais alors si $a(n+1) + b(n+1) = 10q + r$, on a $\hat{a}^n + \hat{b}^n + q\delta_{n-1} \geq \mathbf{0}$ par hypothèse récurrence, et d'après l'exercice 0.1.1, on a

$$a + b = ((\hat{a}^{n-1} + \hat{b}^{n-1} + q\delta_{n-1})(0), \dots, (\hat{a}^{n-1} + \hat{b}^{n-1} + q\delta_{n-1})(n-1), r, 0, \dots) \geq \mathbf{0}.$$

On montre ensuite $b \geq a \Rightarrow b - a \geq \mathbf{0}$. Si $a = b$, c'est clair. Sinon, quitte à multiplier par un bon δ_k, on peut supposer $a(0) < b(0)$. On montre par réccurence sur $n = max(n_a, n_b)$ que $b - a \geq \mathbf{0}$.
Si $n = 0$, c'est clair. Sinon, $b - a = \hat{b}^n - \hat{a}^n + (b(n)\delta_n - a(n)\delta_n)$. Mais par hypothèse de récurrence, on a $[\hat{b}^n - \hat{a}^n](0) \geq 0$. Si $b(n) - a(n) \geq 0$, alors $b - a$ vaut $(\hat{b}^n - \hat{a}^n) + (b(n) - a(n))\delta_n$ et donc $b - a \geq \mathbf{0}$ comme somme de termes positifs.
Sinon, $b(n)\delta_n - a(n)\delta_n = -\delta_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 9\delta_i + (10 - a(n) + b(n))\delta_n$ et donc

$$b - a = ((a(0) - b(0) - 1)\delta_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(b(i) - a(i) + 9)\delta_i + (10 - a(n) + b(n))\delta_n$$

qui est positif comme somme de nombres positifs. Bien sà»r, en posant $b = 0$, on obtient $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$, puis en remplaçant a par $-a$: $a \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow -a \geq \mathbf{0}$. D'où $a \geq b \Rightarrow a - b \geq \mathbf{0} \Rightarrow b - a \leq \mathbf{0}$, et donc $b \geq a \Leftrightarrow b - a \geq \mathbf{0}$, et enfin le résultat final en remplaçant b par $b + c$, et a par $a + c$, et en constatant que $b - a$ est invariant par ces opérations. □

De même $\leq$ est compatible avec $*$ sur $\mathbb{Z}^{(10)}$.

Lemme 0.1.3. *Soient a, et b deux éléments positifs de $\mathbb{Z}^{(10)}$, alors $a * b$ est positif.*

Démonstration. On écrit $a = \sum_i a(i)\delta_i$, avec $a(i) \geq 0$, ainsi $a * b = \sum_i a(i)\delta_i * b$, or $\delta_i * b \geq 0$ car $b \geq 0$, puis $a(i)\delta_i * b = \underbrace{\delta_i * b + \cdots + \delta_i * b}_{a(i)\ fois} \geq 0$, et finalement $a * b \geq 0$ □

On peut définit maintenant une valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

Définition 0.1.6. *Soit a dans $\mathbb{R}$, on note $|a|$ l'élément a de $\mathbb{R}$ si $a \geq 0$ (ou de manière équivalente si $a(0) \leq 0$), et $-a$ sinon.*

La valeur absolue restreinte à $\mathbb{Z}_{(10)}$ possède les deux proriétés fondamentales suivantes :

Proposition 0.1.4. *Soient a et b dans $\mathbb{Z}^{(10)}$, alors $|a| = \mathbf{0} \Rightarrow a = \mathbf{0}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$, avec égalité si et seulement si a et b ont le même signe, et $|a * b| = |a| * |b|$.*

Démonstration. La première propriété découle de ce que $|a| = \pm a$. Puis remarque d'abord que $a \leq |a|$, c'est évident si a positif, sinon $|a| = -a < 0 < a$, on en déduit que a et $-a$ sont tous les deux plus petits que $|a|$.
L'inégalité triangulaire découle alors du fait que $|a + b| = a + b$ ou $-a - b$, et du lemme 0.1.2, et la multiplicativité découle du lemme 0.1.3. Finalement si $|a + b| = a + b$, on peut supposer $a \leq 0$ (quitte à remplacer a et b par $-a$ et $-b$), mais alors $|a + b| = a + b \leq |a| + |b| = a + |b|$ par inégalité triangulaire, et donc $b = |b|$. □

Il sera pratique d'avoir une notation lorsqu'on tronque un réel.

Définition 0.1.7. *Si $x = (x(0), \ldots, x(n), x(n+1), \ldots)$ est dans $\mathbb{R}$, on note $x_{|n}$ le réel*

$$\sum_{i=0}^{n} x(i)\delta_i = (x(0), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots)$$

La relation d'ordre sur les réels se lit sur les réels tronqués :

Proposition 0.1.5. *Soient x et y dans $\mathbb{R}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $x \leq y$.

ii) $x_{|n} \leq y_{|n}$ *pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$.

iii) $x_{|n} \leq y_{|n}$ *pour une infinité de* n *dans* $\mathbb{N}$.

Exercice 0.1.2. *Démontrer la proposition précédente.*

On peut maintenant définir la limite d'une suite de réels :

Définition 0.1.8. *Soit* $(x_k)_k$ *une suite de réels, on dit que* x_k *tend vers* $x \in \mathbb{R}$ *si pour tout* N *dans* $\mathbb{N}$, *il existe* k_N *dans* $\mathbb{N}$ *tel que* $k \geq k_N$ *implique* $|x_{|N} - x_{k|N}| \leq \delta_N$

Ainsi on a bien que $x_k = \sum_{i=1}^{k} 9\delta_i$ tend vers $\mathbf{1}$.
Cette définition n'est cependant pas toujours pratique, on en donne une autre.

Proposition 0.1.6. *Soit* $(x^k)_k$ *une suite de réels,* x_k *tend vers* $x \in \mathbb{R}$ *si et seulement si il existe* m *dans* $\mathbb{N} - \{0\}$, *tel que pour* N *suffisamment grand, il existe* k_N *dans* $\mathbb{N}$ *tel que* $k \geq k_N$ *implique* $|x_{|N} - x_{k|N}| \leq m\delta_N$.

Démonstration. Il est clair qu'une suite x_k qui tend vers x vérifie la propriété de l'énoncé avec $m = 1$. Inversement, on suppose que x_k vérifie la propriété de l'énoncé. Alors si N est assez grand, par exemple $N \geq N_0$, on a $|x_{|N} - x_{k|N}| \leq m\delta_N$ pour $k \geq k_N$. Soit un N dans $\mathbb{N}$, par inégalité triangulaire on a $|x_{|N} - x_{k|N}| - |\sum_{i=N+1}^{n}(x(i) - y(i))\delta_i| \leq |x_{|n} - x_{k|n}| \leq m\delta_n$ pour $n > N_0$. En appliquant à nouveau l' inégalité triangulaire, on a pour tout n tel que $n > N_0$:

$$|x_{|N} - x_{k|N}| \leq \sum_{i=N+1}^{n} 9\delta_i + m\delta_n = \delta_N + (m-1)\delta_n.$$

On en déduit $|x_{|N} - x_{k|N}| \leq \delta_N$. □

On montre maintenant qu'il y a unicité d'une telle limite. On utilisera le lemme suivant :

Lemme 0.1.4. *Soient* $x \leq y$ *dans* $\mathbb{Z}_{(10)}$, *et* $n = max(n_x, n_y)$.
Alors si $y - x \leq \delta_n$, *ou bien* $y = x$, *ou bien* $y - x = \delta_n$ *et il existe* $k_0 < n$, *tel que* $x(k_0) < 9$, *et* $x(i) = 9$ *pour* $k_0 < i \leq n$, *et* $y = \sum_{j=1}^{k_0-1} x(j)\delta_j + (x(k_0) + 1)\delta_k$, *i.e.*

$$x = (x(0)\ldots, x(k_0), 9, \ldots, \underbrace{9}_{position\ n}, 0, \ldots) \text{ et } y = (x(0)\ldots, x(k_0-1), x(k_0)+1, 0, 0, \ldots).$$

Démonstration. Si $x \neq y$, alors $x < y$.
Dans ce cas, si k_0 est minimal pour la propriété $x(k) < y(k)$, on a $y - x = (y(k_0) - x(k_0))\delta_{k_0} + \sum_{i>k_0}(y(i) - x(i))\delta_i$, mais alors,

$$y - x \leq \delta_n \Rightarrow \delta_{k_0} \leq (y(k_0) - x(k_0))\delta_{k_0} \leq \delta_n + - \sum_{i=k_0+1}^{n}(y(i) - x(i))\delta_i.$$

Mais par inégalité triangulaire, on obtient $\delta_{k_0} \leq \sum_{i=k_0+1}^{n} |y(i) - x(i)|\delta_i + \delta_n$. Comme $|(y(i) - x(i))\delta_i| = |y(i) - x(i)|\delta_i$, et $|y(i) - x(i)| \in \{0, \ldots, 9\}$, on a $\sum_{i=k_0+1}^{n} |y(i) - x(i)|\delta_i \leq \sum_{i=k_0+1}^{n} 9\delta_i = \delta_{k_0} - \delta_n$, avec égalité dans si et seulement si $|y(i) - x(i)| = 9$ pour $k_0 < i \leq n$.
On a donc

$$\delta_{k_0} \leq (y(k_0) - x(k_0))\delta_{k_0} \leq \delta_n + - \sum_{i=k_0+1}^{n}(y(i) - x(i))\delta_i \leq \delta_n + \sum_{i=k_0+1}^{n} |(y(i) - x(i))\delta_i| \leq \delta_{k_0},$$

il y a donc égalité partout, on en déduit $y(k_0) = x(k_0) + 1$, et $x(i) - y(i) = |y(i) - x(i)| = 9 \Leftrightarrow x(i) = 9$ et $y(i) = 0$ pour i entre $k_0 + 1$ et n. □

On en déduit.

Proposition 0.1.7. *La limite d'une suite de $\mathbb{R}$ est unique quand elle existe.*

Démonstration. Si x_k tend à la fois vers y et z, on veut montrer que $y = z$. On suppose que ça n'est pas le cas, alors il existe k_0 minimal dans l'ensemble des k tels que $z(k) \neq y(k)$, on peut supposer que $z(k_0) < y(k_0)$.
Mais par inégalité triangulaire, comme x_k tend vers y et z, on a $|y_{|n} - z_{|n}| \leq 2\delta_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. En particulier, on a

$$|y_{|n}-z_{|n}|-|(y(n+1)-z(n+1))\delta_{n+1}| \leq |(y_{|n}-z_{|n})+(y(n+1)-z(n+1))\delta_{n+1}| = |y_{|n+1}-z_{|n+1}| \leq 2\delta_{n+1}.$$

On en déduit $|y_{|n} - z_{|n}| \leq |y(n+1) - z(n+1)|\delta_{n+1} + 2\delta_{n+1}$, mais comme ni $y(k)$, ni $z(k)$ ne stationne en 9, il existe une infinité de n supérieurs à k_0, pour lesquels $y_{|n} - z_{|n} = |y_{|n} - z_{|n}| \leq 10\delta_{n+1} = \delta_n$. Si il existait une infinité de n supérieurs à k_0, tels que $y_{|n} - z_{|n} = \delta_n$, on en déduirait, d'après le lemme 0.1.4, que la suite $z(k)$ stationne en 9, ce qui est absurde. Ainsi, il existe une infinité de n tels que $y_{|n} = z_{|n}$, et donc $y = z$, c'est absurde étant donné qu'on a supposé $y \neq z$.
Finalement on a nécessairement $y = z$.

□

On sera souvent amener à évaluer la différence $(a + b)_{|n} - (a_{|n} + b_{|n})$, pour deux éléments a et b de $\mathbb{Z}_{(10)}$.

Lemme 0.1.5. *Si a et b sont dans $\mathbb{Z}_{(10)}$, alors $|(a+b)_{|n} - (a_{|n} + b_{|n})| \leq \delta_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Soit $m = max(n_a, n_b)$, si $n \geq m$, c'est trivial, sinon on a $a = \sum_{i=1}^{m} a(i)\delta_i$, et $b = \sum_{i=1}^{m} b(i)\delta_i$, et donc $a+b = \sum_{i=1}^{m}(a(i)+b(i))\delta_i = \sum_{i=1}^{n}(a(i)+b(i))\delta_i+\sum_{j=n+1}^{m}(a(j)+b(j))\delta_i$.
Mais on a

$$\sum_{j=n+1}^{m} (a(j) + b(j))\delta_i \leq 2(\sum_{j=n+1}^{m} 9.\delta_j) = 2(\delta_n - \delta_m) < 2\delta_n,$$

et donc $\sum_{j=n+1}^{m}(a(j)+b(j))\delta_i$ s'écrit sous la forme $\sum_{j=n}^{m} c(j)\delta_i$, avec $c(n) = 0$ *ou* 1, et $c(j)$ dans $\{0, 9\}$ pour $i > n$. On en déduit

$$(a + b)_{|n} = \sum_{i=1}^{n}(a(i) + b(i))\delta_i \ ou \ \sum_{i=1}^{n}(a(i) + b(i))\delta_i + \delta_n,$$

et l'énoncé du lemme en découle car $a_{|n} = \sum_{i=1}^{n} a(i)\delta_i$, et $b_{|n} = \sum_{i=1}^{n} b(i)\delta_i$. □

Ceci a pour application immédiate la propriété de continuité suivante.

Proposition 0.1.8. *Soient a_k et b_k deux suites de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui convergent dans $\mathbb{Z}^{(10)}$ vers a et b respectivement, alors $a_k + b_k$ tend vers $a + b$.*

Démonstration. En effet, cela découle du fait que pour $n \geq max(n_a, n_b)$, on a pour k grand

$$|(a + b)_{|n} - (a_k + b_k)_{|n}| = |a_{|n} - a_{k|n}| + |b_{|n} - b_{k|n}| + 2\delta_n \leq 4\delta_n.$$

On applique alors la proposition 0.1.6. □

Afin d'étendre + et $*$ de $\mathbb{Z}^{(10)}$ à $\mathbb{R}$, on constate d'abord que $\mathbb{Z}^{(10)}$ est "dense" dans $\mathbb{R}$.

Proposition 0.1.9. *Tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite croissante d'éléments $\mathbb{Z}^{(10)}$.*

Démonstration. Il est clair que $x_k = x_{|k}$ tend vers x en croissant quand k tend vers l'infini. $\square$

Dans $\mathbb{R}$, un fait fondamental bien connu est qu'une suite croissante et majorée converge :

Théorème 0.1.1. *Soit x_k une suite croissante (resp. décroissante) de $\mathbb{R}$, majorée (resp. minorée) par $y \in \mathbb{R}$, alors x_k converge vers un réel x, et $x_k \leq x \leq y$ (resp. $x_k \geq x \geq y$) pour tout k .*

Démonstration. Elle repose sur le lemme suivant.

Lemme 0.1.6. *Pour n dans $\mathbb{N}$, la suite $x_{k|n}$ est croissante et stationnaire.*

Démonstration du lemme. On traite le cas des suites croissantes, la démonstration est similaire pour les suites décroissantes.
La suite tronquée $x_{k|n}$ est croissante d'après la proposition 0.1.5.
De plus, si on fixe n, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, l'élément $x_{k|n}$ appartient à l'ensemble fini $E_n = \{z \in \mathbb{Z}^{(10)},\ n_z \leq n \text{ et } x^0_{|n} \leq z \leq y_{|n}\}$. On en déduit que $x_{k|n}$ stationne en $a_n \in E_n$. $\square$

On a alors la relation $a_{n+1|n} = a_n$, qui découle de $(x_{k|n+1})_{|n} = x_{k|n}$, en prenant k assez grand. Mais alors la suite $a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i(i)\delta_i$ converge dans $\mathbb{R}$, soit vers $x = \sum_{i\geq 0} a_i(i)\delta_i$ qui est une notation pour le réel $(x_0(0), \ldots, x_n(n), \ldots)$ si $a_k(k)$ ne stationne pas en 9, ou bien vers $x = \sum_{i=1}^{k_0-2} a_i(i)\delta_i + (a_{k_0-1}(k_0-1)+1)\delta_{k_0-1}$ si k est k_0 est le plus petit entier à partir duquel $a_k(k)$ stationne en 9.
Dans le premier cas, si n est fixé, on a $x_{|n} = a_n = x_{k|n} \in E_n$ pour k assez grand, en particulier, x_k converge vers x. De plus comme $x_{k|n}$ est croissante, on en déduit pour tout k les inégalités $x_{k|n} \leq x_{|n} \leq y_{|n}$, d'où $x_k \leq x \leq y$.
Dans le second cas, pour $n \geq k_0$, on a $x_{|n} = a_n + \delta_n$, et comme $x_{k|n} = a_n$ pour k grand, on a $|x_{k|n} - x_{|n}| = \delta_n$, donc x_k convege vers x.
De plus, on a $x_{k|n} = a_n < x_{|n}$ pour k assez grand (donc $x_{k|n} < x_{|n}$ pour tout k, car $x_{k|n}$ est croissante). Mais comme $a_n \leq y_{|n}$, que $x_k(k)$ stationne en 9, et que $y(k)$ ne stationne pas en 9, on en déduit que pour une infnité de n dans $\mathbb{N}$, on a $a_n + \delta_n \leq y_{|n}$, i.e. $x_{|n} \leq y_{|n}$ pour une infinité de n, et donc $x \leq y$ d'après la proposition 0.1.5. $\square$

On montre alors la proposition suivante.

Proposition 0.1.10. *Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, et $(x_k)_k$ une suite de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui converge vers x, et et $(y_k)_k$ une suite de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui converge vers y.*
Dans ces conditions, il existe un élément $s(x,y)$ de $\mathbb{R}$, indépendant des suites x_k et y_k choisies, tel que la suite $(x_k + y_k)_k$ tende vers $s(x,y)$.

Démonstration. Soient x_k et y_k sont deux suites réelles qui tendent en croissant vers x et y respectivement, d'après le théorème 0.1.1, la suite croissante $x_k + y_k$ par $(x(0)+y(0)+2)\delta_0$, elle converge donc vers un réel s.
Soient x'_k et y'_k deux autres suites de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui tendent vers x et y respectivement.
Par définition de la convergence, pour n fixé, on a les inégalités $|x_{|n} - x'_{k|n}| \leq \delta_n$, $|y_{|n} - y'_{k|n}| \leq \delta_n$, $|x_{|n} - x_{k|n}| \leq \delta_n$, $|y_{|n} - y_{k|n}| \leq \delta_n$ et $|s_{|n} - (x_k + y_k)_{|n}| \leq \delta_n$ pour k assez grand.
On déduit de l'inégalité triangulaire et du lemme 3.1.4, que la valeur absolue

$$|(x_k + y_k)_{|n} - (x'_k + y'_k)_{|n}|$$

est plus petite que

$$\begin{aligned}
&|(x_k+y_k)_{|n} - x_{k|n} - y_{k|n}| + |x_{k|n} + y_{k|n} - x'_{k|n} - y'_{k|n}| + |x'_{k|n} + y'_{k|n} - (x'_k + y'_k)_{|n}| \\
&\leq 2\delta_n + |x_{k|n} - x'_{k|n}| + |y_{k|n} - y'_{k|n}| \\
&\leq 2\delta_n + |x_{k|n} - x_{|n}| + |x_{|n} - x'_{k|n}| + |y_{k|n} - y_{|n}| + |y_{|n} - y'_{k|n}| \leq 4\delta_n
\end{aligned}$$

pour k assez grand.
On en déduit par inégalité triangulaire qu'on a $|s_{|n} - (x'_k + y'_k)_{|n}| \leq 5\delta_n$ pour k assez grand, et donc $x'_k + y'_k$ converge aussi vers s. □

La proposition précédente définit une addition sur $\mathbb{R}$, qui prolonge celle de $\mathbb{Z}^{(10)}$, et fait de $(\mathbb{R}, +)$ un groupe commutatif.

Proposition 0.1.11. *Si x et y sont dans $\mathbb{R}$, on note $x+y$ le réel $s(x,y)$, et $(\mathbb{R},+)$ est un groupe abélien.*

Démonstration. Il faur d'abord montrer l'existence d'un opposé : si x est dans $\mathbb{R}$, soit x_k dans $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui croît vers x, alors $-x_k$ est décroissante, et minorée par $(-x(0)-1)\delta_0$, elle converge donc vers un réel x'. Mais alors $0 = x_k + (-x_k)$ converge vers $x + x'$ d'après la proposition précdédente, et donc $x + x' = 0$ par unicité de la limite.
Les propriétés s'obtiennent de la même manière, on traite seulement la commutativité :
soit x_k dans $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui tend vers le réel x, et y_k dans $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui tend vers le réel y. Alors par définition, $x+y$ est la limite de x_k+y_k, et $y+x$ est la limite de y_k+x_k, mais alors $x_k+y_k = y_k+x_k$, donc par unicité de la limite, on a $x+y = y+x$. □

On va retrouver la définition classique de convergence, on constate d'abord le fait suivant.

Lemme 0.1.7. *Si x est dans $\mathbb{R}$, et $n \geq 1$, alors $|x - x_{|n}| = x - x_{|n} \leq \delta_n$.*

Démonstration. En effet, on a $x - x_{|n} = \sum_{i \geq n+1} x(i)\delta_i$ en approximant x par $(x_{|k})_k$, et le terme de droite est clairement plus petit que δ_n. □

On en déduit.

Proposition 0.1.12. *Une suite $(x_k)_k$ de réels tend vers x si et seulement si pour tout ϵ positif, il existe N_ϵ dans $\mathbb{N}$, tel que $(k \geq N_\epsilon) \Rightarrow |x - x_k| < \epsilon$.*

Démonstration. Supposons que la suite x_k tende ver x. Soit $\epsilon >$, et choisissons n suffisamment grand pour que l'inégalité $3\delta_n < \epsilon$ soit vérifiée, alors pour k grand, on a $|x_{k|n} - x_{|n}| \leq \delta_n$ par définition de la convergence, mais on a aussi $|x_{k|n} - x_k| \leq \delta_n$ et $|x_{|n} - x| \leq \delta_n$ d'après le lemme 0.1.7, on en déduit l'inégalité $|x - x_k| \leq 3\delta_n < \epsilon$ pour k assez grand.
Inversement, si pour tout ϵ positif, il existe N_ϵ dans $\mathbb{N}$, tel que $(k \geq N_\epsilon) \Rightarrow |x - x_k| < \epsilon$. Soit n dans $\mathbb{N}$, on déduit du lemme 0.1.7 l'inégalité $|x_{k|n} - x_{|n}| \leq |x - x_k| + 2\delta_n$, mai spour k assez grand on a $|x_k - x| \leq \delta_n$, et donc $|x_{k|n} - x_{|n}| \leq 3\delta_n$, et la conlusion découle de la proposition 0.1.6. □

Remarque 0.1.2. *La proposition précédente implique qu'une suite convergente est bornée, en effet, si x_k converge vers x, on a pour tout k, l'inégalité $|x_k| \leq max(|x_o|, \ldots, |x_{N_1}|, 1)$.*

On utilisera désormais cette définition de convergence, qui est beaucoup plus pratique. Par exemple le fait que le passage à la limite préserve les inégalités larges devient évident.

