DE L'INTÉGRALE CLÔTURE DE $\mathbb{Z}$ DANS SON CORPS DES FRACTIONS

N. MATRINGE

Théorème. *$\mathbb{Z}$ est intégralement clos dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Soit P un polynôme unitaire non constant de $\mathbb{Z}[X]$ et p/q une racine rationnelle de ce dernier. Supposons p et q premiers entre eux et $q \geq 2$. Notons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ la matrice compagnon associée à P. Un argument bien connu dû à Planchat dit que la matrice $-pI_n + qM$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ puisque son déterminant est non nul modulo q. On en déduit que p/q n'est pas valeur propre de M, donc pas racine de P: contradiction. $\square$

Remerciements

Nous remercions J.-F. Planchat pour ses encouragements constants.