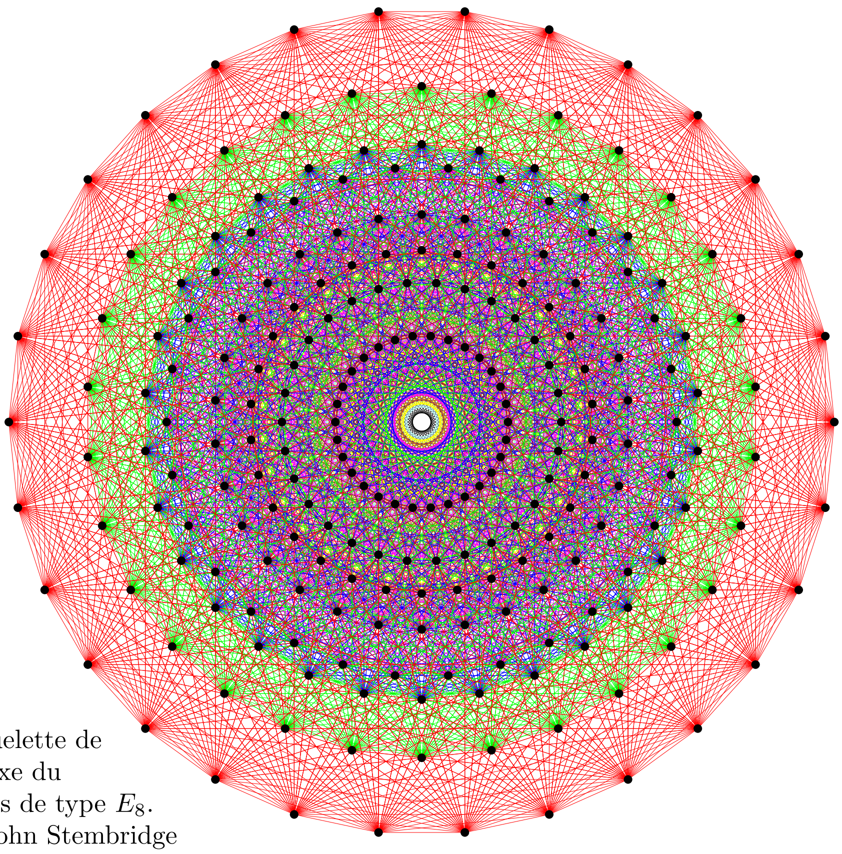
Calcul d'une matrice immense fait le bonheur d'un groupe de chercheurs en mathématiques

Le lundi 19 mars, le projet "Atlas of Lie groups and Representations" a annoncé avoir réussi (en janvier) le calcul de la matrice des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan pour le groupe de Lie déployé de type E_8, et d'avoir ainsi traité ce cas le plus dur de ce type de calcul. La taille du résultat est impressionnante : c'est une matrice carrée de taille 453060×453060, ayant donc plus que 205 milliards de cases, chacune contentant un polynôme avec jusqu'à 32 termes ; elle nécessiterait une feuille d'environ 200 km^2 si on voudrait l'imprimer, ce qui pouvait couvrir la ville de Paris. En réalité le résultat a dû être stocké de façon hautement comprimée, remplissant néanmoins plus de 60 giga-octets de fichiers informatiques.

Le projet américain Atlas ayant réalisé ce calcul était formé d'une équipe d'un vingtaine de chercheurs internationaux en mathématiques pures, dont deux français (originaires des Pays-Bas): Fokko du Cloux de l'Université de Lyon I, et Marc van Leeuwen de l'Université de Poitiers. Il vise à rendre effectif un certain nombre de résultats en théorie des groupes de Lie, des algorithmes abstraits qui sont l'aboutissement de plus d'un siècle de recherche dans le domaine, mais qui jusqu'ici n'avaient pas été réalisés en logiciel. Le calcul qui vient d'être achevé ne forme qu'une étape intermédiaire vers le but final, la détermination du "dual unitaire" de tous les groupes de Lie réels.

Le logiciel qui a permis de faire le calcul, baptisé '`atlas`', a été construit pendant la période comprise entre la fondation du projet en 2002 et fin 2005, par Fokko du Cloux. Il était capable à ce point de calculer (entre autre) les polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan pour en principe n'importe quel groupe de Lie. Seulement le cas de E_8, le plus grand des "groupes de Lie exceptionnels", nécessitait trop de mémoire vive pour être traité sur les ordinateurs disponibles. Pendant l'année 2006 on a cherché de trouver des ordinateurs plus puissants, et en même temps de modifier le programme pour diminuer sa consommation de mémoire. Finalement ces efforts, ajouté à une idée qui a permis de remplacer un seul calcul par quatre calculs successifs nécessitant moins de mémoire vive, ont permis de relever le défi en janvier 2007. Ces efforts ont été menés par David Vogan pour le côté théorique, et Marc van Leeuwen pour la programmation ; Fokko du Cloux a aussi collaboré dans la mesure du possible, c'est-à-dire jusqu'à sa mort en novembre 2006, et malgré une maladie qui l'a paralysé dès les premiers mois de l'année 2006. Le développent du logiciel `atlas` continue.