Lemme 0.1.8. *Si une suite x_k de réels tend vers x, que la suite de réels y_k tend vers y, et que pour tout k, on a $x_k \leq y_k$, alors $x \leq y$.*

Démonstration. Sinon on aurait $y < x$, et en posant $\epsilon = (x - y)/2$, et alors por k assez grand, on aurait $|y - y_k| < \epsilon$, et $|x - x_k| < \epsilon$, d'où $x_k > x - \epsilon > y + \epsilon > y_k$, ce qui est absurde. □

Proposition 0.1.13. *Si a^k est une suite de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui tend vers le réel a, alors $|a^k|$ tend vers $|a|$. Si a et b sont dans $\mathbb{R}$, on a $|a + b| \leq |a| + |b|$.*

Démonstration. Pour la première partie, si $a = 0$, c'est clair. Si $a > 0$, alors a^k est positif pour k assez grand, et le résultat est évident, si a est négatif, a^k est négatif pour n assez grand, et donc $|a^k| = -a_k$, mais il est évident que $-a_k$ tend vers $-a = |a|$.
On en déduit la deuxième partie en approximant a et b par des suites a_k et b_k dans $\mathbb{Z}^{(10)}$, alors $a_k + b_k$ tend vers $a + b$, et donc $|a_k|$ tend vers $|a|$, $|b_k|$ tend vers $|b|$, et $|a_k + b_k|$ tend vers $|a + b|$, on conclut d'après le lemme 0.1.8. □

On constate, avant d'étendre la loi $*$ à $\mathbb{R}$, qu'elle est continue sur $\mathbb{Z}^{(10)}$.

Proposition 0.1.14. *Sia $(a_k)_k \subset \mathbb{Z}^{(10)}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{Z}^{(10)}$ tendent vers $a \in \mathbb{Z}^{(10)}$ et $b \in \mathbb{Z}^{(10)}$ respectivement, alors la suite $a_k * b_k$ tend vers $a * b$.*

Démonstration. On a l'inégalité $|a * b - a_k * b_k| \leq |a| * |b - b_k| + |a - a_k| * |b_k|$. Mais puisque la suite b_k est bornée car convergente, on en déduit que $a_k * b_k$ tend vers $a * b$. □

On a alors l'analogue suivant de la proposition 0.1.10.

Proposition 0.1.15. *Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$, et $(x_k)_k$ une suite de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui converge vers x, et et $(y_k)_k$ une suite de $\mathbb{Z}^{(10)}$ qui converge vers y.*
Dans ces conditions, il existe un élément $m(x, y)$ de $\mathbb{R}$, indépendant des suites x_k et y_k choisies, tel que la suite $(x_k * y_k)_k$ tende vers $m(x, y)$.

Démonstration. On approxime pour commencer x et y par $x_k = x_{|k}$, et $y_k = y_{|k}$. Ainsi x_k et y_k sont croissantes, et de même signe que x et y respectivement, en particulier la suite $x_k * y_k$ est monotone et bornée, donc convergente. On note m sa limite.
Soit x'_k et y'_k deux autres suites approximantes, alors on a $|m - x'_k * y'_k| \leq |m - x_k * y_k| + |(x_k - x'_k) * y_k| + |x'_k * (y_k - y'_k)|$, on en déduit que $x'_k * y'_k$ tend vers $x * y$ car y_k et x'_k sont bornées, et que $x_k - x'_k$ et $y_k - y'_k$ tendent vers $\mathbf{0}$. □

Définition 0.1.9. *On note $x * y$ le réel $m(x, y)$ défini dans la proposition précédente.*

On a alors le théorème suivant.

Théorème 0.1.2. *L'ensemble $(\mathbb{R}, +, *)$ est un corps commutatif, dont les lois sont "continues" et compatibles avec $\leq$, et étendent celles définies sur $\mathbb{Z}^{(10)}$.*

Démonstration. Le fait que $*$ prolonge la multiplication sur $\mathbb{Z}^{(10)}$, découle de la proposition 0.1.14. Les propriétés requises pour $*$ (associativité, commutativité, distributivité, élément neutre) découlent de celles de sa restriction à $\mathbb{Z}^{(10)}$, et du fait que la définition de $x * y$ ne dépend pas des suites approximant x et y. La continuité de $+$ et $*$ découlent de l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$. La compatibilité découle des lois avec $\leq$ est obtenue en approximant avec des suites de $\mathbb{Z}_{(10)}$, et en utilisant le lemme 0.1.8.
Le seul point non trivial est que tout élément non nul à un inverse pour $*$. Il découle du lemme suivant.

Lemme 0.1.9. *Si x est un réel qui vérifie $\mathbf{0} \leq x < \mathbf{1}$, alors la suite de ses puisances x^k tend ver $\mathbf{0}$, et la suite $s_k = 1 + x + \cdots + x^k$ converge vers un élément s qui vérifie $s(1 - x) = 1$.*

Démonstration du lemme. La suite x^k est décroissante et minorée par $\mathbf{0}$, elle converge donc vers un certain $l \geq 0$, qui vérifie par continuité de $*$, que $l * x = l$, mais comme $l * x < l$ si l est non nul, on en déduit que $l = \mathbf{0}$, et donc x^k tend vers $\mathbf{0}$. La deuxième partie découle de l'égalité $s_k(\mathbf{1} - x) = \mathbf{1} - x^{k+1}$, et de ce que s_k est croissante et majorée car $s_k * (\mathbf{1} - x)$ l'est. □

En particulier tout réel x tel que $\mathbf{0} < x < \mathbf{1}$, (qui sécrit donc $1 - y$, pour $\mathbf{0} < y < \mathbf{1}$), admet un inverse pour $*$. Mais si x est strictement positif, il existe n tel que $\delta_n * x$ est dans $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, donc $\delta_n * x$ est inversible, mais alors x aussi, car δ_n a clairement pour inverse $(10 * \mathbf{1})^n$. Finalement, si x est strictement négatif, $-x$ est inversible, et donc x aussi. □

0.2 Caractérisation du corps $\mathbb{R}$

On commence par introduire des notions de bases.

Définition 0.2.1. *Corps totalement ordonné.*
On appelle corps totalement ordonné, un corps $(K, +, *)$, muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$ compatible avec les lois $+$ et $*$, i.e. $(x \leq y) \Leftrightarrow (x + z \leq x + z)$, pour tous x, y, z dans K, et $0 \leq x * y$ si de plus $0 \leq x$ et $0 \leq y$.
On écrira comme d'habitude $x < y$ quand x et y satisfont les conditions $x \neq y$ et $x \leq y$.

Exercice 0.2.1. *a) Soit K un corps totalement ordonné, montrer qu'on a :*
- *$x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$, en particulier $0_K \leq x \Leftrightarrow -x \leq 0_K$.*
- *Règle des signes : $x * y \leq 0$ si et seulement si x et y ne sont pas de même signe.*
- *$0_K < 1_K$.*

b) En déduire qu'il existe un unique ordre sur $\mathbb{Q}$, qui lui octroie une structure de corps totalement ordonné (indication : on montrera que cet ordre est donné par $a/b \leq c/d \Leftrightarrow ad \leq bc$ pour b et d dans $\mathbb{N}$).
Pour n dans $\mathbb{Z}$, on note $n.1_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n \text{ fois}}$ pour n positif, et $n.1_K = -(|n|.1_K)$ sinon.
c) Montrer que $i_K : n \mapsto n.1_K$ de $\mathbb{Z}$ dans K est injective, et que c'est un morphisme d'anneau ardonné (i.e. elle préserve $+$, $*$, et $\leq$).
d) Montrer que i_K s'étend de manière unique en un morphisme de corps totalement ordonné de $\mathbb{Q}$ dans K.

Exercice 0.2.2. *a) Soit F_2 l'ensemble $\{0, 1\}$, muni des lois $+$ et $*$ dont les tables sont :*

+	0	1
0	0	1
1	1	0

, et

*	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Montrer que F_2 est un corps à deux éléments.
b) Montrer qu'un corps fini ne peut être totalement ordonné (indication : sinon il aurait un plus petit élément x (pourquoi ?), que dire de $x - 1$?).

On a vu que $\mathbb{R}$ était un corps totalement ordonné.
Si K est un corps totalement ordonné, on identifiera désormais $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ à des sous-ensembles de K par l'injection canonique i_K définie dans l'exercice 0.2.1.

Exercice 0.2.3. *Montrer que tout sous-corps d'un corps totalement ordonné (en particulier $\mathbb{Q}$), est lui même totalement ordonné.*

Une proriété fondamentale du corps des réels, pour sa "topologie" usuelle, est qu'il est archimédien :

Définition 0.2.2. *Corps archimédien.*
Un corps totalement ordonné $(K, +, *, \leq)$ *est dit archimédien, si pour tous* $x > 0$ *et* y *dans* K*, il existe* n *dans* $\mathbb{N}$*, tel que* $n.x \geq y$*.*

Exercice 0.2.4. *Montrer que dans l'énoncé de la définition précédente (0.2.2), on peut remplacer* $n.x \geq y$ *par* $n.x > y$*.*

Exercice 0.2.5. *Montrer qu'un sous-corps d'un corps archimédien (en particulier* $\mathbb{Q}$*), est archimédien.*

Exercice 0.2.6. *Soit* F *un corps totalement ordonné, on note* A *l'anneau* $F[X]$ *muni de l'ordre lexicographique sur les coefficients des polynà ́mes (i.e.* $\sum a_k X^k \leq \sum b_k X^k$ *si ou bien* $a_k = b_k$ *pour tout* k*, ou bien le premier* k *tel que* $a_k \neq b_k$ *vérifie* $a_k < b_k$*).*
a) Montrer que A *est un anneau totalement ordonné, non archimédien (indication :* $n.X \leq 1$ *pour tout* n*).*
b) En déduire que le corps des fractions rationnelles $K = F(X)$ *peut être muni d'une structure de corps totalement ordonné non archimédien.*

Un des rares avantages d'introduire $\mathbb{R}$ comme on l'a fait, et que tout ce qui se rapporte à l'ordre est à peu près évident, en particulier, on définit comme suit la partie entière d'un réel.

Définition 0.2.3. *Si* u *est un réel* $(u(0), u(1), \dots)$*, on note* $E(u)$ *l'entier* $u(0)$*, et on l'appelle la partie entière de* u*.*

Remarque 0.2.1. *Il est clair que* $E(u)$ *est le plus grand élément de* $\mathbb{Z}$ *inférieur à* u *dans* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 0.2.1. *Le corps* $\mathbb{R}$ *est archimédien.*

Démonstration. Si $x > 0$ et y appartiennent à $\mathbb{R}$, et que $x(k_0)$ est le plus petit terme non nul du développement décimal de x, alors $(10^{k_0}|E(y) + 1|).x \geq y$. $\square$

Inversement, dans un corps archimédien, la notion de partie entière est bien définie :

Définition 0.2.4. *Partie entière*
Soit K *un corps totalement ordonné archimédien, et* x *un élément de* K*, le plus grand entier inférieur à* x *est bien défini, on le note* $E(x)$*, et on a bien évidemment* $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Démonstration. L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$, par définition de la notion de corps non archimédien. La partie entière $E(x)$ est son maximum. $\square$

On définit maintenant ce qu'est une valeur absolue à valeurs dans $K_{\geq 0}$ sur un corps totalement ordonné K.

Définition 0.2.5. *Valeur absolue.*
Soit K *un corps totalement ordonné, on dit qu'une fonction* ν *de* K *dans* $K_{\geq 0}$ *est une valeur absolue si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- *inégalité triangulaire : pour tout* x *et* y *dans* K*, on a* $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$*.*
- *multiplicativité : pour tout* x *et* y *dans* K*, on a* $\nu(x * y) = \nu(x) * \nu(y)$*.*
- *"séparation" : pour* x *dans* K*, on a* $\nu(x) = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K$*.*

Exercice 0.2.7. *a) Soit* K *est un corps totalement ordonné muni d'une valeur absolue* ν*, montrer qu'on a* $\nu(1_K) = 1$*,* $\nu(-1_K) = 1$ *puis qu'on a* $\nu(-x) = \nu(x)$ *pour tout* x *dans* K*.*
b) Montrer que si K *est un corps totalement ordonné, la fonction* ν *telle que* $\nu(x) = 0$ *si* $x = 0$*, et* $\nu(x) = 1$ *sinon est une valeur absolue, on l'appelle valeur absolue triviale.*

Un corps totalement ordonné est muni d'une valeur absolue canonique.

Exercice 0.2.8. *Soit K un corps totalement ordonné. Vérifier que la fonction de K dans $K_{\geq 0}$, alors la fonction définie par $\nu(x) = x$ si $x \geq 0$, et $\nu(x) = -x$ si $x < 0$, est une valeur absolue.*

Remarquons qu'il peut cependant exister d'autres valeurs absolues sur un corps totalement ordonné.

Exercice 0.2.9. *Soit p un nombre premier. On définit une fonction ν_p de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ de la manière suivante. Soit a/b un rationnel non nul écrit sous forme réduite (i.e. $b > 0$, et $a \wedge b = 1$), et soit k_a (resp. k_b) l'exposant de p dans la décomposition de a (resp. b) en nombres premiers, on pose alors $\nu_p(a/b) = p^{k_a - k_b}$. On pose $\nu_p(0) = 0$.*
Montrer que ν_p est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$, on l'appelle la vaeleur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$.

L'existence d'une valeur absolue sur un corps totalement ordonné K permet de définir la notion de convergence d'une suite de K.

Définition 0.2.6. *Suite convergente.*
Soit K un corps totalement ordonné muni d'une valeur absolue ν, on dit qu'une suite de K, i.e. une application $x : \mathbb{N} \to K$, est convergente, si il existe un élément l dans K, qu'on appelle la limite de x, qui vérifie la propriété suivante :
pour tout ϵ dans $K_{>0}$, il existe N_ϵ dans $\mathbb{N}$, tel que la conditions $(n \geq N_\epsilon)$ implique $\nu(x(n) - l) \leq \epsilon$.

On remarque que cette définition coïncide bien avec la notion de convergence déja définie lorsque $K = \mathbb{R}$. On notera fréquemment x_k au lieu de $x(k)$.
On rappelle la définition de sous-suite, ou suite extraite :

Définition 0.2.7. *Suite extraite.*
Soit X un ensemble, et $x : \mathbb{N} \to X$ une suite, une application $y : \mathbb{N} \to K$ est appelée "sous-suite“ ou "suite extraire“ de x, s'il existe ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $y = x \circ \phi$.

Exercice 0.2.10. *Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, montrer que $\phi(n) \geq n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.*

Exercice 0.2.11. *Montrer qu'une sous-suite d'une suite convergente converge.*

Exercice 0.2.12. *Montrer qu'une sous-suite d'une sous-suite est une sous-suite.*

Pour un espace métrique, il existe une classe importante de suites, appelées suites de Cauchy, qu'on définit maintenant.

Définition 0.2.8. *Suite de Cauchy.*
Soit K un corps totalement ordonné muni d'une valeur absolue ν, on dit qu'une suite de K est de Cauchy, si elle vérifie la propriété suivante :
pour tout ϵ dans $K_{>0}$, il existe N_ϵ dans $\mathbb{N}$, tel que les conditions $(m \geq N_\epsilon$ et $m \geq N_\epsilon)$ impliquent $\nu(x(n) - x(m)) < \epsilon$.

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 0.2.2. *Soit K un corps totalement ordonné muni d'une valeur absolue ν, et $x : \mathbb{N} \to K$ une suite de Cauchy, alors il existe M dans $K_{\geq 0}$, tel qu'on ait $\nu(x(k)) \leq M$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.*

Démonstration. On prend N_1 tel que $\nu(x(n) - x(m)) < 1$ dès que n et m sont plus grands que N_1, alors il suffit, d'après l'inégalité triangulaire, de poser $M = max_{k \in \{0,\ldots,N_1\}}(\nu(x(k) + 1)$. □

D'après la proposition suivante, la classe des suites de Cauchy, contient celle des suites convergentes.

Proposition 0.2.3. *Soit x une suite convergente dans un corps totalement ordonné K muni d'une valeur absolue ν, alors elle est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, si x converge, alors il existe $N_{\epsilon/2}$ dans $\mathbb{N}$, tel qu'on a $(n \geq N_{\epsilon/2}) \Rightarrow \nu(x(n) - l) < \epsilon$. Mais alors, si n et m sont tous deux des entiers supérieurs ou égaux à $N_{\epsilon/2}$, on déduit de l'inégalité triangulaire qu'on a $\nu(x(n) - x(m)) \leq \nu(x(n) - l) + \nu(x(m) - l) < \epsilon$, et la suite x est donc de Cauchy. □

La réciproque n'est pas toujours vraie, cependant, on a le résultat suivant.

Proposition 0.2.4. *Soit x une suite de Cauchy dans un corps totalement ordonné K muni d'une valeur absolue ν, qui admet une sous-suite convergente, alors elle converge.*

Démonstration. Soit ϵ strictement positif dans $\mathbb{R}$. Soit $x \circ \phi$ la sous-suite de x qui converge vers une limite qu'on note l, alors il existe N dans $\mathbb{N}$, tel que $\nu(x(\phi(k) - l) < \epsilon/2$ pour $k \geq N$. Par définition de suite de Cauchy, il existe N' dans $\mathbb{N}$, tel que $\nu(x(k) - x(k')) < \epsilon/2$ dès que k et k' sont plus grand que N'. Mais alors, pour $k \geq max(N, N')$, on a $\nu(x(k) - l) \leq \nu(x(k) - x(\phi(k))) + \nu(x(\phi(k)) - l) < \epsilon$, car $\phi(k) \geq k \geq N'$. La suite x converge donc vers l. □

Un corps dans lequel la réciproque de la proposition 0.2.3 est vérifiée est dit complet.

Définition 0.2.9. *Un corps totalement ordonné est dit complet pour une valeur absolue si toute suite de Cauchy pour cette valeur absolue converge.*

Une des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$, muni de sa valeur absolue canonique est qu'il est complet. Elle découle de la proposition importante suivante.

Proposition 0.2.5. *Soit $(x_k)_k$ une suite réelle, alors elle admet une sous-suite monotone.*

Démonstration. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $\{k \in \mathbb{N}, \exists n > k, x_n \geq x_k\}$. Si E est infini, on définit par récurrence la fonction ϕ, telle que $\phi(0) = min(E)$, et $\phi(k+1) = min(m \in E - \{\phi(0), \ldots, \phi(k)\}, x_m \geq x_{\phi(k)})$. Alors $(x_{\phi(k)})_k$ est une sous-suite croissante de $(x_k)_k$.
Si E est fini, la suite x est strictement décroissante à partir de $n = max(E)$, et la sous-suite $x \circ \phi$, avec $\phi(k) = n + k$, est décroissante.

□

On prouve maintenant que $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème 0.2.1. *L'espace $\mathbb{R}$, muni de la distance définie par sa valeur absolue, est complet.*

Démonstration. Soit x une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, elle est bornée d'après la proposition 0.2.2. Mais elle admet une sous-suite monotone d'après la proposition 0.2.5, et cette sous-suite est donc convergente. On en déduit que x converge gràçe à la proposition 0.2.4. □

Il est bon de savoir qu'un corps totalement ordonné n'est pas toujours complet pour sa valeur absolue canonique.

Exercice 0.2.13. *Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.*
a) Montrer que 2 n'admet pas de racine carrée dans $\mathbb{Q}$ (par l'absurde, avec un peu d'arithétique de terminale).
b) Soit f la fonction de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, définie par $f(x) = 1 + 1/(1+x)$. Montrer dans l'ordre que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, que $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 2$, et que $f(x) \geq x \Leftrightarrow x^2 \leq 2$.

c) Montre que $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ pour a et b dans $\mathbb{R} \geq 0$, puis que si x_k est une suite de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ qui tend vers l, alors $f(x_k)$ tend vers $f(l)$.
d) Soit u la suite réelle définie par récurrence : $u(0) = 1$, et $u(n+1) = f(u(n))$.
Montrer que u est à valeurs dans $\mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x^2 \leq 2\}$, et qu'elle est croissante. En déduire qu'elle converge dans $\mathbb{R}$ vers un élément dont le carré vaut 2.
e) Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de la valeur absolue induite par celle de $\mathbb{R}$, n'est pas complet.

Si K est un corps totalement ordonné, on notera $|\ |_K$ ou plus simplement $|\ |$ sa valeur absolue canonique définie dans l'exercice 0.2.8. On peut maintenant énoncer la caractérisation suivante du corps $\mathbb{R}$.

Théorème 0.2.2. $(\mathbb{R}, +, *, |\ |)$ *est "le seul" corps totalement ordonné, archimédien, et complet. Plus précisément, si $(K, +, *, |\ |)$ est un autre corps qui vérifie ces propriétés, alors il existe une unique bijection ϕ de $\mathbb{R}$ sur K, qui préserve l'ordre, la multiplication et l'addition.*

Démonstration. Tout d'abord, d'après l'exercice 0.2.1, il existe une bijection $\phi = i_K \circ i_{\mathbb{R}}^{-1}$ qui préserve les lois de corps et la relation d'ordre de $i_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ sur $i_K(\mathbb{Q})$. On veut la prolonger à $\mathbb{R}$. On identifie par abus de notation $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de K et de $\mathbb{R}$, et ϕ à l'identité sur $\mathbb{Q}$.
On remarque alors le fait suivant : puisque K est archimédien, pour tout $\epsilon > 0$ dans K, il existe n dans $\mathbb{N}$, tel que $1/n$ soit plus petit que ϵ, en particulier, dans les définition 0.2.6 et 0.2.8 de suites convergentes et de Cauchy, on peut prendre ϵ rationnel.
De plus, tout élément de K est limite d'une suite de $\mathbb{Q}$, en effet, si x appartient à K, il est alors évident que la suite de rationnels $x_n = E((n+1)x)/(n+1)$ (voir la définition 0.2.4) vérifie $|x - x_n| \leq 1/(n+1)$, et donc x_n tend vers x.
Soit x dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite x_k de $\mathbb{Q}$ qui tend vers x, mais alors x_k est une suite de Cauchy d'après le théorème 0.2.3, et donc $\phi(x_k) = x_k$ aussi, et elle converge vers un élément x' de K puisque K est complet. De plus x' ne dépend que de x, car si y_k est une autre suite de rationnels approximant x, alors $x_k - y_k$ tend vers 0, et $\phi(x_k - y_k) = \phi(x_k) - \phi(y_k) = x_k - y_k$ aussi, et donc $\psi(y_k)$ tend vers x'. On pose alors $x' = \phi(x)$, et on obtient une application ϕ de $\mathbb{R}$ dans K, qui prolonge l'application ϕ définie sur les rationnels (prendre $x_k = x$ la suite constante quand x est rationnel).
Il est clair ϕ préserve $+$, $*$, est l'ordre puisqu'elle vérifie ces propriétés sur $\mathbb{Q}$, et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, si $x \neq y$, alors $x - y \neq 0$, et $\phi(x-y) * \phi((x-y)^{-1}) = \phi((x-y)*(x-y)^{-1}) = \phi(1) = 1$, et donc $\psi(x-y) \neq 0$, d'où $\phi(x) \neq \psi(y)$, et ϕ est injective. De plus pour $x' \in K$, soit $\phi(x_k) = x_k$ une suite de rationnels qui tend vers x', alors x_k est de Cauchy, elle converge donc vers x dans $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est complet. Mais alors $x' = \phi(x)$ par définition même de ϕ, et ϕ est surjective.
Finalement, supposons qu'il existe une autre application ϕ' de $\mathbb{R}$ dans K possédant les même propriétés que ϕ, alors $\psi = \phi^{-1} \circ \phi'$ serait un automorphisme du corps $\mathbb{R}$, qui préserve l'ordre. En particulier, ψ est l'identité sur $\mathbb{Q}$ (car $\psi(1) = 1$), et ψ préserve la valeur absolue (puisqu'il préserve l'ordre). Mais alor si x est dans $\mathbb{R}$, on a et que x_k est une suite de rationnels qui tend vers x, alors $|\psi(x) - x_k| = |\psi(x - x_k)| = |x - x_k|$, et donc x_k tend vers $\psi(x)$, et $\psi(x) = x$. Ainis ψ est l'identité et $\phi' = \phi$. □

On termine ce paragraphe en rappelant la propriété de la borne supérieure.

Définition 0.2.10. *Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné, et $B \subset A$, on dit que $a \in A$ est une borne supérieure (resp. inférieure) de B, si a majore (resp. minore) B, et $a \leq c$ (resp. $a \geq c$) pour tout autre majorant (resp. minorant) c de B dans A. Un tel élément est unique.*

Démonstration de l'unicité. Si a et a' sont deux bornes supérieures de B, alors $a \leq a'$ car a' majore A, et de même $a' \leq a$, donc $a = a'$. □

Dans $\mathbb{R}$, toute partie majorée a une borne supérieure.

Théorème 0.2.3. *Soit A une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure s (resp. une borne inférieure i), caractérisée par le fait que s majore A (resp. i minore A), et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers s (resp. i).*

Démonstration. On note comme avant $x(k)$ le k-ième terme du développement d'un réel x. Soit A comme dans l'énoncé, alors l'ensmeble des $a(0)$ pour a dans A, est une famille non vide majorée d'entiers, elle admet un maximum s_0. Mais alors l'ensemble des $a(1)$, pour les a dans A tels que $a(0) = s_0$, est une partie finie non vide de $\{0, \dots, 9\}$, elle admet donc un maximum s_1. De même l'ensemble des $a(2)$, pour a dans A tel que $a(0) = s_0$ et $a(1) = s_1$, est une partie finie non vide de $\{0, \dots, 9\}$, elle admet donc un maximum s_2. On en déduit ainsi une suite s_i d'entiers, appartenant à $\{0, \dots, 9\}$ pour $i \geq 1$, telle que $s^n = \sum_{i=0}^{n} s_i 10^{-i}$ appartient à A pour tout n. Elle est croissante, et converge donc vers un réel s. Mais alors par construction, s majore A. De plus, si $x < s$, alors il existe n tel que l'élément s^n de A soit strictement plus grand que x, et donc x ne peut majorer A. Ainsi s est la borne supérieure de A, et elle est approchée par une suite de A.
Inversement, si s est un majorant, et que a_n est une suite de A qui tend vers s, alors s'il existait un majorant x de A, avec $x < s$, en posant $\epsilon = (s - x)/2$, on aurait $s - a_n < \epsilon$ pour n assez grand, et donc $a_n - x = a_n - s + s - x > -\epsilon + 2\epsilon = \epsilon > 0$, ce qui est absurde. Ainsi s est nécessairement la borne supérieure de A. □

Exercice 0.2.14. *carrés et nombres positifs. a) Montrer que si K est un corps totalement ordonné, et que x est dans K, alors $x^2 \leq 0$.*
b) Soit y dans $]1, +\infty[$, on pose $f_y(x) = 1 + (y-1)/(x+1)$. En procédant comme dans l'exercice 0.2.13, montrer que la suite $u_n = f^n(y/2)$ est croissante et majorée, et qu'elle converge vers une racine carrée de y.
c) En déduire que dans $\mathbb{R}$, un nombre est positif si et seulement si c'est un carré.
d) En déduire que l'expression "qui préserve l'ordre" est redondante dans l'énoncé du théorème 0.2.2.

Exercice 0.2.15. *Complétion d'un corps totalement ordonné.*
Soit K un corps totalement ordonné muni de sa valeur absolue canonique. On note $C(K)$ l'ensemble des suites de Cauchy de K, qu'on munit de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $x - y$ tend vers 0. On note $\hat{K}$ l'ensemble quotient $C(K)/\mathcal{R}$, et $x \mapsto \hat{x}$ la projection canonique de $C(K)$ sur $C(K)/\mathcal{R}$.
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est en effet une relation d'équivalence sur $C(K)$.
b) Montrer que $C(K)$, muni des lois $(x + y)(n) = x(n) + y(n)$ et $x * y(n) = x(n) * y(n)$ est un anneau.
c) Montrer que les lois $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ et $\hat{x} * \hat{y} = \widehat{x * y}$ sont bien définies sur $\hat{K}$, déduire de la question précédente que $\hat{K}$ muni de ces lois est un anneau.
d) Montrer que $\hat{K}$ est un corps (indication : si $\hat{x} \neq 0$, alors x est une suite de Cauchy qui ne tend pas vers 0, montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, tels que pour $n \geq N$, on ait $|x(n)| > \epsilon$, et considérer la suite définie par $y(k) = 0$ pour $k \leq N - 1$, et $y(k) = 1/x(k)$ sinon).
e) Montrer que l'application de K dans $\hat{K}$, définie par $\lambda \mapsto \hat{x_\lambda}$, ou x_λ est la suite constante dont le premier terme est λ, est un morphisme de corps (donc injectif).
Soit $\hat{x}$ dans $\hat{K}$, on note $\hat{x} \geq 0$ si il existe x' dans $C(K)$, à valeurs dans $K_{\geq 0}$, telle que $\hat{x} = \hat{x'}$, on note alors $\hat{x} \leq \hat{y}$ dans $\hat{K}$ si $\widehat{y - x} \geq \hat{0}$.

f) Montrer que $\hat{K}$ *muni de* $\leq$ *est un corps totalement ordonné, et que* $\leq$ *prolonge la relation d'ordre sur* K.
g) Montrer que $\hat{K}$ *muni sa valeur absolue canonique, contient* K *comme sous-corps dense (approximer* $\hat{x}$ *par* $\hat{x_{|n}}$*, où* $x_{|n}$ *est la suite* x *tronquée à l'ordre* n*), puis qu'il est complet (considérer d'abord la convergence d'une suite de Cauchy de* K*, puis le cas général).*
h) Montrer que si $\hat{K}$ *est archimédien si et seulement si* K *l'est.*
i) En déduire (en utilisant le théorème 0.2.2) que tout corps totalement ordonné non archimédien se plonge dans $\mathbb{R}$*. Monter qu'en partant de* $K = \mathbb{Q}$*, on obtient* $\hat{K} \simeq \mathbb{R}$*.*
j) Montrer que les hypothèses du théorème 0.2.2 sont minimales pour caractériser $\mathbb{R}$ *(utiliser l'exercice 0.2.6).*

Chapitre 1

Topologie de $\mathbb{R}^n$

1.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$

La notion de norme, généralise à $\mathbb{R}^n$ celle de valeur absolue.

Définition 1.1.1. *On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ une application N de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *(homogénéité) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour λ dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{R}^n$.*
2. *(séparation) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ dans $\mathbb{R}^n$.*
3. *(inégalité triangulaire) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ pour x et y dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 1.1.1. *Il découle facilement de la définition (point 1.) de norme, que les normes sur $\mathbb{R}$ sont les multiples de la valeur absolue par une constante strictement positive.*

Exercice 1.1.1. *Montrer que si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$ pour x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

On va donner des exemples classiques de normes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2. *Pour p dans l'intervalle $[1, +\infty[$, on note N_p l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, définie par $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, si x est le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$.*
On note de même $N_\infty(x) = \underset{i=1,\ldots,n}{max}(|x_i|) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Ces applications sont des normes, la démonstration de ce fait n'étant pas évidente, on va au préalable démontrer dans deux lemmes des inégalités classiques.

Lemme 1.1.1. *Soit $p > 1$, et $q = p/(p-1)$, de sorte qu'on ait $q > 1$, et $1/p + 1/q = 1$.*
Si a et b deux réels positifs ou nuls, alors : $ab \leq a^p/p + b^q/q$.

Démonstration. Si a ou b est nul, le terme de gauche est nul, et celui de droite positif ou nul, l'inégalité est claire.
Sinon $a > 0$ et $b > 0$, mais alors $Ln(a^p/p + b^q/q) \geq Ln(a^p)/p + Ln(b^q)/q$ par concavité de Ln (voir l'appendice 1.4), puisque $1/p + 1/q = 1$. Mais on a $Ln(a^p)/p + Ln(b^q)/q = Ln(a) + Ln(b) = Ln(ab)$, et on obtient $a^p/p + b^q/q \geq ab$ en applicant la fonction croissante exp. $\square$

Lemme 1.1.2. *[Inégalité de Minkowsky, dite de Cauchy-Schwartz pour $p = 2$] Soit $p > 1$, et $q = p/(p-1)$. Soient u_i et v_i des réels positifs pour i entre 1 et n, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq (\sum_{i=1}^n u_i^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n v_i^q)^{1/q}$$

Démonstration. Si un des termes $\sum_{i=1}^n u_i^p$ ou $\sum_{i=1}^n v_i^q$ est nul, il est clair que soit tous les u_i sont nuls, soit tous les v_i le sont, et l'inégalité est claire.

Sinon, on note u le vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, ainsi on a par définition $N_p(u) = (\sum_{i=1}^n u_i^p)^{1/p}$, et $N_q(v) = (\sum_{i=1}^n v_i^q)^{1/q}$.

On pose alors pour chaque i, $a_i = u_i/N_p(u)$, et $b_i = v_i/N_q(v)$, si bien qu'on obtient $\sum_{i=1}^n a_i^p = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^p}{\sum_{i=1}^n u_i^p} = 1$, et de même $\sum_{i=1}^n b_i^q = 1$.

Le lemme 1.1.1 nous dit alors que la somme $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ est inférieure ou égale à la somme $\sum_{i=1}^n a_i^p/p + \sum_{i=1}^n b_i^q/q$ qui vaut elle même $1/p + 1/q = 1$. En ré-écrivant, on a obtenu

$$\sum_{i=1}^n (u_i/N_p(u))(v_i/N_q(v)) \leq 1$$

soit $\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq N_p(u) N_q(v)$, qui est l'inégalité recherchée. □

On est maintenant en mesure de démontrer que les applications N_p sont des normes.

Proposition 1.1.1. *Soit p dans $[1; +\infty[$, alors N_p est une norme sur $\mathbb{R}^n$, de même, N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On va faire la vérification pour p dans $[1, +\infty[$, et on laisse au lecteur le soin de vérfier que N_∞ est une norme.

Soit $p \geq 1$, alors pour λ dans $\mathbb{R}$, et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$, et donc :

$$N_p(\lambda x) = (\sum_i |\lambda x_i|^p)^{1/p} = (|\lambda|^p [\sum_i |x_i|^p])^{1/p} = |\lambda| (\sum_i |x_i|^p)^{1/p} = |\lambda| N_p(x).$$

L'application N_p est bien homogène.

Ensuite, on a les équivalences :

$$N_p(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_i |x_i|^p = 0 \Leftrightarrow \forall\ i,\ x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

donc N_p est bien séparante.

La partie la plus délicate est l'inégalité triangulaire, pour $p = 1$, elle est cependant facile, on traite ce cas séparément :

$$N_1(x+y) = \sum_i |x_i + y_i| \underset{\text{ineg. triang. pour } |\ |}{\leq} \sum_i (|x_i| + |y_i|) = \sum_i |x_i| + \sum_i |y_i| = N_1(x) + N_1(y).$$

Il reste le cas $p > 1$, on constate qu'il est évident que $N_p(x+y) \leq N_p(x) + N_p(y)$ si le terme $\sum_i |x_i + y_i|^p$ est nul.

On suppose donc $\sum_i |x_i + y_i|^p > 0$. On a alors :

$$N_p(x+y)^p = \sum_i |x_i + y_i|^p = \sum_i |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_i (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$$

et cette dernière somme vaut

$$\sum_i |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_i |y_i||x_i + y_i|^{p-1}.$$

On applique alors le lemme 1.1.2 aux deux membres de la somme précédente, en posant $u_i = |x_i|$ et $v_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ dans pour le membre de gauche, et $u_i = |y_i|$ et $v_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ pour celui de droite, et on obtient l'inégalité :

$$\sum_i |x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_i |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq N_p(x)(\sum_i |x_i+y_i|^{q(p-1)})^{1/q}+N_p(y)(\sum_i |x_i+y_i|^{q(p-1)})^{1/q},$$

avec $q = p/(p-1)$, soit $p = q(p-1)$.
En combinant les deux dernières inégalités, et en remplaà§ant $q(p-1)$ par p, on a :

$$\sum_i |x_i + y_i|^p \leq (N_p(x) + N_p(y))(\sum_i |x_i + y_i|^p)^{1/q}.$$

On divise finalement par le réel $(\sum_i |x_i+y_i|^p)^{1/q}$, strictement positif par hypothèse, pour obtenir

$$(\sum_i |x_i + y_i|^p)^{1-1/q} \leq N_p(x) + N_p(y),$$

mais comme $1/p + 1/q = 1$, le terme de gauche n'est autre que $N_p(x + y)$, et on a donc obtenu l'inégalité triangulaire pour N_p. $\square$

On peut définir des objets géométriques grâçe aux normes.

Définition 1.1.3 (Boules, sphères). *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, a un élément de $\mathbb{R}^n$, et r un réel positif, par définition, la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble $B_N(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, N(x-a) < r\}$.*
La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble $\bar{B}_N(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, N(x-a) \leq r\}$.
La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble $\bar{B}_N(a,r) - B_N(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, N(x-a) = r\}$.

Exemple 1.1.1. *Pour $n = 1$, et N la norme valeur absolue sur $\mathbb{R}$, on vérifie l'égalité*

$$B_{|\ |}(a,r) =]a-r; a+r[.$$

Exemple 1.1.2. *Pour $n = 2$, On vérifie que $\bar{B}_{N_1}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 1)$ est le "carré plein fermé" donts les sommets sont les points de coordonnées $(0, \pm 1)$ et $(\pm 1, 0)$.*
De même $\bar{B}_{N_2}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 1)$ est le disque fermé de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1, et $\bar{B}_{N_\infty}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 1)$ est le "carré plein fermé" dont les sommets sont $(\pm 1, \pm 1)$.

L'ensemble des normes sur $\mathbb{R}^n$ est naturellement muni d'une relation d'équivalence qu'on définit maintenant.

Définition 1.1.4. *Soit N et N' deux normes sur $\mathbb{R}^n$, on dit que N' est équivalente à N si il existe $a > 0$ et $b > 0$, tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on ait $aN(x) \leq N'(x) \leq bN(x)$.*

Exercice 1.1.2. *Montrer qu'on a bien défini une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de $\mathbb{R}^n$.*

Un fait fondamental est que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, en particulier elles définissent la même "topologie", nous prouvons d'abord ce résultat, avant d'expliquer ses conséquences.

Théorème 1.1.1. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de démontrer qu'une norme N quelconque est équivalente à la norme N_1 définie en 1.1.2.
Soit donc N une norme, et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit x dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq b N_1(x),$$

où on a posé $b = \underset{i=1,\ldots,n}{max} N(e_i) > 0$.
Il reste à montrer l'existence d'un $a > 0$, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on ait $N(x) > aN_1(x)$. Supposons donc qu'un tel a n'existe pas, on va obtenir une contradiction.
Alors pour tout $a > 0$, il exister x_a tel que $N(x_a) < aN_1(x_a)$. Quitte à remplacer x_a par $(1/N_1(x_a))x_a$, on peut supposer $N_1(x_a) = 1$. On pose alors $u_k = x_{1/k}$, de sorte que $N_1(u_k) = 1$ pour tout $k > 0$, et $N(u_k) < 1/k$, en particulier $N(u_k)$ tend vers 0.
En décomposant le vecteur u_k dans la bas canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $u_k = \sum_{i=1}^n u_{k,i} e_i$. Comme $N_1(u_k) = \sum_{i=1}^n |u_{k,i}|$ vaut toujours 1, on en déduit que pour i fixé, $|u_{k,i}|$ est plus petit que 1, et donc la suite $u_{k,i}$ apartient à $[-1; 1]$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $u_{k,1}$, une suite $u_{\phi_1(k),1}$, qui converge vers une limite l_1. De même on peut extraire de $u_{\phi_1(k),2}$ (qui appartient aussi à $[-1; 1]$ pour tout k), une suite $u_{\phi_1(\phi_2(k)),2}$, qui converge vers l_2. On remarque par ailleurs que $u_{\phi_1(\phi_2(k)),1}$ converge encors vers l_1, puisqu'elle est extraite de $u_{\phi_1(k),1}$.
En réitérant n fois, on construit n fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_n$, strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telles que pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, la sous-suite $u_{\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(k),i}$ converge vers une limite l_i.
Comme pour tout $k > 0$, on a $\sum_{i=1}^n |u_{\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(k),i}| = 1$, en passant à la limite, on en déduit $\sum_{i=1}^n |l_i| = 1$, en particulier si on pose $l = \sum_{i=1}^n l_i e_i$, on a $N_1(l) = 1$, ainsi l est non nul, et donc comme N est une norme, on en déduit $N(l) > 0$.
Mais si on pose $v_k = \sum_{i=1}^n u_{\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(k),i} e_i$, on a

$$|N(v_k) - N(l)| \leq N(v_k - l) \leq bN_1(v_k - l) = \sum_{i=1}^{n} |u_{\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(k),i} - l_i|,$$

et ce dernier terme tend vers 0, donc $N(v_k)$ tend vers $N(l)$, ce qui est absurde car $N(v_k)$, qui est une sous-suite de $N(u_k)$, tend vers 0. □

1.2 Topologie de $\mathbb{R}^n$: ouverts et fermés

On va maintenant définir ce que sont les ensembles ouverts et fermés.
Intuitivement, un ensemble ouvert est un ensemble qui est "voisinage" de chacun de ses points, c'est à dire qu'aucun de ses points n'est à la "frontière" de l'ensemble.

Définition 1.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, et N une norme sur $\mathbb{R}^n$, on dit que U est un ouvert pour N si pour tout a dans U, il existe $r_a > 0$ tel que la boule ouverte $B_N(a, r_a)$ soit incluse dans U.*

Une conséquence évidente de l'équivalence des normes est que la définition précédente est en réalité indépendante de la norme N.

Proposition 1.2.1. *Soient N et N' deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte pour N si et seulement si elle l'est pour N'.*

Démonstration. Par symétrie des rà´les joués par N et N', il suffit de montrer une implication. On suppose donc U ouverte pour N. Alors il existe $b > 0$ tel que $N \leq bN'$, car N et N' sont équivalentes. Mais alors soit a dans U, par hypothèse il existe $r > 0$, avec $B_N(a, r) \subset U$, i.e. $N(x - a) < r \Rightarrow x \in U$, mais comme $N'(x - a) < r/b \Rightarrow N(x - a) < r$, on en déduit que $B_{N'}(a, r/b) \subset U$, et donc U est ouverte pour N'. □

On donne deux premiers exemples évidents d'ensembles ouverts :

Exemple 1.2.1. *L'espace total $\mathbb{R}^n$ est ouvert, en effet, soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors pour tout a dans $\mathbb{R}^n$, la boule $B_N(a, 1)$ est incluse dans $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 1.2.2. *L'ensemble vide $\varnothing$ est ouvert, en effet, pour tout a dans $\varnothing$, n'importe quelle propriété sur a est vérifiée.*

Un autre exemple classique et fondamental d'ensemble ouvert est celui d'une boule ouverte.

Proposition 1.2.2. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, a dans $\mathbb{R}^n$, et $r > 0$, alors $B_N(a, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. En effet, si x est dans $B_N(a, r)$, on note $d = N(x - a) < r$, et $d' = r - d > 0$, on va montrer que $B_N(x, d') \subset B_N(a, r)$, de telle sorte que $B_N(a, r)$ sera bien ouverte. Notre assertion découle du fait que si y est dans $B_N(x, d')$, i.e. $N(y - x) < d'$, alors $N(y - a) \leq N(y - x) + N(x - a) < d' + d = r$, et donc y appartient à $B_N(a, r)$. □

On définit maintenant ce qu'est un fermé.

Définition 1.2.2. *Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est dite fermée si son complémentaire $F^c = \mathbb{R}^n - F$ est un ouvert.*

Exemple 1.2.3. *Comme $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, en passant au complémentaire, on voit que ce sont aussi des fermés.*

Il est possible de caractériser la notion d'ouvert et de fermé en termes de suites convergentes, c'est ce que nous allons faire maintenant. Il faut cependant commencer par définir la convergence d'une suite de vecteurs.