Projection du squelette de l'enveloppe convexe du système de racines de type E_8. Illustration par John Stembridge

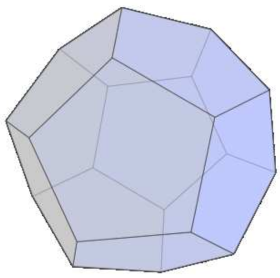
Qu'est-ce que c'est qu'un groupe de Lie exceptionnel ?

La notion de groupe en mathématiques est une mesure de symétrie. Si un objet possède une symétrie miroir, comme le corps humain (approximativement), on y associe un groupe à deux éléments. Un cube possède plus de symétrie que cela : il y a 48 manières différentes d'envoyer le cube sur lui même, qu'on peut classifier en rotations et réflexions de différents types. Mais il n'y a pas que le nombre : les manières dont on peut composer des symétries pour en former d'autres permet de distinguer ce groupe d'autres groupes à 48 éléments. Puis il existe des objets avec une infinité de symétries, par exemple la sphère peut être tournée autour de n'importe quel axe par n'importe quel angle. Ce type de groupe infini et continu forme la classe des groupes de Lie, introduite par le mathématicien norvégien Sophus Lie au 19^e siècle.

Parmi ces groupes les exemples élémentaires peuvent être caractérisées par des données finies appelées leur systèmes de racines, ce qui permet de les classifier. Les systèmes de racines apparaissent dans quatre familles infinies notées A_1, A_2, ..., et de façon similaire pour les lettres B, C et D (les groupes de Lie associés sont dits classiques) ; il reste 5 systèmes de racines n'appartenant à aucune famille infinie. Ces 5 systèmes de racines portent les noms G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8 ; les groupes de Lie associés sont dits exceptionnels.

On peut comparer la classification des systèmes de racines à celle des polytopes réguliers. En dimension 2 on a tous les polygones réguliers (triangle, carré, pentagone, hexagone, heptagone, octagone,...), qui forment une famille infinie (en dimension constante). En dimension 3 on a les solides platoniciens bien connus : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Parmi ceux-ci, le tétraèdre, le cube, et l'octaèdre possèdent des formes analogues en dimensions 4, 5, 6, ..., qui forment donc trois autres familles de polytopes réguliers (en dimension montante cette fois ci). Restent le dodécaèdre et l'icosaèdre, ainsi que trois autres polytopes réguliers en dimension 4 ; ces cinq objets n'appartiennent à aucune famille infinie de polytopes réguliers, et peuvent donc être considérés comme *exceptionnels*.

dodécaèdre



Concrètement le système de racines de E_8 est une configuration de 240 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 8; le groupe de Lie de type E_8 est de dimension $8 + 240 = 248$. Le système de racines lui-même reste difficile à visualiser pour nous habitants d'un espace de dimension 3, mais une jolie projection sur un sous-espace de dimension 2 a été réalisé par John Stembridge du projet atlas, voir ci-contre, ou sur `http://www.liegroups.org/e8plane.html`. Pour être tout à fait précis, il y a plusieurs groupes de Lie réels associé au type E_8 ; le calcul mentionné concerne la "forme réelle déployée" de E_8, dont les représentations sont les plus difficiles de tout.

À quoi sert ce calcul ?

Comme c'est un résultat en mathématiques pures, le calcul ne vise pas des applications directes. Cependant la connaissance des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan forme une pierre angulaire de la théorie des représentations d'un groupe de Lie, en termes vagues l'étude des manières différentes que le groupe peut se manifester comme ensemble de symétries d'une structure mathématique.

La théorie des représentations en général a des applications dans beaucoup de domaines, notamment en physique des particules élémentaires et en chimie. Même si le groupe exceptionnel E_8 peut sembler trop exotique pour avoir des applications dans les sciences naturelles, les physiciens ont découvert qu'il joue un rôle inattendu dans divers domaines ; par exemple E_8 joue un rôle dans la théorie des cordes. Ceci ne veut bien évidemment pas dire que le résultat trouvé va être utilisé tout de suite par les théoriciens des cordes. L'application la plus directe sera dans le projet Atlas lui même, pour faire avancer les travaux sur le dual unitaire des groupes de Lie.