Définition 1.2.3. *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$, et N une norme, on dit que x_k tend vers $l \in \mathbb{R}^n$ pour N, et on écrit $x_k \stackrel{N}{\to} l$ si $N(x_k - l)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.2.3. *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$, et $l \in \mathbb{R}^n$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$, telle qu'on ait $x_k \stackrel{N}{\to} l$.

ii) Pour toute norme N sur $\mathbb{R}^n$, on a $x_k \stackrel{N}{\to} l$.

iii) Pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, si on note $x_{k,i}$ la i-ème coordonnée de x_k, et l_i la i-ème coordonnée de l, alors $x_{k,i} \to l_i$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$: soit N une norme telle que $x_k \stackrel{N}{\to} l$, si N' est une autre norme sur $\mathbb{R}^n$, par équivalence des normes, il existe $b > 0$ tel que $N' \leq bN$, et donc $0 \leq N'(x_k - l) \leq bN(x_k - l)$. Mais comme les termes de droite et de gauche tendent vers 0, celui du milieu aussi, et donc

$x_k \stackrel{N'}{\to} l$.
$ii) \Rightarrow iii)$: on choisit $N = N_\infty$, alors $N_\infty(x_k - l) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_{k,i} - l_i|$, ainsi on a les équivalences :

$$(N_\infty(x_k - l) \to 0) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, |x_{k,i} - l_i| \to 0) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_{k,i} \to l_i).$$

La dernière assertion est celle de $iii)$.
$iii) \Rightarrow i)$: il suffit de prendre $N = N_\infty$, on vient de voir l'équivalence
$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_{k,i} \to l_i \iff N_\infty(x_k - l) \to 0$.

□

On définit comme dans $\mathbb{R}$, la notion de suite de Cauchy.

Définition 1.2.4. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, on dit que $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy pour N, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe m_ϵ dans $\mathbb{N}$, qui vérifie*

$$(k \geq m_\epsilon) \text{ et } (k' \geq m_\epsilon) \Rightarrow N(x_k - x_{k'}) < \epsilon.$$

On constate immédiatement que cette définition est indépendante de la norme choisie.

Proposition 1.2.4. *Soient N et N' deux normes sur $\mathbb{R}^n$, une suite $(x_k)_k$ est de Cauchy pour N si et seulement si elle est de Cauchy pour N'.*

Démonstration. Par symétrie de N et N', il suffit de montrer que si $(x_k)_k$ est de Cauchy pour N, elle l'est pour N'. Comme N et N' sont équivalentes, il existe $b > 0$, tel que $N' \leq bN$. Soit alors $\epsilon > 0$, comme $(x_k)_k$ est de Cauchy pour N, il existe m_e dans $\mathbb{N}$, tel que $(k \geq m_\epsilon)$ et $(k' \geq m_\epsilon)$ implique $N(x_k - x_{k'}) < \epsilon/b$, on en déduit que si $(k \geq m_\epsilon)$ et $(k' \geq m_\epsilon)$, alors $N'(x_k - x_{k'}) < \epsilon$, et $(x_k)_k$ est de Cauchy pour N'. □

On démontre comme pour $\mathbb{R}$ qu'une suite de convergente de $\mathbb{R}^n$ est toujours de Cauchy, il s'agit simplement de remplacer la valeur absolue $|\ |$ par une norme N dans la démonstration de la proposition.

Proposition 1.2.5. *Une suite de $\mathbb{R}^n$ convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Si $x_k \stackrel{N}{\to} l$, soit $\epsilon > 0$, il existe m_ϵ tel que $N(x_k - l) < \epsilon/2$ pour tout $k \geq m_\epsilon$. Mais alors si k et k' sont supérieurs ou égaux à m_ϵ, on a $N(x_k - x_{k'}) \leq N(x_k - l) + N(x_{k'} - l) < 2\epsilon/2 = \epsilon$, et $(x_k)_k$ est de Cauchy. □

Tout comme dans $\mathbb{R}$, la réciproque est vraie, i.e. $\mathbb{R}^n$ est complet.

Théorème 1.2.1. *Dans $\mathbb{R}^n$, une suite est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une suite de Cauchy $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge. On prend la norme $N = N_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout ϵ positif, on a $N_\infty(x_k - x'_k) < \epsilon$ pour k et k' plus grands qu'un certain m_ϵ. En regardant les coordonnées, ceci équivaut à , pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, on a $|x_{k,i} - x_{k',i}| < \epsilon$ dès que k et k' sont plus grands que m_ϵ, ainsi, chaque suite coordonnée $x_{k,i}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}$ étant complet, chaque suite $x_{k,i}$ converge vers une limite $l_i \in \mathbb{R}$, et x_k converge donc vers le vecteur l de coordonnées l_i. □

Revenons aux ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$, on peut désormais les caractériser en termes de suites convergentes.

Théorème 1.2.2 (caractérisation séquentielle des ouverts)**.** *Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$, alors U est ouverte si et seulement si pour tout a dans U, et toute suite $(x_k)_k$ de $\mathbb{R}^n$ qui tend vers a, tous les termes de x_k sont dans U à partir d'un certain rang, i.e. il existe m dans $\mathbb{N}$, tel que $x_k \in U$ pour $k \geq m$.*

Démonstration. • Si U est ouverte, que a appartient à U, et que $x_k \overset{N}{\to} a$ pour une norme N. Comme U est ouverte, il existe $r > 0$, tel que $B_N(a,r) \subset U$, mais comme x_k tend vers a, on a $N(x_k - a) < r$ pour k assez grand, i.e. $x_k \in B_N(a,r) \subset U$ pour k assez grand, ce qui démontre la première implication.
• On démontre la deuxième implication par contraposée, on suppose donc que U n'est pas ouverte, et on va construire une suite $(x_k)_k$ qui tend vers un élément a de U, mais dont aucun terme n'est dans U. On fixe une norme N sur $\mathbb{R}^n$.
Comme U n'est pas ouverte, il existe a dans U, tel que pour tout $r > 0$, la boule $B_N(a,r)$ n'est pas incluse dans U. Il existe donc pour tout r, un élément y_r dans $B(a,r)$, qui n'est pas dans U. On pose $x_k = y_{1/k}$, de telle sorte que x_k n'est jamais dans U, et pourtant $N(x_k - a) < 1/k$, donc x_k tend vers a, c'est ce qu'on voulait. □

On caractérise de même les fermés en termes de suites convergentes. La démonstration utilise le lemme évident suivant.

Lemme 1.2.1. *Soit x_k une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers l, alors toute sous-suite de x_k converge vers l.*

Démonstration. Soit $(x_{\phi(k)})_k$ une telle sous-suite, avec ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors pour tout k, on a $\phi(k) \geq k$. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, soit ϵ un réel positif, il existe m_ϵ tel que $k \geq m_\epsilon$ implique $N(x_k - l) < \epsilon$ puisque x_k tend vers l, mais alors $k \geq m_\epsilon$ implique $\phi(k) \geq k \geq m_\epsilon$, et $N(x_{\phi(k)} - l) < \epsilon$. CQFD. □

On montre alors.

Théorème 1.2.3 (caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$, elle est fermée si et seulement si elle contient la limite de toute suite de F qui converge, i.e. si et seulement si pour toute suite $(x_k)_k \subset F$, qui tend vers l, alors l est dans F.*

Démonstration. • Si F est fermée, et $x_k \to l$, avec x_k dans F. Si sa limite l appartenait $U = F^c$, comme U est ouvert (puisque F est fermé), tous les termes de x_k seraient dans F^c pour k suffisamment grand, ce qui est absurde puisqu'ils sont dans F. Donc l est dans F.
• Inversement si pour toute suite $(x_k)_k \subset F$, qui tend vers l, alors l est dans F. Supposons que F ne soit pas fermée, alors F^c n'est pas ouverte. Il existe alors, d'après la caractérisation séquentielle des ouverts, un élément a de F^c, et une suite x_k qui tend vers a, telle que pour tout m dans $\mathbb{N}$, il existe $k_m > m$ telle que x_{k_m} ne soit pas dans F^c, i.e. soit dans F. On pose $\phi(0) = k_0$, $\phi(1) = min\{k > \phi(0), x_k \in F\}$, et plus généralement $\phi(l+1) = min\{k > \phi(l), x_k \in F\}$, alors $x_{\phi(k)}$ est une sous-suite de x_k, elle converge donc vers $a \in F^c$, mais est à valeurs dans F, c'est absurde. □

Exemple 1.2.4 (exemple de partie non fermée)**.** *Dans $\mathbb{R}^n$, si N est une norme, la boule ouverte $B_N(0,1)$ n'est pas fermée, en effet, soit x un vecteur de norme 1 (un tel vecteur existe, par exemple si $y \neq 0$, alors $N(y) > 0$, et il suffit de poser $x = (1/N(y))y$). On pose $x_n = (1-1/n)x$ pour $n > 0$. Alors $N(x_n) = (1-1/n)N(x) = (1-1/n) < 1$, donc x_n est dans $B_N(0,1)$, mais on a $N(x_n - x) = N((-1/n)x) = 1/nN(x) = 1/n$, qui tend vers 0, donc x_n tend vers x. On en déduit que $B_N(0,1)$ n'est pas fermée car $N(x) = 1$, ce qui implique $x \notin B_N(0,1)$.*

Exemple 1.2.5 (exemple de partie non ouverte)**.** *On peut prendre le complémentaire de* $B_N(0,1)$ *d'après l'exemple précédent. On constate aussi que la boule fermée* $\bar{B}_N(0,1)$ *n'est pas ouverte. En effet, soit* x *de norme* 1*, alors pour* $n > 0$*, le vecteur* $x_n = (1+1/n)x$ *est de norme* $N(x_n) = (1+1/n)N(x) = 1+1/n > 1$*. Ainsi* x_n *n'est jamais dans* $\bar{B}_N(0,1)$*, et pourtant* $N(x_n - x) = N((1/n)x) = 1/n$ *tend vers* 0*, donc* x_n *tend vers* x*, et* $\bar{B}_N(0,1)$ *n'est pas ouverte d'après la caractérisation séquentielle des ouverts.*

On s'intéresse maintenant aux proriétés de stabilité par réunion et intersection pour les ouverts et les fermés.

Proposition 1.2.6. 1) *Soit* $(O_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque d'ouverts de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\cup_{i\in I} O_i$ *est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$*.*
2) *Soit* $(O_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'ouverts de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\cap_{i\in I} O_i$ *est une partie ouverte de* $\mathbb{R}^n$*.*
3) *Soit* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque de fermés de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\cap_{i\in I} F_i$ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^n$*.*
4) *Soit* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille finie de fermés de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\cup_{i\in I} F_i$ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^n$*.*

Démonstration. On fixe une norme N sur $\mathbb{R}^n$.
Pour le 1) : si tous les O_i sont vides, c'est clair car l'ensemble vide est ouvert.
Sinon soit a un élément de $\cup_{i\in I} O_i$, alors $a \in O_{i_0}$ pour i_0 dans I. Alors, comme O_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_N(a,r) \subset O_{i_0}$, d'où $B_N(a,r) \subset \cup_{i\in I} O_i$, et donc $\cup_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Pour le 2) : si un des O_i est vide, c'est clair.
Sinon on peut toujours choisir $I = \{1, \ldots, l\}$. Soit a dans $\cap_{i=1}^{l} O_i$. Alors comme chaque O_i est ouvert, il existe une famille de réels strictement positifs $r_1, \ldots, r_l$, tels que $B_N(a, r_i) \subset O_i$ pour tout i. Mais alors, si on pose $r = \min\limits_{i=1,\ldots,n} r_i$, alors $B_N(a,r) \subset O_i$ pour tout i, i.e. $B_N(a,r) \subset \cap_{i\in I} O_i$, et $\cap_{i\in I} O_i$ est ouverte.
3) se déduit de 1), et 4) se déduit de 2) par passage au complémentaire. □

Ces propriétés permettent de donner un sens au plus grand ouvert inclus dans une partie de $\mathbb{R}^n$, et au plus petit fermé contenant une partie de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.5 (Adhérence, intérieur)**.** *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^n$*, on note* $\bar{A}$*, et on appelle l'adhérence de* A*, l'intersection de tous les fermés qui contiennent* A*.*
On note A°*, et on appelle intérieur de* A*, la réunion de tous les ouverts inclus dans* A*.*

Proposition 1.2.7. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\bar{A}$ *est le plus petit fermé qui contient* A*, i.e.* $\bar{A}$ *est fermé, contient* A*, et il est inclus dans tout autre fermé qui contient* A*.*
De même A° *est le plus grand ouvert contenu dans* A*, i.e.* A° *est ouvert, inclus dans* A*, et il contient tout autre ouvert contenu dans* A*.*

Démonstration. Le fait que $\bar{A}$ soit fermé découle du fait qu'une intersection quelconque de fermés et fermée. Il est inclus dans tout autre fermé qui contient A par définition (c'est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A).
Le fait que A° soit ouvert découle du fait qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte. Il contient tout autre ouvert contenu dans A par définition (c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A).

□

On remarquera au passage les propriétés suivantes très utiles en pratique, bien qu'évidentes, de l'intérieur et de l'adhérence d'un ensemble.

Remarque 1.2.1. *Si F est fermé dans $\mathbb{R}^n$, et $A \subset F$, alors $\bar{A} \subset F$. De même si U est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et $U \subset A$, alors $U \subset A^\circ$.*
Si $A \subset \mathbb{R}^n$, alors A est ouverte si et seulement si $A = A^\circ$, et A est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.

L'adhérence d'un ensemble est reliée à l'intérieur de son complémentaire, et inversement.

Proposition 1.2.8. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, alors on a :*

1) $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$: le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire.

2) $(A^\circ)^c = \overline{(A^c)}$: le complémentaire de l'intérieur est l'adhérence du complémentaire.

Démonstration. Pour 1) : $(\bar{A})^c$ est un ouvert (car $\bar{A}$ est fermé), contenu dans A^c (car $A \subset \bar{A}$), on en déduit que $(\bar{A})^c$ est contenu dans l'intérieur $(A^c)^\circ$ de A^c.
Inversement, $(A^c)^\circ \subset A^c$, donc $A \subset ((A^c)^\circ)^c$, mais l'ensemble de droite est fermé, puisque c'est le complémentaire d'un ouvert, on a donc $\bar{A} \subset ((A^c)^\circ)^c$, puis $(A^c)^\circ \subset (\bar{A})^c$ en repassant au complémentaire.
Pour 2) : passer au complémentaire dans 1). □

On peut caractériser l'intérieur et l'adhérence en termes de boules ouvertes.

Proposition 1.2.9. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, et N une norme sur $\mathbb{R}^n$.*
Alors alors $x \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $r > 0$, l'ensemble $B_N(x,r) \cap A$ est non vide.
Si on suppose A° non vide, alors on a $x \in A^\circ$ si et seulement si, il existe $r > 0$, tel que $B_N(x,r) \subset A$

Démonstration. On prouve d'abord la propriété sur l'intérieur. Si existe $r > 0$, tel que $B_N(x,r) \subset A$, alors comme $B_N(x,r)$ est ouverte, on a $B_N(x,r) \subset A^\circ$, et donc $x \in A^\circ$.
Inversement, si $x \in A^\circ$, comme A° est ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B_N(x,r) \subset A^\circ$, et donc $B_N(x,r) \subset A$.
Pour l'adhérence, on utilise la proposition 1.2.8. Un vecteur x n'est pas dans $\bar{A}$ si et seulement si il est dans l'intérieur de A^c, i.e. si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_N(x,r) \subset A^c$, i.e. si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_N(x,r) \cap A = \varnothing$. On en déduit qu'un vecteur x est dans $\bar{A}$ si et seulement si pour tout $r > 0$, l'intersection $B_N(x,r) \cap A$ est non vide. □

On peut aussi caractériser l'intérieur et l'adhérence en termes de suites convergentes.

Proposition 1.2.10. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, non vide, alors $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite x_k de A, qui converge vers x.*
Si on suppose A° non vide, alors on a $x \in A^\circ$ si et seulement si, pour toute suite x_k qui tend vers x, alors x_k appartient à A pour k assez grand.

Démonstration. On prouve d'abord la propriété sur l'adhérence. Si il existe une suite x_k de A qui tend vers x, alors x_k est une suite de $\bar{A}$, et comme $\bar{A}$ est fermé, la limite x est dans $\bar{A}$.
Inversement, si x appartient à $\bar{A}$, alors si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, pour tout k, la boule $B_N(x, 1/k) \cap A$ est non vide, et donc il existe x_k dans cette intersection, qui tend bien évidemment vers x quand k tend vers l'infini.
Pour l'intérieur, si x est dans A°, alors il existe $r > 0$, tel que $B_N(x,r) \subset A$, et donc si x_k tend vers x, pour k assez grand, la norme $N(x - x_k)$ est strictement plus petite que r, et donc x_k est dans A pour k assez grand.
Pour la réciproque, on procède par contraposée. Soit x dans $\mathbb{R}^n$, et on suppose qu'il existe une suite x_k qui tend vers x, mais telle que tout m dans $\mathbb{N}$, il existe $k_m > m$ tel que x_{k_m} ne soit pas dans A. On pose alors $\phi(0) = min\{k, x_k \notin A\}$, $\phi_(1) = min\{k > \phi(0), x_k \notin A\}$,

puis récursivement $\phi(l+1) = min\{k > \phi(l), x_k \notin A\}$, chaque $\phi(l)$ étant bien défini, puisque par hypothèse sur la suite des x_k, c'est le minimum d'un ensemble non vide. Alors $(x_{\phi(k)})_k$ est extraite de $(x_k)_k$, elle converge donc aussi vers x, et chacun de ses termes est dans A^c. On en déduit que x est dans l'adhérence de A^c, i.e. dans $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$, et donc il n'appartient pas à A°. CQFD. □

Il est temps de donner des exemples.

Exemple 1.2.6. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, soit a dans $\mathbb{R}^n$, et $r > 0$, alors $\overline{B_N(a,r)} = \bar{B}_N(a,r)$, i.e. l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée.*

Démonstration. Comme on sait déjà que $\bar{B}_N(a,r)$ est fermée, et qu'elle contient $B_N(a,r)$, on en déduit $\overline{B_N(a,r)} \subset \bar{B}_N(a,r)$.
Inversement, si x est dans $\bar{B}_N(a,r)$, alors la suite $x_k = x-(x-a)/k$, pour $k > 0$, vérifie d'une part, $N(x_k - a) = (1-1/k)N(x-a) \leq (1-1/k)r < r$, donc $x_k \in B_N(a,r)$, et d'autre part $N(x_k - x) = 1/kN(x-a)$, qui tend vers 0, donc x_k tend vers x. On en déduit que x est dans $\overline{B_N(a,r)}$. □

On vérifie de même.

Exemple 1.2.7. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$, soit a dans $\mathbb{R}^n$, et $r > 0$, alors $\bar{B}_N(a,r)^\circ = B_N(a,r)$, i.e. l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte.*

Un dernier exemple.

Exemple 1.2.8. *Dans $\mathbb{R}$, on a $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, et $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$.*

Démonstration. Il est évident que $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$, on a de plus vu au chapitre zéro, que tout réel est la limite d'une suite de $\mathbb{Z}_{(10)} \subset \mathbb{Q}$, donc $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence.
Supposons maintenant que $\mathbb{Q}^\circ$ soit non vide, et soit x dans $\mathbb{Q}^\circ$, en particulier, x est rationnel. On pose $x_k = x + \sqrt{2}/k$, c'est une suite de nombre irrationnels qui tend vers x, ce qui contredit la carctérisation séquentielle des ouverts, c'est absurde. □

1.3 Topologie de $\mathbb{R}^n$: ensembles compacts

On va définir une notion qui généralise celle d'intervalle compact de $\mathbb{R}$. On commence par définir ce qu'est un ensemble borné :

Définition 1.3.1. *Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que X est bornée si elle vérifie une des propriétés équivalentes suivantes.*

i) Il existe une norme N et un réel $r > 0$, telle que $X \subset \bar{B}_N(0,r)$.

ii) Pour toute norme N, il existe un réel $r > 0$, telle que $X \subset \bar{B}_N(0,r)$.

L'équivalence de *i*) et *ii*) découle de l'équivalence des normes.

Exercice 1.3.1. *Une partie d'une partie bornée est bornée. Une intersection de bornés est bornée, une réunion finie de bornés est bornée.*

Exercice 1.3.2. *Montrer qu'une une boule fermée $\bar{B}_N(a,r)$ est bornée, donc qu'une boule ouverte $B_N(a,r)$ aussi.*

On peut mantenant donner une première définition de compacité.

Définition 1.3.2. *Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que K est compacte si elle est fermée et bornée.*

Exemple 1.3.1. *Une boule fermée est compacte.*

On a la carctérisation suivante des compacts.

Théorème 1.3.1. *Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *K est fermée est bornée.*

ii) *Quelle que soit la famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts, telle que $K \subset \cup_{i\in I} O_i$, il existe une partie finie J de I, telle que $K \subset \cup_{j\in J} O_j$.*

iii) *Toute suite de K admet une sous-suite qui converge dans K.*

Démonstration. On fixe une norme N sur $\mathbb{R}^n$.
On commence par montrer l'équivalence de i) et iii), qui porte à nouveau le nom de théorème de Bolzano-Weierstrass.
Si on suppose que K est fermée est bornée. Soit x_k une suite de K. Alors $N_\infty(x_k)$ est bornée, en particulier, il existe $r > 0$, tel que pour tout k, la i-ème coordonnée $x_{k,i}$ est inférieure ou égale à r en valeur absolue. Autrement dit, chaque suite $x_{k,i}$ est bornée.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}$, nous dit qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi_1(k),1})_k$ de $x_{k,1}$ qui converge vers une limite l_1. Mais $x_{\phi_1(k),2}$ est aussi bornée et adment donc une sous-suite $x_{\phi_1\circ\phi_2(k),2}$ qui converge vers l_2 dans $\mathbb{R}$.
De plus $x_{\phi_1\circ\phi_2(k),1}$ converge encore vers l_1, car elle est extraite de $x_{\phi_1(k),1}$.
En répètant cet argument, on obtient une fonction $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même, telle que $x_{\phi(k),i}$ converge pour tout i entre 1 et n vers une limite l_i.
On en déduit que la sous-suite $x_{\phi(k)}$ tend vers le vecteur l de coordonnées l_i. Mais comme $x_{\phi(k)}$ est une suite de K, et que K est fermée, on en déduit que l est dans K.
Inversement, si K n'est pas fermée et bornée, on montre qu'il existe une suite de K dont aucune sous-suite ne converge vers un élément de K.
Si K n'est pas fermée, alors K est strictement incluse dans $\bar{K}$, on prend x dans $\bar{K} - K$. Comme x est dans $\bar{K}$, il existe, d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, x_k dans K qui tend vers x, mais alors toute sous-suite de x_k tend aussi vers x, qui n'appartient pas à K.
Si K n'est pas bornée, alors pour tout $r > 0$, il existe x dans K de norme plus grande que r. Soit x_0 dans K. On choisit ensuite x_1 dans K de norme plus grande que $N(x_0) + 1$. Puis x_2 dans K de nomre plus grande que $N(x_2) + 1$, et on construit récursivement une suite de K, qui vérifie $N(x_{k+1}) \geq N(x_k) + 1$.
Si $k' > k$, on a $N(x_{k'} - x_k) \geq N(x_{k'}) - N(x_k) = N(x_{k'}) - N(x_{k'-1}) + \cdots + N(x_{k+1}) - N(x_k)$. On en déduit $N(x_{k'} - x_k) \geq (k' - k) \geq 1$. En particulier, si ϕ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même, on a pour tout k, l'inégalité $N(x_{\phi(k+1)} - x_{\phi(k)}) \geq 1$, et $x_{\phi(k)}$ n'est pas de Cauchy, donc pas convergente.
L'équivalence de ii) et iii) est difficile, on la donnera en annexe. □

On remarque que comme les fermés, les parties compactes sont stables par réunion finie et intersection quelconque.

Proposition 1.3.1. *Une intersection quelconque de partie compactes, tout comme une réunion finie de parties compactes, reste compacte.*

Démonstration. Ces propriétés ont été vérifiées pour les fermés, et sont triviales pour les bornés. □

Pour un ensemble qui vit à l'intérieur d'un compact, il est équivalent d'être fermé ou compact.

Proposition 1.3.2. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et $A \subset K$, alors A est fermée si et seulement si elle est compacte.*

Démonstration. Si A est fermée, elle est bornée car incluse dans K, elle est donc compacte. Inversement si elle est compacte, elle est fermée et bornée, en particulier fermée. $\square$

On termine ce pargraphe en donnant une dernière caractérisation de la compacité.

Remarque 1.3.1. *La propriété ii) dans le théorème 3.2.1, se traduit aussi de la manière suivante si on passe au complémentaire. Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est compacte si pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de compacts (ou de manière équivalente fermés) dans K, alors*

$$\cap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \ \exists\ J \subset I,\ J \textit{ finie},\ \cap_{j\in J} F_j = \emptyset.$$

1.4 Appendice : fonctions concaves et convexes

On rappelle ici, avec démonstration, quelques résultats importants sur les fonctions convexes et concaves. Tout d'abord les définitions.

Définition 1.4.1. *Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$, elle est dite concave (resp. convexe) sur I, si pour tout $x < y$ dans I, et tout t dans $[0,1]$, on a*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

(resp. $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$).

Géométriquement, dire que f est concave (resp. convexe), signifie qu'en tout point $z = tx + (1-t)y$ du segment $[x,y]$, le point $(z, f(z))$ du graphe de f est au dessus (resp. en dessous) du point $t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y))$ de la corde reliant les deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ du graphe de f (faire un dessin).

Remarque 1.4.1. *Il est évident d'après les définitions, qu'une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe, on se bornera donc désormais à ne parler que de fonctions concaves, les énoncés sur les fonctions convexes se déduisant de cette remarque.*

Le lemme suivant, parfois dit lemme des trois cordes (faire un dessin), est très utile pour démontrer des résultats sur les fonctions concaves et convexes.

Lemme 1.4.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction concave, on a alors pour tout triplet $x < y < z$ dans I :*

$$\frac{f(y) - f(x)}{(y - x)} \geq \frac{f(z) - f(x)}{(z - x)} \geq \frac{f(z) - f(y)}{(z - y)}.$$

Démonstration. Comme y appartient à l'intervalle $]x; z[$, il existe un unique t dans $]0; 1[$, tel que $y = tx + (1-t)z$, plus précisément $t = (z-y)/(z-x)$, et donc $1-t = (y-x)/(z-x)$. par concavité de f, on a alors $f(y) \geq tf(x) + (1-t)f(z)$, qui équivaut à $f(y) - f(x) \geq (1-t)(f(z) - f(x))$, on divise alors par $y - x$ et on obtient $\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)} \geq \frac{(1-t)}{(y-x)}(f(z) - f(x)) = \frac{f(z)-f(x)}{(z-x)}$, soit la première inégalité.
En repartant de $f(y) \geq tf(x) + (1-t)f(z)$, on obtient aussi $f(y) - f(z) \geq t(f(x) - f(z))$, et si on divise par $(y - z) < 0$, on obtient $\frac{t}{(y-z)}(f(x) - f(z)) \geq \frac{f(y)-f(z)}{(y-z)}$, soit $\frac{f(x)-f(z)}{(x-z)} \geq \frac{f(y)-f(z)}{(y-z)}$, qui équivaut à la deuxième inégalité. $\square$

Quand f est de classe $\mathcal{C}^1$, il est alors facile de caractériser la concavité.

Proposition 1.4.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, elle est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.*

Démonstration. Soit f est concave, et soit $x < y$ dans l'intérieur de I, le lemme des trois cordes implique que si $x < y$, en faisant tendre z vers y par valeur supérieure, l'inégalité $\frac{f(y)-f(x)}{(y-x)} \geq f'(y)$. Mais ce même lemme appliqué à $x < z < y$ pour z qui tend vers x, montre que $f'(x) \geq \frac{f(y)-f(x)}{(y-x)}$, ainsi on a $f'(x) \geq f'(y)$, et f' est décroissante sur l'intérieur de I, donc sur I car f' est continue.
Inversement, si f' est décroissante, soient $x < y$ dans I, la fonction $h(t) = f(tx + (1-t)y) - (tf(x) + (1-t)f(y))$ définie sur $[0; 1]$, vérifie $h'(t) = f'(tx + (1-t)y)(x-y) - (f(x) - f(y)) \leq f'(x)(x-y) - (f(x) - f(y))$ car f' est décroissante, et $(x-y)$ est négatif.
Mais on a $f'(x)(x-y) - (f(x) - f(y)) = (x-y)[f'(x) - \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}]$, et $\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}$ vaut $f'(c)$ pour c dans $[x, y]$ d'après le théorème des acroissements finis. Par décroissance de f', on en déduit $f'(x) - \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)} \geq 0$, et $f'(x)(x-y) - (f(x) - f(y)) \leq 0$, et h' est négative sur $[0; 1]$.
Mais alors $h(t) \geq h(1) = 0$ pour tout t dans $[0; 1]$, et f est bien concave. $\square$

Corollaire 1.4.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, elle est concave si et seulement si $f^{(2)}$ est négative sur I.*

Corollaire 1.4.2. *$Ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ est une fonction concave, car sa dérivée seconde est $x \mapsto -1/x^2$.*

Chapitre 2

Applications continues

2.1 Continuité, premières propriétés, premiers exemples

On commence par définir la continuité comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. *Soit a un élément d'une partie A de $(\mathbb{R}^n, N)$, f une application de A vers $(\mathbb{R}^m, N')$. Alors on dit que f est continue en a si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $N(x-a) < \eta$ pour x dans A, implique $N'(f(x) - f(a)) < \epsilon$.*

Bien sà»r la continuité en un point ne dépend pas des normes choisies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, en vertu de l'équivalence des normes.

On peut caractériser séquentiellement la continuité en un point.

Proposition 2.1.1. *Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Alors f est continue en $a \in A$, si et seulement si pour toute suite x_k de A qui tend vers a, alors $f(x_k)$ tend vers $f(a)$.*

Démonstration. On fixe des normes N sur $\mathbb{R}^n$, et N' sur $\mathbb{R}^m$. Si f est continue en a, et que x_k tend vers a dans A. Par continuité de f en a, pour tout $\epsilon > 0$, il existe η tel que $N(x-a) < \eta$ et $x \in A$, implique $N'(f(x) - f(a)) < \epsilon$. Mais pour k assez grand, x_k appartient à $B_N(a, \eta) \cap A$, et donc $N'(f(x_k) - f(a)) < \epsilon$, ce qui implique que $f(x_k)$ tend vers $f(a)$.
Pour la réciproque, on raisonne par contraposée. Supposons que f ne soit pas continue en a, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe u_η dans $B_N(a, \eta) \cap A$, et $N'(f(u_\eta) - f(a)) \geq \epsilon$. En posant $\eta = 1/k$, et $x_k = u_{1/k}$, on en déduit que x_k est une suite de A qui tend vers a, et pourtant $f(x_k)$ ne tend pas vers $f(a)$. □

On définit maintenant la continuité sur une partie de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.2. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}^m$, on dit que f est continue sur A si elle est continue en chaque point de A.*

Un première remarque immédiate est la suivante.

Proposition 2.1.2. *Soit $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, et f continue de B vers $\mathbb{R}^m$, alors la restriction $f_{|A}$ de f à A est continue.*

Démonstration. En effet, on si $a_n \in A$ tend vers $a \in A$, alors évidemment $a_n \to a$ dans B, et donc $f(a_n) \to f(a)$ puisque f est continue sur B. D'après la proposition 2.1.1, $f_{|A}$ est donc continue sur A. □

Composer deux fonctions continues redonne une fonction continue.

Proposition 2.1.3. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continue, et $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ continue, avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est continue sur A.*

Démonstration. Soit x_k une suite de A qui tend vers a dans A. Comme f est continue sur A, la suite $f(x_k)$ tend vers $f(a)$, de plus elle est à valeurs dans B. Comme g est continue sur B, on en déduit que $g(f(x_k)$ tend ver $g(f(a))$. Mais alors $g \circ f$ est continue sur a d'après la carctérisation séquentielle de la continuité. □

L'étude des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, se ramène souvent à celles des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, en utilisant les fonctions coordonnées.

Définition 2.1.3. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, f une fonction de A dans $\mathbb{R}^m$, et p_i la projection linéaire*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \mapsto x_i \in \mathbb{R},$$

alors on note f_i la fonction $p_i \circ f$, de telle sorte que pour tout x dans A, on ait

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}.$$

On dit que f_i est la i-ème fonction coordonnée de f.

Il est facile, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, de montrer qu'une fonction est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont.

Proposition 2.1.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}^m$, f est continue si et seulement si chaque f_i, pour i entre 1 et m, est continue.*

Démonstration. Ceci découle de : $f(x_n) \to f(a) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ f_i(x_n) \to f_i(a)$. □

Un exemple classique d'applications continues, est celui des applications lipschitziennes.

Définition 2.1.4. *Soit A une partie de $(\mathbb{R}^n, N)$, et $f : A \to (\mathbb{R}^m, N')$, on dit que f est lipschitzienne si il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout x et y dans A, alors*

$$N'(f(x) - f(y)) \leq cN(x - y).$$

Encore une fois, par équivalence des normes, cette définition ne dépend pas des normes N et N'. De plus, il est clair que si f est lipschitzienne sur A, et que $x_n \in A$ tend vers $x \in A$ (i.e. $N(x_n - x) \to 0$), alors $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ (car $0 \leq N'(f(x_n) - f(x)) \leq cN(x_n - x) \to 0$), ce qui prouve que les applications lipschitziennes sont bien continues.

Quand on cherche des exemples d'applications lipschitziennes, le plus simple est celui des normes.

Proposition 2.1.5. *Soit $N : (\mathbb{R}^n, N) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ une norme, alors N est lipschitzienne.*

Démonstration. En effet, on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ d'après l'inégalité triangulaire, ce qui dit exactement que N est lipschitzienne. □

Un autre exemple fondamental est celui des applications linéaires.

Théorème 2.1.1. *Soit f une application linéaire de $(\mathbb{R}^n, N)$ vers $(\mathbb{R}^m, N')$, elle est lipschitzienne (donc continue).*

Démonstration. Par équivalence des normes en dimension finie, on peut supposer que $N = N_1$, alors si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $N'(f(x)) = N'(f(\sum_{i=1}^n x_i e_i))$, qui est inférieure ou égale, par inégalité triangulaire, à $\sum_{i=1}^n N'(f(x_i e_i)) = \sum_{i=1}^n |x_i| N'(f(e_i))$. Ainsi, en posant $c = \max_{i=1,\ldots,n} N'(f(e_i))$, on a montré pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, les inégalités

$$N'(f(x)) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N'(f(e_i)) \leq c \sum_{i=1}^n |x_i| = cN_1(x).$$

On en déduit, par linéarité de f, que $N'(f(x) - f(y)) = N'(f(x - y)) \leq cN_1(x - y)$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$, et f est donc lipschitzienne. $\square$

Les applications lipschitziennes vérifient une propriété plus forte que la continuité, elles sont uniformément continues, avant de vérifier cela, il faut savoir qu'uniformément continu veut dire.

Définition 2.1.5. *Soit f une application de $A \subset (\mathbb{R}^n, N)$ vers $(\mathbb{R}^m, N')$. Alors f dite uniformément continue sur A, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que si x et y sont dans A, alors $N(x - y) < \eta \Rightarrow N'(f(x) - f(y)) < \epsilon$.*

Exercice 2.1.1. *Montrer qu'une application lipschitzienne est uniformément continue.*

On termine par un dernier exemple typique, d'applications continues.

Définition 2.1.6. *Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, on dit que f est polynômiale si pour chaque i entre 1 et m, il existe un polynôme P_i dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, tel que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n)$.*

On admet qu'une application polynômiale est continue.

On admet aussi les règles suivantes, concernant les opérations sur les fonctions continues :

Proposition 2.1.6. *(Opérations préservant la continuité) Soient f et g deux application continues de $A \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$. Alors :*

1) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda f + g : A \to \mathbb{R}^m$ est encore continue (i.e. les applications continues de A vers $\mathbb{R}^m$ forment un $\mathbb{R}$-SEV des applications de A vers $\mathbb{R}^m$).

2) Si $m = 1$: l'application $fg : A \to \mathbb{R}$ est encore continue.

3) Si $m = 1$: alors l'application $f/g : \{x \in A, g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ est encore continue.

2.2 Topologie d'une partie de $\mathbb{R}^n$

Il sera pratique de définir ce que veut dire ouvert et fermé dans une partie de $\mathbb{R}^n$. On commence à introduire une notation pour les boules ouvertes dans les parties de $\mathbb{R}^n$, qui ressemblent de moins en moins à des boules.

Définition 2.2.1. *Soit A une partie de $(\mathbb{R}^n, N)$, $a \in A$, et $r \geq 0$, on note*

$$B_N^A(a, r) = B_N(a, r) \cap A = \{x \in A, N(x - a) < r\},$$

et de même on note

$$\bar{B}_N^A(a, r) = \bar{B}_N(a, r) \cap A = \{x \in A, N(x - a) \leq r\}.$$

On remarque au passage que la définition de continuité peut s'exprimer en termes de telles boules :

Remarque 2.2.1. *Soit $f : A \subset (\mathbb{R}^n, N) \to (\mathbb{R}^m, N')$, elle est continue en $a \in A$, si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $f(B_N^A(a, \eta)) \subset B_{N'}(a, \epsilon)$.*

On définit maintenant les ouverts et les fermés de A.

Définition 2.2.2. *Soit A une partie de $(\mathbb{R}^n, N)$.*
***Ouverts de** A : on dit que $U \subset A$ est ouverte dans A, si pour tout a dans U, il existe $r_a > 0$, tel que $B_N^A(a, r_a) \subset A$.*
***Fermés de** A : on dit que $F \subset A$ est fermée dans A si $A - F$ est ouverte dans A.*

Cette définition est indépendante de N par équivalence des normes. On peut caractériser de telles parties, en termes d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.*
Une partie $U \subset A$ est ouverte dans A, si et seulement si il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ tel que $U = A \cap O$.
Une partie $F \subset A$ est fermée dans A, si et seulement si il existe un fermé G de $\mathbb{R}^n$ tel que $F = A \cap G$.

Démonstration. On fixe une norme N sur $\mathbb{R}^n$.
Si U est ouverte dans A, alors pour tout x dans U, il existe $r_x > 0$, tel que $B_N^A(x, r_x) \subset U$, ainsi on a $U \subset \bigcup_{x \in U} B_N^A(x, r_x) \subset U$, soit $U = \bigcup_{x \in U} B_N^A(x, r_x)$. On peut réécrire cela comme : $U = \bigcup_{x \in U} B_N^A(x, r_x) = \bigcup_{x \in U} (B_N(x, r_x) \cap A) = (\bigcup_{x \in U} B_N(x, r_x)) \cap A$. On pose alors $O = \bigcup_{x \in U} B_N(x, r_x)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, comme réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, et on a donc $U = A \cap O$.
Inversement, si O est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et que $a \in A \cap O$. Comme $a \in O$, il existe $r_a > 0$, tel que $B_N(a, r_a) \subset O$, donc $B_N^A(a, r_a) = A \cap B_N(a, r_a) \subset A \cap O$, et $A \cap O$ est donc un ouvert de A.
Finalement, F est fermée dans A si et seulement si $A - F$ est ouverte dans A, donc si et seulement si il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^n$, tel que $A - F = A \cap O$, i.e. $F = A - (A \cap O) = A \cap (\mathbb{R}^n - O)$. Ainsi F est fermée dans A si et seulement si il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ tel que $F = A - (A \cap O) = A \cap (\mathbb{R}^n - O)$, autrement dit si et seulement si il existe un fermé $G (= \mathbb{R}^n - O)$ de $\mathbb{R}^n$, tel que $F = A \cap G$. $\square$

Exercice 2.2.1. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, montrer que la partie vide $\varnothing$ est ouverte et fermée dans A, tout comme A est elle-même ouverte et fermée dans A.*

Exercice 2.2.2. *Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, montrer que si $X \subset B$ est ouverte (resp. fermée) dans B, alors $X \cap A$ est ouverte (resp. fermée) dans A.*

Exercice 2.2.3. *Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, montrer que si $X \subset A$ est ouverte (resp. fermée) dans A, alors X n'est en général pas ouverte (resp. fermée) dans B. Montrer que cette propriété est par contre vérifiée si on suppose B ouverte (resp. fermée).*

On a aussi des caractérisations par les suites des ouvertes et fermés de A.

Proposition 2.2.2. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$.*
Une partie U est ouverte dans A si et seulement si pour tout a dans U, et toute suite a_n de A qui tend vers a, alors a_n est dans U pour n assez grand.
Une partie F est fermée dans A si et seulement si pour toute suite x_n d'éléments de F qui converge vers un élément x de A, alors x est dans F.

Démonstration. Les démonstrations de ces propriétés sont identiques à celles du cas $A = \mathbb{R}^n$. $\square$

On peut alors donner les caractérisations suivantes de la continuité.

Proposition 2.2.3. *Soit f une application de $A \subset (\mathbb{R}^n, N)$ vers $(\mathbb{R}^m, N')$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) l'application f est continue sur A.

ii) Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A.

iii) Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de A.

Démonstration. L'équivalence de *ii*) et *iii*) découle du fait que pour toute partie X de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\mathbb{R}^n - X) = A - f^{-1}(X)$.
Il suffit donc de démontrer l'équivalence de *i*) et *ii*).
Si f est continue, alors si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que $a_n \in A$ tend vers x dans $f^{-1}(U)$, par continuité de f, la suite $f(a_n)$ tend vers $f(x) \in U$, et donc $f(a_n)$ est dans U (car U est ouvert dans $\mathbb{R}^m$) pour n assez grand. On en déduit que a_n est dans $f^{-1}(U)$ pour n assez grand, et $f^{-1}(U)$ est donc ouverte dans A.
Inversement, on suppose que $f^{-1}(U)$ est ouverte dans A pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^m$. En particulier, si on se donne a dans A, et $\epsilon > 0$, la partie $f^{-1}(B_{N'}(f(a), \epsilon))$ est un ouvert de A qui contient a. Il existe donc $\eta > 0$, tel que $B_N^A(a, \eta) \subset f^{-1}(B_{N'}(f(a), \epsilon))$, i.e. $f(B_N^A(a, \eta)) \subset B_{N'}(f(a), \epsilon)$, et f est continue en a. La fonction f est donc continue sur A. $\square$

Toutes les propriétés qu'on a vu pour les ouverts (fermés) de $\mathbb{R}^n$, restent vraies pour ouverts (fermés) d'une partie A de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2.4. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.*

a) Une réunion quelconque d'ouverts de A est ouverte dans A, une intersection finie d'ouverts de A est ouverte dans A.

b) Une intersection quelconque de fermés de A est fermée dans A, une réunion finie de fermés de A est fermée dans A.

c) Si $X \subset A$, la réunion de tous les ouverts de A inclus dans X est le plus grand ouvert de A inclus dans X (il contient tous les autres), on l'appelle l'intérieur de X dans A, et on le note $(X)^{\circ, A}$. Un élément x est dans $X^{\circ, A}$ si et seulement si toute suite de A qui tend vers x, a tous ses termes dans X pour n assez grand.

d) Si $X \subset A$, l'intersection de tous les fermés de A contenants X est le plus petit fermé de A contenant X (il est inclus dans tous les autres), on l'appelle l'adhérence de X dans A, et on le note $\overline{X}^A$. Un élément $a \in A$ est dans $\overline{X}^A$ si et seulement si il existe une suite x_n de X, telle que $x_n \to a$.

Démonstration. Pour *a*) et *b*), il suffit de se rappeler que les ouverts (fermés) de A sont de la forme $A \cap O$, avec O ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($A \cap G$, avec G fermé de $\mathbb{R}^n$), et d'utiliser le fait que la propriété est vérifiée pour les ouverts (fermés) de $\mathbb{R}^n$.
Les démonstrations des propriétés *c*) et *d*) sont des adaptations directes des propriétés déja connues dans le cas de $A = \mathbb{R}^n$. $\square$

Exercice 2.2.4. *Montrer que si $X \subset A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, alors $\overline{X}^A = \overline{X}^B \cap A$, et $X^{\circ, A} = X^{\circ, B} \cap A$.*

Exercice 2.2.5. *Montrer que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ est continue, et que $X \subset A$, alors $f(\overline{X}^A) \subset \overline{f(X)}^B$.*

2.3 Continuité et compacité

On donne un premier théorème sur les fonctions continues sur un compact, qui généralise le théorème bien connu pour les fonctions continues d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et f continue de K dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. Si f n'est pas bornée, pour tout k dans $\mathbb{N}$, il existe x_k dans K tel que $|f(x_k)| \geq k$. Ainsi on a défini une suite x_k de K, qui vérifie $|f(x_k)| \geq k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Mais comme K est compact, il existe une sous-suite $x_{\phi(k)}$ de x_k qui converge vers un élément l de K. Or par continuité de f, on devrait avoir $f(x_{\phi(k)}) \to f(l)$ quand $k \to \infty$, ce qui est absurde puisque $f(x_{\phi(k)}) \geq x_{\phi(k)} \geq k$. Donc f est bornée.
Montrons simplement que f atteint son maximum, le raisonnement pour montrer qu'elle atteint son minimum étant similaire.
Soit $s = sup_{x \in K} f(x)$. Par définition du *sup*, il existe une suite y_k d'éléments de $f(K)$, qui tend vers s, i.e. il existe une suite x_k d'éléments de K, telle que $y_k = f(x_k)$ tende vers s. Mais comme K est compact, on extrait de x_k une sous-suite $x_{\phi(k)}$ qui converge vers l dans K, et alors $f(x_{\phi(k)})$ tend vers $f(l)$ par continuité de f. Mais $f(x_{\phi(k)})$ tend aussi vers s, en tant que sous-suite extraite de $f(x_k)$, on a $f(l) = s$, donc f atteint son maximum en l. $\square$

Plus généralement, l'image continue d'un compact est compacte.

Théorème 2.3.2. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et f continue de K dans $\mathbb{R}^m$, alors $f(K)$ est compacte.*

Démonstration. Il suffit de montrer que de toute suite de $f(K)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $f(K)$. Soit donc y_n est une suite de $f(K)$, tout y_n s'écrit $f(x_n)$, avec x_n dans K. Comme K est compact, x_n admet une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers x dans K. Comme f est continue, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tend vers $y = f(x) \in K$. CQFD $\square$

On termine par le théorème de Heine.

Théorème 2.3.3. *Soit K un compact de $(\mathbb{R}^n, N)$, et f continue de K dans $(\mathbb{R}^m, N')$, alors f est uniformément continue sur K.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Si à§a n'était pas le cas, il existerait $\epsilon > 0$, tel que pour tout $\eta > 0$, on pourrait trouver x_η et y_η dans K, vérifiant $N(x_\eta - y_\eta) < \eta$, et $N'(f(x_\eta) - f(y_\eta)) \geq \epsilon$.
En posant $u_n = x_{1/n}$, et $v_n = y_{1/n}$, on aurait $N(u_n - v_n) < 1/n$. Mais par compacité de K, on pourrait extraire $u_{\phi(n)}$ de u_n, qui tend vers u dans K, et comme $N(u_{\phi(n)} - v_{\phi(n)}) < 1/\phi(n) < 1/n$, on en déduirait que $v_{\phi(n)}$ tend aussi vers u. Ainsi on aurait

$$0 \leq N'(f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)})) \leq N'(f(u_{\phi(n)}) - f(u)) + N'(f(v_{\phi(n)}) - f(u)) \to 0$$

par continuité de f. Ceci contredirait la condition $N'(f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)})) \geq \epsilon$.

$\square$

2.4 Connexité par arcs et convexité

Une partie de $\mathbb{R}^n$ est dite connexe par arc, si deux points de cette partie sont joignables par un "chemin continu" qui ne sort pas de cette partie, cette notion peut-être vue comme une généralisation de la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 2.4.1. *Soit a et b dans $\mathbb{R}^n$, on appelle chemin continu de a à b une application continue γ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\gamma(0) = a$, et $\gamma(1) = b$.*

Ainsi, on définit comme suit la connexité par arcs.

Définition 2.4.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on dit que A est connexe par arcs si pour tout couple (a,b) de points de A, il existe un chemin continu γ de a à b, tel que $Im(\gamma) \subset A$.*

On donne maintenant un exemple important de chemin continu entre deux points.

Définition 2.4.3. *Soit a et b dans $\mathbb{R}^n$, et γ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$, définie par $\gamma(t) = (1-t)a + tb$. On dit que γ est le segment qui joint a à b, en on note $[a,b]$ son image.*

En rempalà§ant chemin par segment dans la définition de connexe par arcs, on obtient la définition de convexe.

Définition 2.4.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on dit que A est convexe si pour tout couple (a,b) de points de A, alors $[a,b] \subset A$.*

Comme un segment est continu (exercice), il est clair qu'une partie convexe est connexe par arcs. La réciproque n'est bien entendu pas vraie.

Exercice 2.4.1. *Considérons $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Il est clair que le segment γ qui joint $(-1,0)$ à $(1,0)$ vérifie $\gamma(1/2) = (0,0)$, ainsi son image n'est pas incluse dans A. Par contre soient a et b deux points de A, si a, b et 0 ne sont pas alignés, alors par définition, $[a,b] \subset A$. Sinon a, b et $(0,0)$ sont alignés, et on note c un point hors de la droite (a,b). Vérifier que $\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)a + 2tc \text{ si } t \in [0,1/2[\\ (2-2t)c + (2t-1)b \text{ si } t \in [1/2,1] \end{cases}$ est un chemin continu de a à b dans A. En déduire que A est connexe par arcs, mais pas convexe.*

Exercice 2.4.2. *Montrer que dans $\mathbb{R}$, une partie est connexe par arcs si et seulement si elle est convexe, i.e. si et seulement si c'est un intervalle. En particulier, $A = \{0,1\}$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathbb{R}$.*

Le théorème suivant généralise le théorème des valeurs intermédiares.

Théorème 2.4.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie connexe par arcs, et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une application continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient y et y' deux points de $f(A)$, alors il existe a et a' dans A tels que $y = f(a)$ et $y' = f(a')$. Comme A est connexe par arcs, il existe un chemin continu γ entre a et a', à valeurs dans A, mais alors $\delta = f \circ \gamma$, est un chemin continu entre y et y' à valeurs dans $f(A)$, et $f(A)$ est connexe par arcs. $\square$

Exercice 2.4.3. *Expliquer pourquoi il existe une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Cette bijection peut-elle être continue (indication : si f est la bijection, considérer $f(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$) ?*

Chapitre 3

Applications différentiables

3.1 Différentiablilité et dérivées partielles

On commence par rappeler la définition de dérivabilité pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a, si le taux d'accroissement*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a une limite l quand h tend vers 0, on note alors $l = f'(a)$, c'est la dérivée de f en a.

Une première remarque, est que choisir U ouvert, implique que $a+h$ est dans U pour h petit.

On va reformuler la condition de dérivabilité de manière un peu différente, en termes de développement limité de f en a.
Si U et a sont comme dans la définition, dire que f est dérivable en a, signifie que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, i.e. que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = o(1)$ quand h tend vers 0.
On peut réécrire cela $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ quand h tend vers 0.
On constate alors que l'application $L : h \mapsto f'(a)h$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
Ainsi, si f est dérivable en a, il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$ quand h est proche de 0. Inversement, supposons que f admette un développement de la forme $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$ pour h proche de zéro, et L linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui même étant les homotéties, il existe l dans $\mathbb{R}$, tel que $f(a+h) = f(a) + lh + o(h)$, et donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - l = o(1)$ pour h petit.
On en déduit que f est dérivable en a, et que $l = f'(a)$.

On vient de montrer le résultat suivant :

Proposition 3.1.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$.
Alors f est dérivable en a, si et seulement si il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$, lorsque h est proche de zéro. De plus si L linéaire vérifie ces propriétés, elle est unique, et on a $L(h) = f'(a)h$.*

C'est cette définition que l'on va généraliser aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
Avant cela, il faut donner un sens à "être négligeable devant" h en 0, pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 3.1.2. *Soit* $\epsilon : U \subset (\mathbb{R}^n, N) \to (\mathbb{R}^m, N')$*, où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *qui contient* $0_{\mathbb{R}^n}$*. On notera* $\epsilon(h) = o(h)$ *au voisinage de* 0*, si la quantité* $\frac{1}{N(h)}\epsilon(h)$ *tend vers* $0_{\mathbb{R}^m}$ *quand* h *tend vers* $0_{\mathbb{R}^n}$ *(i.e. quand* $N(h) \to 0 \in \mathbb{R}$*).*
Autrement dit, $\epsilon(h) = o(h)$ *en* $0_{\mathbb{R}^n}$ *si et seulement si* $N'(\epsilon(h))/N(h) \to 0_{\mathbb{R}}$ *quand* $N(h) \to 0_{\mathbb{R}}$*.*

Bien sà»r, cette définition est indépendante de N et N' par équivalence des normes.

Exercice 3.1.1. *Montrer que si deux applications* ϵ *et* ϵ' *de* U *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *contenant* 0 *vers* $\mathbb{R}^m$*, sont des* $o(h)$ *en* 0*, alors il en est de même de* $\lambda\epsilon + \epsilon'$*, pour tout* λ *dans* $\mathbb{R}$*.*

On peut maintenenat définir ce que différentiable en un point, veut dire pour une application entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.1.3. *(Différentiabilité en un point)*
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert, soit* $a \in U$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^m$*.*
On dit que f *est défférentiable en* a*, si il existe une application linéaire* L *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$*, et* ϵ *de* U *dans* $\mathbb{R}^m$*, avec* $\epsilon(h) = o(h)$ *(au voisinage de* $0_{\mathbb{R}^n}$*), telles que*

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)$$

lorsque h *est proche de zéro.*

On remarque que comme U est ouvert, $a + h$ est dans U pour h petit.

Remarque 3.1.1 (importante). *Avec les notations de la définition précédente, il est clair que si* f *est différentiable en* a*, elle est continue en ce point. En effet, on a* $L(h) \to L(0) = 0$ *lorsque* $h \to 0$ *par continuité des applications linéaires. De même* $o(h) \to 0$ *lorsque* $h \to 0$*, on en déduit que* $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h) \to f(a)$ *lorsque* $h \to 0$*, et donc que* f *est continue en* a*.*

On va maintenant montrer que l'application linéaire L dans la proposition précédente est unique.

Proposition 3.1.2. *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert, soit* $a \in U$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *différentiable en* a*. Alors si* L_1 *et* L_2 *sont deux applications linéaires de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$*, qui vérifient* $f(a + h) = f(a) + L_i(h) + o(h)$*, alors* $L_1 = L_2$*.*

Démonstration. Soient deux applications ϵ_i de U vers $\mathbb{R}^m$, le $o(h)$ tel que $f(a + h) = f(a) + L_i(h) + \epsilon_i(h)$, on en déduit en faisant la différence des deux développements, que $(L_2 - L_1)(h) = \epsilon_1(h) - \epsilon_2(h)$, or $\epsilon_1(h) - \epsilon_2(h) = o(h)$, donc $(L_2 - L_1)(h) = o(h)$ au voisnage de $0_{\mathbb{R}^n}$.
Or si $x \neq 0$ est dans $\mathbb{R}^n$, tx tend vers $0_{\mathbb{R}^n}$ lorsque $t \to 0^+_{\mathbb{R}}$.
Mais alors on doit avoir $\frac{1}{N(x)}(L_2 - L_1)(x) = \frac{1}{N(tx)}(L_2 - L_1)(tx) \to 0$ lorsque $t \to 0^+_{\mathbb{R}}$. Mais la quantité $\frac{1}{N(x)}(L_2 - L_1)(x)$ ne dépend pas de t, donc elle est nulle, et $(L_2 - L_1)(x)$ est nulle. L'application linéaire $L_2 - L_1$ est donc nulle sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, et donc sur $\mathbb{R}^n$ (car $(L_2 - L_1)(0) = 0$ par linéarité), on en déduit que $L_2 = L_1$.

□

On définit alors la différentielle d'une fonction en un point.

Définition 3.1.4. *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert, soit* $a \in U$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *différentiable en* a*. Alors l'unique application linéaire* L *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$*, qui vérifie* $f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h)$*, est appelée la différentielle de* f *en* a*, et notée* $L = D_a f$*.*

Commenà§ons par quelques exemples.

Exemple 3.1.1. *Une application linéaire* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, est différentiable en tout point* a *de* $\mathbb{R}^n$*, et* $D_aL = L$*.*

Démonstration. On a $L(a+h) = L(a) + L(h) + 0$, mais la fonction nulle $h \in \mathbb{R}^n \mapsto 0 \in \mathbb{R}^m$ est bien évidemment un $o(h)$, et L étant linéaire, on en déduit que L est différentiable en a, et vérifie $D_aL = L$ par unicité. □

Exemple 3.1.2. *Une application constante* $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto y_0 \in \mathbb{R}^m$*, est différentiable en tout point* a *de* $\mathbb{R}^n$*, et vérifie* $D_af = 0$*, où* 0 *désigne l'élément nul de l'espace vectoriel* $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *des applications linéaires de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$*.*

Démonstration. On a pour tout h dans $\mathbb{R}^n$, $y_0 = f(a+h) = f(a) + 0 + 0$, le résultat s'en suit, par unicité du développement en $h = 0$, d'une application différentiable en a. □

On va maintenant définir la notion de dérivée (partielle) selon un vecteur, en un point.

Définition 3.1.5. *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert, soit* $a \in U$*,* $v \in \mathbb{R}^n$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^m$*.*
On dit que f *admet une dérivée (partielle) en* a*, selon* v*, si la quantité* $\frac{1}{t}[f(a+tv) - f(a)]$ *admet une limite lorsque* $t \to 0 \in \mathbb{R}$*, on note alors cette limite* $\partial_v f(a)$*, et on appelle* $\partial_v f(a)$ *la dérivée de* f *en* a *selon* v*.*

Remarque 3.1.2. *D'après la définition précédente, il est évident que si* v *est le vecteur nul,* f *admet une dérivée en* a *selon* $v = 0$*, et que* $\partial_{v=0} f(a) = 0$*.*

On commence par constater qu'une fonction différentiable en un point, admet des dérivées partielles selon tous les vecteurs en ce point.

Proposition 3.1.3. *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $a \in U$*,* $v \in \mathbb{R}^n$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *différentiable en* a*. Alors* f *est dérivable en* a *selon* v*, et* $\partial_v f(a) = D_af(v)$*.*

Démonstration. Par définition, on a $f(a+h) = f(a) + D_af(h) + o(h)$ lorsque h tend vers 0. En appliquant cela à $h = tv$, avec $v \neq 0$, et $t \to 0 \in \mathbb{R}$, alors on a $f(a+tv) = f(a) + tD_af(v) + o(tv)$, soit $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = D_af(v) + \frac{o(tv)}{t}$. Or pour N une norme sur $\mathbb{R}^n$, on a $\frac{o(tv)}{N(tv)} = \frac{o(tv)}{|t|N(v)} \to 0$, d'où $\frac{o(tv)}{t} \to 0$. On en déduit que $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \to D_af(v)$ lorsque $t \to 0$. Ainsi, f admet une dérivée en a selon v, et $\partial_v f(a) = D_af(v)$ si $v \neq 0$. Si $v = 0$, on a déja remarqué que $\partial_{v=0} f(a) = 0 = D_af(0)$, la dernière égalité découlant de la linéarité de D_af. □

La réciproque de ce résultat n'est pas vraie, comme le montre l'exercice suivant.

Exemple 3.1.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, définie par* $f(0,0) = 0$*, et* $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$*.*

1. *Montrer que* f *est continue en* $(0,0)$*.*
2. *Montrer que* f *admet en* $(0,0)$*, des dérivées partielles selon chaque vecteur* v *de* $\mathbb{R}^2$*, et que* $\partial_v f(0,0) = f(v)$ *pour tout* v *de* $\mathbb{R}^2$*.*
3. *En déduire que* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$*.*

On constate maintenant que pour étudier la différentiablilté d'une fonction en un point, il suffit d'étudier la différentiabilité de ses fonctions coordonnées.

Proposition 3.1.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, soit $f : U \to \mathbb{R}^m$, et $f_1, \dots, f_m$, les fonctions coordonnées de f. Alors :*

- *f est différentiable en a si et seulement si les f_i le sont. Dans ce cas, on a pour tout h dans $\mathbb{R}^n$, $D_a f(h) = \begin{pmatrix} D_a f_1(h) \\ \vdots \\ D_a f_m(h) \end{pmatrix}$.*
- *f est dérivable en a selon le vecteur v de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les f_i le sont. Dans ce cas, on a $\partial_v f(a) = \begin{pmatrix} \partial_v f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_v f_m(a) \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Pour le premier point, si f est différentiable en a, alors on a $f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + \epsilon(h)$, ave ϵ négligeable devant h. En notant $(D_a f)_i$ et ϵ_i les fonctions coordonnées de $D_a f$ et ϵ, ceci équivaut à $f_i(a+h) = f_i(a) + (D_a f)_i(h) + \epsilon_i(h)$. Comme $\epsilon(h)/N(h) \to 0$ dans $\mathbb{R}^m$, lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$, on en déduit chacune de ses coordonnées $\epsilon_i(h)/N(h) \to 0$ dans $\mathbb{R}$ lorsque h tend vers 0, i.e. que les ϵ_i sont des $o(h)$. De plus $(D_a f)_i = p_i \circ D_a f$, où p_i est la projection linéaire telle que $p_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$, on en déduit que $(D_a f)_i$ est linéaire. Il s'en suit, par unicité, que f_i est différentiable en h, et que $D_a f_i = (D_a f)_i$.
Toujours pour le premier point, si chaque f_i est différentiable en a, on a

$$f_i(a+h) = f_i(a) + D_a f_i(h) + \epsilon_i(h),$$

où $\epsilon_i(h)/N(h)$ tend vers 0 en 0. Mais alors, on a

$$f(a+h) = \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_a f_1(h) \\ \vdots \\ D_a f_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1(h) \\ \vdots \\ \epsilon_m(h) \end{pmatrix}.$$

Or il est clair que $h \mapsto \begin{pmatrix} D_a f_1(h) \\ \vdots \\ D_a f_m(h) \end{pmatrix}$ est linéaire, de plus $\epsilon(h) = \begin{pmatrix} \epsilon_1(h) \\ \vdots \\ \epsilon_m(h) \end{pmatrix}$ est un $o(h)$ puisque chacune de ses fonctions coordonnées l'est. On en déduit que f est différentiable en a, et que $D_a f(h) = \begin{pmatrix} D_a f_1(h) \\ \vdots \\ D_a f_m(h) \end{pmatrix}$ pour tout h dans $\mathbb{R}^n$. Pours le second point, on écrit

$$\frac{1}{t}[f(a+tv) - f(a)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}[f_1(a+tv) - f_1(a)] \\ \vdots \\ \frac{1}{t}[f_m(a+tv) - f_m(a)] \end{pmatrix}.$$

Le membre de droite a une limite $l = \partial_v f(a)$ en $t = 0$, si et seulement si chaque coordonnée du membre de gauche a une limite $l_i = \partial_v f_i(a)$ en $t = 0$, et alors $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$, d'où la conclusion. □

On utilisera souvent les notations suivantes lorsqu'on dérivera f en a, selon un vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_{e_i} f(a) = \partial_i f(a) = \partial_{x_i} f(a).$$

La proposition suivante est très utile en pratique.

Proposition 3.1.5. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$. Alors $I_{a,v,U} = \{t \in \mathbb{R}, a + tv \in U\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0, de plus, f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur v de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si la fonction*

$$u_f : t \in I_{a,v,U} \mapsto f(a + tv) \in \mathbb{R}$$

est dérivable 0, et on a dans ce cas $\partial_v f(a) = u_f'(0)$.

Démonstration. L'ensemble $I_{a,v,U}$ est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert U par l'application continue $t \mapsto a + tv$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Le reste est une conséquence immédiate de l'égalité

$$(f(a + tv) - f(a))/t = (u_f(t) - u_f(0))/t.$$

□

Pour les dérivées partielles selon un vecteur de la base canonique, on utilise plutà´t la version suivante du lemme précédent.

Proposition 3.1.6. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$. Alors f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si la fonction*

$$g : t \in I_{a,e_i,U} \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}$$

est dérivable a_i, et alors $\partial_i f(a) = g'(a_i)$.

Démonstration. Conséquence immédiate de l'égalité

$$(f(a + te_i) - f(a))/t = (g(a_i + t) - g(a_i))/t.$$

□

3.2 Règles de calcul pour les applications différentiables

On commence par étudier la composée de deux applications différentiables.

Théorème 3.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a. Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert qui contient $f(a)$, et $g : V \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a, et on a $D_a(g \circ f) = D_{f(a)}g \circ D_a f$.*

Démonstration. On écrit que $f(a + h) = f(a) + D_a f(h) + \epsilon(h)$, où $\epsilon(h) = o(h)$ en 0, et que $g(f(a)+u) = g(f(a))+D_{f(a)}g(u)+\epsilon'(u)$, avec $\epsilon'(u) = o(u)$ en 0. On pose alors $u = D_a f(h)+\epsilon(h)$, qui tend vers 0 quand h tend vers 0 (c'est évident pour $\epsilon(h)$, et c'est vrai pour $D_a f(h)$, car $D_a f$ est linéaire donc continue). On a alors

$$g(f(a+h)) = g(f(a)+u) = g(f(a))+D_{f(a)}g(u)+\epsilon'(u) = g(f(a))+D_{f(a)}g(D_a f(h)+\epsilon(h))+\epsilon'(u)$$

$$= g(f(a)) + D_{f(a)}g(D_a f(h)) + D_{f(a)}g(\epsilon(h)) + \epsilon'(u) = g(f(a)) + D_{f(a)}g(D_a f(h)) + \epsilon''(h),$$

où on a posé $\epsilon''(h) = D_{f(a)}g(\epsilon(h)) + \epsilon'(u)$.
Comme $D_{f(a)}g \circ D_a f$ est linéaire, il suffit de montrer que ϵ'' est négligeable devant h en 0 pour conclure.
Soit donc N (resp. N', N'') une norme sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^p$). On veut montrer que $N''(\epsilon''(h))/N(h)$ tend vers 0 quand $N(h)$ tend vers 0. Or on a par inégalité triangulaire :
$N''(\epsilon''(h)) \leq N''(D_{f(a)}g(\epsilon(h))) + N''(\epsilon'(u))$, et comme $D_{f(a)}g$ est linéaire, donc lipschitzienne,

il existe $c > 0$, tel que $N''(D_{f(a)}g(\epsilon(h))) \leq cN'(\epsilon(h))$, et donc $N''(D_{f(a)}g(\epsilon(h)))$ est négligeable devant h en 0.
Il reste à montrer que $N''(\epsilon'(u))$ est négligeable devant h en zéro. On écrit $N''(\epsilon'(u))/N(h) = (N''(\epsilon'(u))/N'(u))(N'(u)/N(h))$. Quand h tend vers 0, on a vu que u $(= D_af(h) + \epsilon(h))$ tend vers 0, et donc $(N''(\epsilon'(u))/N'(u))$ tend vers 0. Mais $N'(u)/N(h) \leq N'(D_af(h))/N(h) + N'(\epsilon(h))/N(h)$, et le premier terme de cette somme est borné car D_af est linéaire, donc lipschitzienne, et le second tend vers 0, donc $N'(u)/N(h)$ est bornée en 0. On en déduit que $N''(\epsilon'(u))/N(h)$ est le produit d'une fonction qui tend vers 0 en 0, et d'une fonction bornée en 0, elle tend donc bien vers 0 quand u tend vers 0. □

Pour les calculs explicites, on manipulera souvent la matrice de la différentienlle dans des bases.

Notation 3.2.1. *On notera B_n la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 3.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$. On note $J_a(f)$ ou J_af la matrice $Mat_{B_m,B_n}(D_af)$ de $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$, et on l'appelle la matrice jacobienne de f au point a.*

Les coéfficients de cette matrice sont en fait les dérivées partielles de f en a.

Proposition 3.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$, on a :*

$$[J_af]_{i,j} = (\partial_j f_i(a))$$

pour i entre 1 et m, et j entre et 1 et n.

Démonstration. On a déja vu dans la proposition 3.1.4 que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, le vecteur $D_af(x)$ a pour coefficients les $D_af_i(x)$ dans B_m. En particulier, si e_j est le j-ème vecteur de B_n, alors $D_af(e_j)$, dont la décomposition dans B_m donne la j-ème colonne de J_af, a pour coefficients les $D_af_i(e_j) = \partial_j f_i(a)$ dans B_m, d'où le résultat. □

En termes de Jacobienne, le théorème 3.2.1 donne.

Proposition 3.2.2. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a. Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert qui contient $f(a)$, et $g : V \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a, et on a $J_a(g \circ f) = (J_{f(a)}g)(J_af)$.*

On en déduit en particulier une formule par calculer les dérivées partielles d'une fonction composée.

Théorème 3.2.2. *(formule de la chaîne) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a. Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert qui contient $f(a)$, et $g : V \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(a)$. Alors on a pour (i, i) dans $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$:*

$$\partial_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g_i(f(a))\partial_j f_k(a).$$

Démonstration. On a $\partial_j(g \circ f)_i(a) = [J_a(g \circ f)]_{i,j}$ d'après la proposition 3.2.1, mais d'après la proposition 3.2.2, on a

$$[J_a(g \circ f)]_{i,j} = [(J_{f(a)}g)(J_af)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} [J_{f(a)}g]_{i,k}[J_af]_{k,j}.$$

Le résultat en découle, puisque toujours d'après la proposition 3.2.1, on a $[J_{f(a)}g]_{i,k} = \partial_k g_i(f(a))$, et $[J_af]_{k,j} = \partial_j f_k(a)$. □

Exercice 3.2.1. *(théorème d'Euler) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifie $\lambda.U \subset U$ pour tout $\lambda > 0$. Soient $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable sur U, et $r > 0$, qui vérifient $f(tx) = t^r f(x)$ pour tout $t > 0$, et $x \in U$ (on dit que f est homogène de degré r).*
Montrer que pour tout x dans U, on a $\sum_{j=1}^n x_j \partial_j f(x) = rf(x)$.

On a les théorèmes de structure suivant, concernant les fonctions dérivables en un point :

Théorème 3.2.3. *Soit f et g deux fonctions d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, différentiables en $a \in U$. Alors $f + \lambda g$ est différentiable en a, et on a $D_a(f + \lambda g) = D_a(f) + \lambda D_a(g)$. De plus, si $m = 1$, alors fg est différentiable en a, et on a*

$$D_a(fg) = g(a)D_a f + f(a)D_a g.$$

Démonstration. Additionner les développements de $f(a + h)$ et $g(a + h)$ en $h = 0$ pour la première assertion, et les multiplier pour la seconde. $\square$

Théorème 3.2.4. *Soit f et g deux fonctions d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, dérivables en $a \in U$ selon $v \in \mathbb{R}^n$. Alors $f + \lambda g$ est dérivable en a selon v, et on a $\partial_v(f + \lambda g)(a) = \partial_v f(a) + \lambda \partial_v g(a)$. De plus, si $m = 1$, alors fg est dérivable en a selon v, et on a*

$$\partial_v(fg)(a) = \partial_v f(a)g(a) + f(a)\partial_v g(a).$$

Démonstration. Le premier point découle de l'égalité

$$[(f + \lambda g)(a + tv) - (f + \lambda g)(a)]/t = [f(a + tv) - f(a)]/t + \lambda[g(a + tv) - g(a)]/t.$$

Pour le second, notons $u_f : t \mapsto f(a + tv)$ et $u_g : t \mapsto g(a + tv)$, alors, u_f et u_g sont dérivables en 0, il en est donc de même pour $u_f u_g = u_{fg}$, et on a $u'_{fg}(0) = u'_f(0)u_g(0) + u_f(0)u'_g(0) = \partial_v f(a)g(a) + f(a)\partial_v g(a)$, d'où le résultat d'après la proposition 3.1.5. $\square$

Une fonction différentiable en chaque point d'un ouvert, est dite différentiable sur cet ouvert.

Définition 3.2.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, avec U ouvert, on dit que f est différentiable sur U si elle l'est en chaque point de U.*

Exercice 3.2.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, différentiable sur l'ouvert convexe U. On suppose que $D_a f = 0$ pour tout a dans U, montrer que f est constante (indication : soit x_0 dans U, considérer pour i fixé entre 1 et m, et x dans U, la fonction $t \mapsto f_i(tx + (1 - t)x_0)$).*

Exercice 3.2.3. *Etendre le résultat de l'exercice précédent au cas où l'ouvert U est connexe par arcs différentiables (i.e. deux points de U quelconques sont toujours joignables par un chemin différentiable de U).*

3.3 Applications $\mathcal{C}^k$

On commence par donner la définition d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.3.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, avec U ouvert. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable sur U, et si l'application $a \mapsto D_a f$ de U dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue.*

Par récurrence, on définit ce qu'est une application $\mathcal{C}^k$.

Définition 3.3.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, avec U ouvert. On dit que f est $\mathcal{C}^k$ (pour $k \geq 2$) sur U si elle est différentiable sur U, et si l'application $a \mapsto D_a f$ de U dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est $\mathcal{C}^{k-1}$.*

Définition 3.3.3. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, avec U ouvert. On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U si elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k > 0$.*

On utilisera les notations suivantes.

Notation 3.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et α un élément de $\mathbb{N}^* \cup \infty$, on note $\mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications $\mathcal{C}^\alpha$ de U dans $\mathbb{R}^m$.*

On admet le théorème de structure suivant (dont la démonstration est simple, mais omise).

Théorème 3.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et α un élément de $\mathbb{N}^* \cup \infty$. Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^m)$, alors $f + \lambda g \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^m)$ pour tout réel λ.*
De plus si $m = 1$, alors $fg \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R})$, et si on note F le fermé de U, défini par

$$F = \{x \in U, g(x) = 0\},$$

alors $f/g \in \mathcal{C}^\alpha(U - F, \mathbb{R}^m)$.

Cependant la définition donnée pour $\mathcal{C}^\alpha$ n'est pas facilement manipulable en pratique. Il est souvent plus aisé d'utiliser la caractérisation suivante.

Théorème 3.3.2. *Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, avec U ouvert, est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, tout i dans $\{1, \dots, m\}$, et tout a dans U, la dérivée $\partial_j f(a)$ existe, et $\partial_j f_i : a \mapsto \partial_j f_i(a)$ est continue sur U.*

Démonstration. Si f est $\mathcal{C}^1$, elle est différentiable sur U, en particulier $\partial_j f(a)$ existe pour tout a dans U d'après la proposition 3.1.3. De plus, la fonction $a \in U \mapsto D_a f \in \mathcal{L}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue. Mais comme $M : u \mapsto Mat_{B_m, B_n}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$, c'est une application continue (tout simplement car elle est linéaire), et on en déduit que $a \in U \mapsto M \circ D_a f = J_a f \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ est continue. En particulier, les fonctions coordonnées $a \mapsto [J_a f]_{i,j}$ de $a \mapsto J_a f$ dans la base canonique $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ sont continues, i.e. les dérivées partielles $\partial_j f_i$ sont continues sur U.
Inversement, si les $\partial_i f_j$ existent en tout point, et sont continues, on doit montrer que f est $\mathcal{C}^1$. Il suffit donc, d'après la proposition 3.1.4, de montrer que f_i est différentiable en a pour tout i. Montrons donc que, pour i fixé dans $\{1, \dots, m\}$, la fonction $u = f_i$ est différentiable en a, on le fait par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, u est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dire que sa dérivée partielle existe en tout point de U, signifie simplement qu'elle est dérivable sur U, donc différentiable sur U d'après la discussion en début de chapitre, et dire que sa dérivée est continue revient à que dire sa différentielle est continue.
$n \to n + 1$: on suppose donc que $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, par hypothèse, pour tout j entre 1 et $n + 1$, $\partial_j u$ est définie en tout point de U, et est une fonction continue sur U.
Soit a dans U, on va évaluer la différence $u(a + h) - u(a)$ quand h tend vers 0.
On commence par noter a' le vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu à partir de a en effaà§ant a_{n+1}, et h' celui obtenu à partir de h en effaà§ant h_{n+1}, puis on écrit :

$$u(a+h) - u(a) = u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+h_{n+1} \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} a' \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+h_{n+1} \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1} \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} a' \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+h_{n+1} \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1} \end{pmatrix} + g\left(a'+h'\right) - g\left(a'\right).$$

Mais l'hypothèse de réccurence appliquée à la fonction $g(*) = u\begin{pmatrix} * \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ dont les dérivées partielles $\partial_j g(*) = \partial_j u\begin{pmatrix} * \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ pour j entre 1 et n existent et sont continues, implique qu'il existe

ϵ_1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qui est un $o(h')$, tel que

$$u(a+h)-u(a) = u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+h_{n+1}\end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}\end{pmatrix} + D_{a'}g(h') + \epsilon_1(h').$$

Or pour h' fixés, le théorème des acroissements finis (pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), appliqué à la fonction $t \mapsto u\begin{pmatrix} a'+h' \\ t\end{pmatrix}$, nous dis qu'il existe $\theta(h') \in]0,1[$, tel que la différence

$$u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+h_{n+1}\end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}\end{pmatrix}$$

soit égale à

$$\partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+\theta(h')h_{n+1}\end{pmatrix} h_{n+1}.$$

On peut alors écrire

$$\partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+\theta(h')h_{n+1}\end{pmatrix} = \partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a' \\ a_{n+1}\end{pmatrix} + \mu(h),$$

où $\mu(h) = \partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a'+h' \\ a_{n+1}+\theta(h')h_{n+1}\end{pmatrix} - \partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a' \\ a_{n+1}\end{pmatrix}$ tend vers 0 quand h tend vers 0 puisque $\partial_{n+1}u$ est continue par hypothèse.
On obtient au final :

$$u(a+h)-u(a) = [\partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a' \\ a_{n+1}\end{pmatrix} h_1 + D_{a'}g(h')] + [\epsilon_1(h') + \mu(h)h_{n+1}],$$

mais $\epsilon_1(h')/N_\infty(h) \leq \epsilon_1(h')/N_\infty(h')$ tend vers 0 quand h tend vers 0 (car $\epsilon_1(h') = o(h')$), et $\mu(h)h_{n+1}/N_\infty(h) \leq \mu(h)$ aussi.
Puisque $h \mapsto \partial_{n+1}u\begin{pmatrix} a' \\ a_{n+1}\end{pmatrix} h_1 + D_{a'}g(h')$ est linéaire, u est bien différentiable en a.
De plus, $a \mapsto J_a u$ a toutes ses fonctions coordonnées $\partial_j u$ continues par hypothèse, elle est donc continue, on en déduit que $a \mapsto D_a u$ aussi. $\square$

On définit par récurrence les dérivées partielles selon un vecteur d'ordre $r \geq 1$.

Définition 3.3.4. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soient $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille de $\mathbb{R}^n$, et a dans U. On suppose que $g = \partial_{v_{r-1}} \ldots \partial_{v_1} f$ est définie sur U, on note alors $\partial_{v_r}\partial_{v_{r-1}} \ldots \partial_{v_1} f(a)$ la dérivée partielle de g selon v_r en a si elle existe.*

Notation 3.3.2. *S'il y a des répétitions entre vecteurs successifs dans la famille $(v_1, \ldots, v_r)$, par exemple si $v_1 = \cdots = v_r$, on notera $\partial_{v_r}\partial_{v_{r-1}} \ldots \partial_{v_1} f = \partial^r_{v_1} f$.*

On explique maintenant ce que signifie l'expression "admettre des dérivées partielles jusqu'à l'ordre r".

Définition 3.3.5. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^m$. On dira que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre r sur U si pour toute famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_r)$ de la **base canonique**, la fonction $\partial_{v_r}\partial_{v_{r-1}} \ldots \partial_{v_1} f$ est définie sur U.*

Le théorème 3.3.2 admet la généralisation suivante.

Théorème 3.3.3. *Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U ouvert, est $\mathcal{C}^l$ si et seulement si pour tout $k \leq l$, chaque fonction coordonnée f_i admet des dérivées partielles continues à l'ordre l.*

Démonstration. Il s'agit d'une récurrence relativement simple, mais admise. □

Le théorème suivant nous dit que les dérivées partielles commutent entre elles pour des fonctions suffisamment régulières.

Théorème 3.3.4. *(Théorème de Schwartz). Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, Alors pour tout couple (v, w) de vecteurs. On a $\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f$.*

Démonstration. Quitte à considérer les fonctions coordonnées de f, il suffit de démontrer le théorème quand $m = 1$.
Soit x_0 dans U. On pose $g(t, t') = f(x_0 + tv + t'w)$, qui est bien définie sur $I \times I$ pour I un intervalle réel autor de zéro, puisque U est ouvert. On pose ensuite $\Delta(t, t') = g(t, t') - g(t, 0) - g(t', 0) + g(0, 0)$. On va calculer de deux manières la limite quand t et t' tendent vers 0 de $\Delta(t, t')/tt'$, le résultat en découlera.
On écrit d'abord $\Delta(t, t') = (g(t, t') - g(t, 0)) - (g(0, t') - g(0, 0))$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $\phi_{t'} : t \mapsto g(t, t') - g(t, 0)$, on en déduit qu'il existe $c(t)$ entre 0 et t, tel que $\Delta(t, t') = \phi_{t'}(t) - \phi_{t'}(0) = t\phi'_{t'}(c(t)) = t(\partial_t g(c(t), t') - \partial_t g(c(t), 0))$. Comme g est $\mathcal{C}^2$, l'application $t' \mapsto \partial_t g(c(t), t')$ est $\mathcal{C}^1$, une nouvelle application du théorème des accroissements finis nous donne l'existence de $d(t')$ compris entre 0 et t', tel que $\partial_t g(c(t), t') - \partial_t g(c(t), 0) = t' \partial_{t'} \partial_t g(c(t), d(t'))$. On en déduit finalement que $\Delta(t, t') = tt' \partial_{t'} \partial_t g(c(t), d(t'))$, puis que $\Delta(t, t')/tt'$ tend vers $\partial_{t'} \partial_t g(0, 0)$ quand t et t' tendent vers 0, par continuité de $\partial_{t'} \partial_t g$.
En considérant $\Delta(t, t')$ comme étant la différence $(g(t, t') - g(0, t')) - (g(t, 0) - g(0, 0))$, et en raisonnant de manière similaire, on obtient de même que $\Delta(t, t')/tt'$ tend vers $\partial_t \partial_{t'} g(0, 0)$ quand t et t' tendent ver 0, et donc que $\partial_{t'} \partial_t g(0, 0) = \partial_t \partial_{t'} g(0, 0)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\partial_t g(0, t') = \partial_v f(x_0 + t'w)$, et donc que $\partial_{t'} \partial_t g(0, 0) = \partial_w \partial_v f(x_0)$, et que de même $\partial_t \partial_{t'} g(0, 0) = \partial_v \partial_w f(x_0)$. □

Corollaire 3.3.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $l \geq 2$, alors si $f \in \mathcal{C}^l(U, \mathbb{R}^m)$, on a pour toute famille $(v_1, \ldots, v_k)$, avec $k \leq l$, et pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$:*

$$\partial_{v_k} \ldots \partial_{v_1} f = \partial_{v_{\sigma(k)}} \ldots \partial_{v_{\sigma(1)}} f.$$

3.4 Le théorème d'inversion globale

On va étudier les applications différentiables bijectives, à priori, la réciproque d'une telle application n'est pas nécessairement dérivable. On rappelle que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une condition nécessaire et suffisante pour que la réciproque d'une fonction dérivable soit bijective, est que la dérivée de cette fonction ne s'annulle pas. Ce résultat se généralise.

Définition 3.4.1. *On appelle homéomorphisme une application bijective entre deux parties de $\mathbb{R}^n$, continue, et de réciproque continue.*

Pour les applications différentiables, on parle de difféomorphisme.

Définition 3.4.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$, avec U et V ouverts. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme entre U et V, si f est bijective, $\mathcal{C}^k$ sur U, et que f^{-1} est $\mathcal{C}^k$ sur V.*

Exercice 3.4.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$, avec U ouvert. Montrer que si f est un homéomorphisme, alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 3.4.1. *(Théorème d'inversion globale)*
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$. Si f est une bijection de U sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, qui est $\mathcal{C}^k$ sur U, et que $D_a f$ est inversible (i.e. $D_a f \in GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$) en tout point de a de U, alors

f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme entre U et V.
Inversement, si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme entre les ouverts U et V, alors $D_a f$ est inversible en tout point de a de U.
Dans ce cas, pour $a \in U$, et $b = f(a)$, on a

$$D_b(f^{-1}) = D_a(f)^{-1}.$$

Démonstration. Admis pour l'instant. On constatera seulement que $D_b(f^{-1})$ est nécessairement égale à $D_a(f)^{-1}$. En effet, on a $f^{-1} \circ f = I_{dU}$, mais comme I_{dU} est la restriction à U de l'application linéaire I_d, donc $D_a(I_{dU}) = I_{d\mathbb{R}^n}$, mais alors $I_d = D_a(I_{dU}) = D_a(f^{-1} \circ f) = D_b(f^{-1}) \circ D_a f$, et la relation tombe. □

Une application classique est la suivante.

Corollaire 3.4.1. *L'application de qui va de l'ouvert $U = \mathbb{R} > 0 \times]-\pi, \pi[$ de $\mathbb{R}^2$, vers $V = \mathbb{R}^2 - \{(x,0), x \leq 0\}$, définie par $f : (r, \theta) \mapsto (rcos(\theta), rsin(\theta))$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre ces deux ouverts.*

Démonstration. Il est clair que f envoie U dans V. De plus, on a $f(r,\theta) = (x,y)$ pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2 - \{(x,0), x \leq 0\}$ si et seulement si $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$, $cos(\theta) = x/\sqrt{x^2+y^2}$, et $sin(\theta) = y/\sqrt{x^2+y^2}$. Les équations $cos(\theta) = x/\sqrt{x^2+y^2}$ et $sin(\theta) = y/\sqrt{x^2+y^2}$ déterminent de manière unique $\theta[2\pi]$, et de plus $(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}) \neq (-1,0)$ puisque $(x,y) \notin \{(x,0), x \leq 0\}$, donc il existe un unique θ dans $]-\pi,\pi[$ qui vérifie $cos(\theta) = x/\sqrt{x^2+y^2}$ et $sin(\theta) = y/\sqrt{x^2+y^2}$. Ainsi f est bijective.
Elle est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur U, et sa Jacobienne en (r,θ) est donnée par $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -rsin(\theta) \\ sin(\theta) & rcos(\theta) \end{pmatrix}$, qui est inversible car son déterminant vaut $r(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)) = r > 0$. On en déduit que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme entre U et V d'après le théorème d'inversion globale. □

3.5 Extrema des fonctions différentiables à valeurs dans $\mathbb{R}$

On commence par donner un nom à la matrice dont les coefficients sont les dérivées partielles secondes d'une fonction $\mathcal{C}^2$.

Définition 3.5.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant un point a, et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on note $H_a f$, et on appelle matrice hessienne de f en a, la matrice $(\partial_i \partial_j f(a))_{i,j} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.*

Théorème 3.5.1. *Sous les hypothèses de la définition précédente, la matrice hessienne $H_a f$ est symétrique.*

Démonstration. C'est le théorème de Schwartz. □

On admet que les fonctions $\mathcal{C}^2$ admettent un développemment (de Taylor) à l'ordre 2 :

Théorème 3.5.2. *(Développement à l'ordre 2 des fonctions $\mathcal{C}^2$).*
Soit U un ouvert de $(\mathbb{R}^n, N)$ contenant un point a, et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, alors il existe une fonction $\epsilon : U \to \mathbb{R}$, telle que $\epsilon(h)/N(h)^2 \to 0$ quand $h \to 0$, telle qu'on ait :

$$f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + {}^t h.H_a f.h + \epsilon(h)$$

quand $a + h \in U$.

Il est classique, qu'une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a une dérivée nulle en un extremum (i.e. minimum ou maximum) local. Ce résultat se généralise. Tout d'abord rappelons ce que veut dire extremum local.

Définition 3.5.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, et f une fonction de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f admet en a un maximum (resp. minimum) local si il existe un ouvert $V \subset U$ de $\mathbb{R}^n$ qui contient a, tel que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout x dans V.*

On va voir que les extrema locaux des fonctions différentiables sont des points critiques.

Définition 3.5.3. *(Point critique) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant un point a, et f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable en a, on dit que a est un point critique de f si $D_a f = 0$, ou de manière équivalente, ou demanière équivalente, si pour tout j dans $\{1, \ldots, n\}$, on a $\partial_j f(a) = 0$.*

On a alors le théorème suivant sur les extrema locaux.

Théorème 3.5.3. *Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en $a \in U$, et qui admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.*

Démonstration. On supposera pour la preuve que a est un maximum local. Soit v fixé dans $\mathbb{R}^n$, et g la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Puisque f est différentiable en a, elle admet une dérivée selon v en a, et de plus on a $D_a f(v) = \partial_v f(a) = g'(0)$. Or par hypothèse, il existe un ouvert V contenant a, tel que $f(x) \leq f(a)$ pour x dans V. Soit $I =]-\epsilon, \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$, un intervalle de $\mathbb{R}$, tel que $a + tv$ appartienne à V pour t dans I (un tel intervalle existe car U est ouvert), on en déduit que g admet un maximum en 0 sur I, on en déduit que $g'(0) = 0$. Ainsi, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a $D_a f(v) = 0$, i.e. $D_a f = 0$. CQFD. □

Exercice 3.5.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a. Soit $V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert qui contient U, et $g : V \to \mathbb{R}$ différentiable en $b = f(a)$, montrer que $g \circ f$ admet un point critique en a si et seulement si $Im(D_a f) \subset Ker(D_b g)$.*

Ce théorème ne permet cependant pas de déterminer si un point critique est un maximum ou un minimum local. Pour étudier ce genre de question lorsque la fonction est $\mathcal{C}^2$, il faut s'intéresser à la matrice hessienne de f.

Théorème 3.5.4. *Soit U un ouvert de $(\mathbb{R}^n, N)$ contenant a, et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on suppose que a est un point critique de f.*
- *Si $H_a f$ est définie positive, i.e. ${}^t x H_a f x > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, ou encore si toutes ses valeurs propres sont > 0, alors a est un minimum local.*
- *Si $H_a f$ est définie négative, i.e. ${}^t x H_a f x < 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, ou encore si toutes ses valeurs propres sont < 0, alors a est un maximum local.*
- *Si a est un minimum local, alors $H_a f$ est positive, i.e. ${}^t x H_a f x \geq 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, ou encore toutes ses valeurs propres sont ≥ 0.*
- *Si a est un maximum local, alors $H_a f$ est négative, i.e. ${}^t x H_a f x \leq 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, ou encore toutes ses valeurs propres sont ≤ 0.*

Démonstration. Si $A = H_a(f)$ est définie positive, alors $N_A(x) = \sqrt{{}^t x A x}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. Le développement de Taylor nous dit ensuite que $f(a+h) = f(a) + {}^t h A h + \epsilon(h) = f(a) +^t hAh(1 + \epsilon(h)/N_A(h)^2)$ pour $h \neq 0$ (car a est un point critique), avec $\epsilon(h)/N_A(h)^2$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Il existe donc un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que si $h \in V$, la quantité $(1 + \epsilon(h)/N_A(h)^2)$ est positive. On en déduit que $f(a+h) \geq f(a)$ pour h dans V, et donc a est un minimum local. Le second point se démontre de manière similaire.

Si inversement, a est un minimum local. Si A admettait une valeur propre $\lambda < 0$, avec v un vecteur propre associé. En posant $h = tv$, on aurait $f(a+tv) = f(a)+t^2[{}^t vAv(1+\epsilon(tv)/t^2 N_A(v)^2)] = f(a) + \lambda t^2[{}^t vv(1 + \epsilon(tv)/\lambda^2 t^2({}^t vv))]$. Comme $\epsilon(tv)/\lambda^2 t^2({}^t vv)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, on en déduit que $1 + \epsilon(tv)/\lambda^2 t^{2t} vv$ est > 0 pour t proche de zéro. Comme $\lambda t^2({}^t vv)$ est strictement négatif lorsque t est non nul, on aurait que $f(a + tv) < f(a)$ pour t non nul proche de zéro, ce qui contredirait le fait que a est un minimum local. Ainsi, A n'admet que des valeurs propres ≥ 0. Le dernier point se démontre similairement. $\square$

L'exercice suivant donne un critère utile pour déterminer si une matrice symétrique 2×2 est symétrique définie positive, ou négative.

Exercice 3.5.2. *Une matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ *est définie positive (resp. définie négative) si et seulement si* $a > 0$, *et* $ad - b^2 > 0$ *(resp.* $a < 0$, *et* $ad - b^2 > 0$*).*

Exercice 3.5.3. *Soient* a, b, *et* c *trois points de* $\mathbb{R}^2$, *et* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *définie par* $f(x) = N_2(x - a)^2 + N_2(x - b)^2 + N_2(x - c)^2$.
a) *Montrer que* f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^2$, *calculer ses dérivées partielles, en déduire qu'elle a un unique point critique.*
b) *Ce point critique est-il un extremum local de* f *?*
c) *Montrer que c'est en fait un extremum global (indication :* $f(x) \to +\infty$ *quand* $N_2(x) \to +\infty$*).*

Chapitre 5

Courbe paramétrées

5.1 Définitions et premières notions importantes

Définition 5.1.1. *On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, \ldots$ alors une application f de I dans $\mathbb{R}^n$ est dite $\mathcal{C}^k$ en a, si il existe $\epsilon > 0$, tel que $[a, a+\epsilon[\subset I$, f est $\mathcal{C}^k$ sur $]a, a+\epsilon[$, et si chaque dérivée $f^{(i)}$, pour $i \leq k$ est continue en a. De même on définit une application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $\ldots, b]$ dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^k$ en b. Ainsi, une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^k$, si elle est $\mathcal{C}^k$ sur l'intérieur de I, et $\mathcal{C}^k$ en les bornes de I si elles sont contenues dans I.*

On donne maintenant la défition d'une courbe paramétrée.

Définition 5.1.2. *On appelle courbe paramétrée (I, f) la donnée d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, et d'une fonction f de I dans $\mathbb{R}^2$. On dit que la courbe est continue, dérivable, $\mathcal{C}^k$,..., si f l'est. On appelle $f(I) \subset \mathbb{R}^2$ le support de la courbe.*

On constatera que le support de la courbe ne détermine évidemment pas la courbe.

Exemple 5.1.1. *Par exemple les courbes (I, f_i), avec $I = [0,1]$ et $f_1 : t \mapsto (0,t)$ et $f_1 : t \mapsto (0,t^2)$ ont même support.*

En général, on considérera des courbes paramétrées au moins continues.

Définition 5.1.3. *Deux courbes paramétrées (I, f) et (J, g) continues sont dites $(0$-$)$équivalentes, où encore définissent le même $(0$-$)$arc géométrique, ce qu'on notera $(I, f) \sim_0 (J, g)$, si il existe un homéomorphisme croissant ϕ de I sur J, tel que $g = f \circ \phi$. Ceci détermine bien sûr une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramtrées continues. Sur l'ensemble des courbes paramétrées $\mathcal{C}^k$, pour $k \geq 1$, on considérera plutôt la relation d'équivalence $(I, f) \sim_k (J, g)$, vérifiée s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme croissant ϕ de I sur J, tel que $g = f \circ \phi$. On dira alors que (I, f) et (J, g) sont k-équivalentes, ou encore qu'elles définissent le même k-arc géométrique.*

C'est la notion d'arc géométrique qui est réellement intéressante en géométrie, car toutes les notions géométriques importantes attachées à une courbe sont préservées par ces relations d'équivalenes, nous verrons cela plus tard. On remarque d'emblée que deux courbes paramétrées continues équivalentes ont même support.

Exercice 5.1.1. *Soient (I, f) et (J, g) deux courbe paramétrées de classes $\mathcal{C}^k$, qui sont k-équivalentes, montrer qu'elles ont le même support.*

Exercice 5.1.2. *Montrer que les deux courbes définies dans l'exemple 5.1.1 sont 0-équivalentes, mais pas 1-équivlentes.*

Exercice 5.1.3. *Montrer que les courbes paramétrées* (I, f_i)*, avec* $I = [-\pi, \pi]$*,* $f_1 : t \mapsto (sin(t), 0)$ *et* $f_2 : t \mapsto (t/\pi, 0)$ *ont même support, mais ne sont pas équivalentes.*

Le but de l'étude d'une courbe paramétrée est de pouvoir en gros la dessiner à la main. Les principales questions qu'on se posera sur la courbe (I, f) sont les suivantes.

1) Quelles sont les symétries de la courbe ? On les utilisera ensuite pour réduire l'étude de la courbe à un intervalle I' plus petit que I.

2) Selon le paramétrge (en coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$, ou bien en coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$), comment varient les paramètres de la courbe quand t varie ?

3) Comprendre les points où la courbe admet des tangentes particulières.

4) Comprendre les points où la courbe "tend à l'infini" (ce qu'on appelle les branches infinies).

5) Comprendre les points où la courbe se recoupe (ce qu'on appelle les points multiples).

6) Tracer une approximation intelligente de la courbe grâce aux informations précédentes.

On termine ce paragraphe en définissant quelques termes qu'on a utilisé ci-dessus.

Définition 5.1.4 (Demi-tangentes et tangente)**.** *1) Soit* (I, f) *une courbe paramétrée de classe, et* $t_0 \in I$*. Pour que la courbe ait une demi-tangente "à gauche" en* t_0*, il faut que* I *contienne un intervalle* $]t_0 - \epsilon, t_0]$ *avec* $\epsilon > 0$*,* $f(t)$ *différent de* $f(t_0)$ *dans* $]t_0 - \epsilon, t_0]$*, et que le vecteur* $u^-(t) = (f(t_0) - f(t))/N_2(f(t_0) - f(t))$ *admette une limite* u_0^- *(nécessairement un vecteur de norme euclidienne* 1*) lorsque* t *tend vers* t_0*. Dans ce cas, la demi-tangente à gauche en* t_0 *à la courbe, est la demi-droite issue de* $f(t_0)$ *dirigée par* u_0^-*.*
2)Pour que la courbe ait une demi-tangente "à droite" en t_0*, il faut que* I *contienne un intervalle* $[t_0, t_0 + \epsilon[$ *avec* $\epsilon > 0$*,* $f(t)$ *différent de* $f(t_0)$ *dans* $[t_0, t_0 + \epsilon[$*, et que le vecteur* $u^+(t) = (f(t) - f(t_0))/N_2(f(t) - f(t_0))$ *admette une limite* u_0^+ *(nécessairement un vecteur de norme euclidienne* 1*) lorsque* t *tend vers* t_0*. Dans ce cas, la demi-tangente à droite en* t_0 *à la courbe, est la demi-droite issue de* $f(t_0)$ *dirigée par* u_0^+*.*
3) On dit que la courbe admet une tangente en $t_0 \in I$ *si on est dans l'une des situations suivantes :*
a) t_0 *est la borne droite de* I*, et* (I, f) *admet une demi-tangente à gauche en* t_0*. La tangente est alors la seule droite qui contient la demi-tangente à gauche, c'est à dire la droite passant par* $f(t_0)$*, dirigée par* u_0^-*.*
b) t_0 *est la borne gauche de* I*, et* (I, f) *admet une demi-tangente à droite en* t_0*. La tangente est alors la seule droite qui contient la demi-tangente à droite, c'est à dire la droite passant par* $f(t_0)$*, dirigée par* u_0^+*.*
c) t_0 *est dans l'intérieur de* I*, la courbe admet une demi-tangente à gauche et à droite en* t_0*, et* u_0^- *et* u_0^+ *sont colinéaires, c'est à dire que les demi-tangentes sont parallèles. La tangente est alors la droite passant par* $f(t_0)$ *colinéaire à* u_0^- *(et donc* u_0^+*).*

En utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, on monte que les définitions précédentes ne dépendent pas du choix de N_2.

Exercice 5.1.4. *Démontrer l'affirmation précédente.*

Quand la fonction f est suffisamment régulière, ce qui sera toujours le cas en pratique, on a la caractérisation suivante de la tangente en un point t_0.

Proposition 5.1.1. *Soit (I, f) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$, soit t_0 dans I, et supposons qu'il existe $1 \leq p \leq k$ avec $f^{(p)}(t_0) \neq 0$, et $f^{(l)}(t_0)$ nul pour l entre 1 et $p-1$, de telle sorte que le développement limité de f en t_0 soit $f(t) = f(t_0) + \frac{f^p(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + o((t-t_0)^p)$. Alors la courbe (I, f) admet une tangente en t_0, dirigée par le vecteur $f^p(t_0)$.*

Démonstration. On se contentera de donner la preuve quand t_0 est dans l'intérieur de I, on pose $a_p = \frac{f^p(t_0)}{p!} \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$u^-(t) = \frac{f(t_0) - f(t)}{N_2(f(t_0) - f(t))} = \frac{a_p(t-t_0)^p + o((t-t_0)^p)}{N_2(a_p(t-t_0)^p + o((t-t_0)^p)} = \left(\frac{t-t_0}{|t-t_0|}\right)^p \frac{a_p + o(1)}{N_2(a_p + o(1))}.$$

Selon le signe de p, on a donc que $u^-(t)$ tend vers $u_0^- = \pm a_p/N_2(a_p)$. De même, on montre que $u^+(t)$ tend vers $u_0^+ = \pm a_p/N_2(a_p)$. En particulier, u_0^- et u_0^+ sont colinéaires, et en fait colinéaires à $f^p(t_0)$, ce qui donne le résultat. □

On fera aussi attention au fait que cette définition dépend de t_0, et pas seulement de $f(t_0)$. En effet, il se peut qu'il existe un autre élément t_1 de I tel que $f(t_1) = f(t_0)$ (en cas de point multiple), et la tangente en t_1 sera en général différente de celle en t_0.

On rappelle qu'on appelle borne d'un intervalle $I = [a, b],\ ]a, b],\ [a, b[$, ou $]a, b[$, l'élément a ou b (avec éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$). On définit maintenant ce qu'on appelle branche infinie de la courbe (I, f) en une borne de I.

Définition 5.1.5 (Branche infinie)**.** *Soit (I, f) une courbe paramétrée, on dit qu'elle admet une branche infinie en une borne t_0 de I, si $N_2(f(t))$ tend vers $+\infty$ quand $t \in I$ tend vers t_0.*

Par équivalence des normes, la définition précédente ne dépend pas de la norme utilisée.

5.2 Etude des courbe paramétrées en cartésiennes

Etudier une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes, revient à décomposer le vecteur $f(t)$ dans la bas canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire l'écrire $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

5.2.1 Réduction du domaine d'étude

Il y a de nombreuses manières de réduire le domaine d'étude. On en énumère ici quelques unes :

1) Regarder si $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ admettent une période commune T. Dans ce cas, on peut se contenter d'étduier la corbe sur un intervalle $[a, a+T[$ subset I.
2) On peut utiliser les parités de x et y. Par exemple, si x est paire ou impaire, et y aussi, il suffit d'étudier la courbe sur $I^+ = I \cap \mathbb{R}^+$ (ou $I^- = I \cap \mathbb{R}^-$), puis de compléter le tracé par symétrie. Les symétries qui interviennent sont soit axiales selon les axes de coordonnées, soit une symétrie centrale.
3) On peut aussi avoir des symétries selon les bissectrices, par exemple, si $x(-t) = y(t)$ (et donc $y(-t) = x(t)$), alors $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ selon la première bissectrice, et on peut limiter l'étude de la courba à $I^+ = I$. Plus généralement, on peut limiter l'étude de la courbe à I^+ si on a $y(t) = \pm x(-t)$.

4) Les deux exemples précédent se généralisent comme suit aux intervalles de bornes $a < b$ finies, en posant $u = a + b - t$. Si $x(u) = \pm x(t)$, et $y(u) = \pm y(t)$, alors on peut limiter l'étude à un demi-intervalle fermé en la borne $\frac{a+b}{2}$, de même si $x(u) = \pm y(t)$ (et donc $y(u) = \pm x(t)$).

Exercice 5.2.1. *Expliciter, selon les invariances de x et y, dans les exemples précédents, les symétries de la courbes qui interviennent.*

5.2.2 Variations des coordonnées de la courbe et études des points stationnaires

Il est ensuite d'usage, de considérer les variations de x et y, c'est à dire d'étudier le signe de x' et y' (on rappelle qu'en pratique, on étudiera des courbes au moins $\mathcal{C}^1$). On tracera alors un tableau de variation résumant les résultats.

Les points les "plus intéressants" sont ceux qu'on appelle stationnaires.

Définition 5.2.1. *Soit (I, f) une courbe de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que $t_0 \in I$ est un point régulier de (I, f) si $f'(t_0) \neq 0$. On dit qu'il est stationnaire si il n'est pas régulier, i.e. si $f'(t_0) = 0$.*

Plusieurs cas de figures sont possibles aux points stationnaires, sur les courbes suffisamment régulières, auxquelles on restreint notre attention, il y a quatre cas. Afin de pouvoir les distinguer, on définit d'abord ce que sont les entiers caractéristiques de la courbe en un point stationnaire t_0.

Définition 5.2.2. *Soit (I, f) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 3$. On suppose que t_0 est un point stationnaire de la courbe, qui appartient à l'intérieur de I, et que f admet en t_0 un développement limité de la forme*

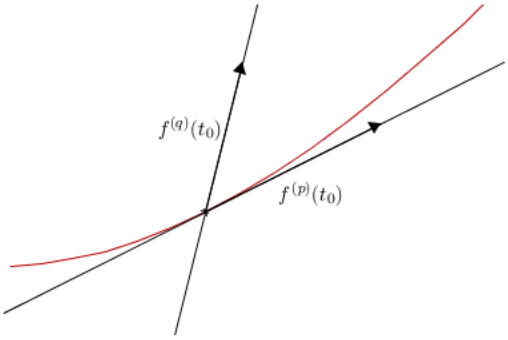
$$f(t) = f(t_0) + f^{(2)}(t_0)(t - t_0)^2/2 + \cdots + f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k/k! + o(t^k),$$

et qu'au moins deux vecteurs $f^{(i)}(t_0)$ sont linéairement indépendants pour $2 \leq i \leq k$.
On note alors $p(t_0)$ ou simplement p le plus petit $i \geq 2$ tel que $f^{(i)}(t_0) \neq 0$, et $q(t_0)$ ou simplement q le plus petit $j \geq p$ tel que $f^{(j)}(t_0) \neq 0$. On appelle le couple (p, q) les entiers caractéristiques de la courbe en t_0.

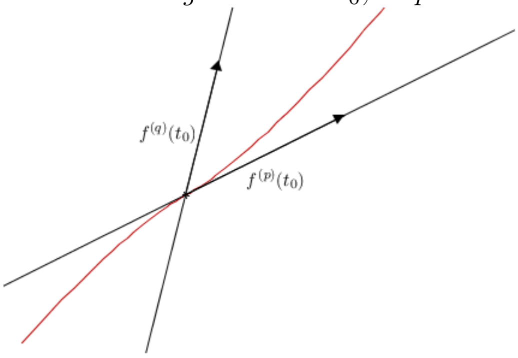
On remarque donc que l'entier p est tel que la tangente à la courbe en t_0 est dirrigée par $f^{(p)}(t_0)$. Les vecteurs $(e_p = f^{(p)}(t_0)/p!, e_q = f^{(q)}(t_0)/q!)$ forment d'ailleurs une base de $\mathbb{R}^2$. En se placant dans le repaire $(f(t_0), e_p, e_q)$, le développement limité de f permet de donner l'allure la courbe au voisinage de t_0, et en particulier sa position relative par rapport à sa tangente, et le "sens" avec lequel le point générique de la courbe (i.e. le point $f(t)$) arrive en t_0 ($t < t_0$), et celui avec lequel il repart de t_0 ($t > t_0$).

Proposition 5.2.1. *On reprend les hypothèses et les notations de la définition 5.2.2.*

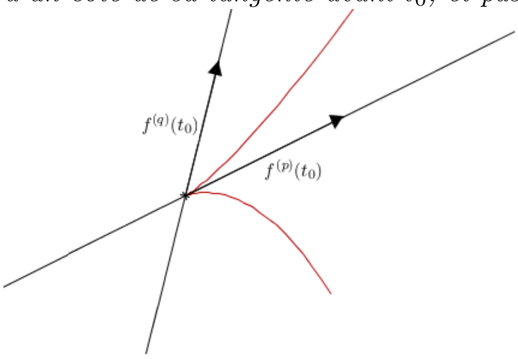
- ***p impair, q pair :*** *Si p est impair et q est pair, on a un **"point ordinaire"**, i.e. au voisinage de t_0, la courbe garde le même direction avant et après t_0, et reste du même côté de sa tangente en t_0.*



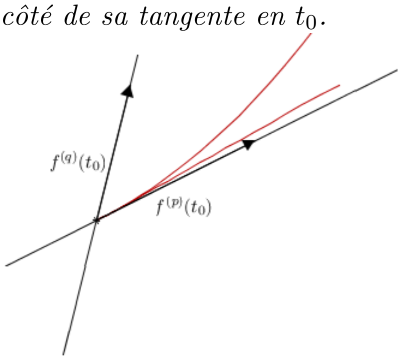
- ***p* impair, *q* impair :** *Si p est impair et q est impair, on a un* ***"point d'inflexion"****, i.e. au voisinage de t_0, la courbe garde le même direction avant et après t_0, mais est d'un côté de sa tangente avant t_0, et passe de l'autre après t_0.*



- ***p* pair, *q* impair :** *Si p est pair et q est impair, on a un* ***"point de rebroussement de première espèce"****, i.e. au voisinage de t_0, la courbe change de direction en t_0, et est d'un côté de sa tangente avant t_0, et passe de l'autre après t_0.*



- ***p* pair, *q* pair :** *Si p est pair et q est pair, on a un* ***"point de rebroussement de seconde espèce"****, i.e. au voisinage de t_0, la courbe change de direction en t_0, et reste du même côté de sa tangente en t_0.*



Démonstration. On se contente de donner la preuve pour le point d'inflexion et de rebroussement de première espèce. Dans tous les cas, on note $a_p = f^{(p)}(t_0)/p!$, et $h = t - t_0$. On a donc $f(t) = f(t_0)+a_p h^p(1+\frac{a_{p+1}}{a_p}h+\cdots+\frac{a_{q-1}}{a_p}h^{p-1}).e_p+a_q h^q.e_q+o(h^q)$,et on pose $\epsilon(h) = \frac{a_{p+1}}{a_p}h+\cdots+\frac{a_{q-1}}{a_p}h^{p-1}$, qui tend vers 0 en 0. Ainsi, dans le repaire $(f(t_0), e_p, e_q)$, dont l'axe $(f(t_0), e_p)$ est dirigé par la tangente, on a $f(t) = (f_p(t), f_q(t))$, avec $f_p(t) = a_p h^p(1+\epsilon(h)) + o(h^q)$, et $f_q(t) = a_q h^q + o(h^q)$.
Si p est impair et q est impair, alors sur l'axe $(f(t_0), e_p)$, comme p est impair, $f_p(t_0+h)$ change de signe en 0, c'est à dire que $f_p(t)$ poursuit son trajet dans le même sens en t_0. De même, $f_q(t_0+h)$ change de signe en 0, ceci veut dire que $f(t)$ traverse la tangente en t_0.
Si p est pair et q est impair, alors sur l'axe $(f(t_0), e_p)$, comme p est impair, $f_p(t_0+h)$ reste du même signe au voisinage de 0, c'est à dire que $f_p(t)$ reste du même côté de l'axe $(f(t_0), e_q)$ en t_0. Par contre, $f_q(t_0+h)$ change de signe en 0, ceci veut dire que $f(t)$ traverse la tangente en t_0. □

5.2.3 Branches infinies

5.3 Etude en coordonnées polaires

5.4 Un peu de géométrie