Corrigé Travaux dirigés iL01 : Mathématiques Discrètes, Feuille 5 vendredi 14 octobre 2005

1. Déterminer pour les séries formelles en X désignées par les expressions ci-dessous les 10 premiers termes, c'est-à-dire les termes c_iX^i avec $i < 10$. Vous pouvez omettre les termes nuls.

a. $\left(\frac{1}{1-X}\right)^2$.

$\surd$ $\left(\frac{1}{1-X}\right)^2 = \sum_{i\in\mathbf{N}}\left(\!\binom{2}{i}\!\right)X^i = \sum_{i\in\mathbf{N}}(i+1)X^i$ *dont les 10 premiers termes sont* $1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4 + 6X^5 + 7X^6 + 8X^7 + 9X^8 + 10X^9$. *On pourra également trouver ce résultat en calculant le carré de la série dans la question b.*

b. $\frac{1}{1-X^3}$.

$\surd$ $\frac{1}{1-X^3} = \sum_{i\in\mathbf{N}} X^{3i}$ *dont les 10 premiers termes donnent* $1 + X^3 + X^6 + X^9$.

c. $\frac{1+2X+6X^3}{1-X}$. Utiliser une multiplication et une récurrence, et comparer les résultats.

$\surd$ *Multiplication par* $1+2X+6X$ *donne* $1+2X+2X^2+8X^3+8X^4+8X^5+8X^6+8X^7+8X^8+8X^9$.

d. $\frac{1+2X+7X^2}{1-X^4}$.

$\surd$ $1 + 2X + 7X^2 + X^4 + 2X^5 + 7X^6 + X^8 + 2X^9$.

e. $\left(\frac{1}{1-X^2}\right)\left(\frac{1}{1-X^3}\right)$. Utiliser une multiplication et une récurrence, et comparer.

$\surd$ *En multipliant* $\left(\frac{1}{1-X^2}\right) = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + \cdots$ *par* $\left(\frac{1}{1-X^3}\right) = 1 + X^3 + X^6 + X^9 + \cdots$ *on trouve* $1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7 + 2X^8 + 2X^9 + \cdots$. *On pourra également écrire* $\left(\frac{1}{1-X^2}\right)\left(\frac{1}{1-X^3}\right) = \frac{1}{1-X^2-X^3+X^5}$ *et trouver le résultat ci-dessus en résolvant une récurrence, comme il est illustré dans la réponse à question suivante.*

f. $\frac{1}{1-X-2X^3}$. Utiliser une récurrence et une substitution $X := X + 2X^3$ dans $\frac{1}{1-X}$, et comparer.

$\surd$ *Si l'on écrit* $\frac{1}{1-X-2X^3} = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_iX^i$, *l'identité* $(1-X-2X^3)(\sum_{i\in\mathbf{N}} a_iX^i) = 1$ *donne les équations* $a_0 = 1$, $a_1 - a_0 = 0$, $a_2 - a_1 = 0$, *et* $a_{i+3} - a_{i+2} - 2a_i = 0$ *pour* $i \in \mathbf{N}$*; on trouve* $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ *et ensuite successivement pour* $(a_3, \ldots, a_9)$ *les valeurs* 3, 5, 7, 13, 23, 37, 63, *d'où la réponse* $1 + X + X^2 + 3X^3 + 5X^4 + 7X^5 + 13X^6 + 23X^7 + 37X^8 + 63X^9$.

2. On a vu que l'identité algébrique $(1 + X)^n(1 + X)^m = (1 + X)^{n+m}$ donne, par comparaison des coefficients de X^k, l'identité combinatoire $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et (par exemple) $n, m \in \mathbf{Q}$.

a. Déduire de façon similaire une identité combinatoire de $(1-X)^{-n}(1-X)^{-m} = (1-X)^{-(n+m)}$, en utilisant l'expression en série formelle $\frac{1}{(1-X)^n} = \sum_{k\in\mathbf{N}}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)X^k$. Réécrire cette identité en termes de coefficients binomiaux $\binom{l}{k}$.

$\surd$ *On obtient la relation* $\sum_{i=0}^{k}\left(\!\binom{n}{i}\!\right)\left(\!\binom{m}{k-i}\!\right) = \left(\!\binom{n+m}{k}\!\right)$ *par comparaison des coefficients de* X^k *des deux membres de l'identité; elle est valable pour* $n, m \in \mathbf{Q}$ *et* $k \in \mathbf{Z}$. *On peut la traduire en termes de coefficients binomiaux comme* $\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i-1}{i}\binom{m+k-i-1}{k-i} = \binom{n+m+k-1}{k}$. *Des embellissements sont encore possible, par exemple en remplaçant* n *par* $n + 1$ *et* m *par* $m + 1$, *ce qui donne* $\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}\binom{m+k-i}{k-i} = \binom{n+m+k+1}{k}$. *Puis pour réduire le nombre d'occurrences de l'indice de sommation* i *on peut appliquer des symétries de la forme* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, *valable pour* $n \in \mathbf{N}$ *; sous les hypothèses additionnelles* $n, m \in \mathbf{N}$ *et* $k \geq -m$ *cela donne* $\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{n}\binom{m+k-i}{m} = \binom{n+m+k+1}{n+m+1}$, *et en remplaçant* k *par* $k-m$ *on obtient finalement* $\sum_{i=0}^{k-m}\binom{n+i}{n}\binom{k-i}{m} = \binom{n+k+1}{n+m+1}$ *pour* $n, m, k \in \mathbf{N}$.

b. Simplifier le produit $(1 + X)^n(1 - X)^n$, et déduire du résultat une identité combinatoire.

$\surd$ *On a d'abord* $(1 + X)^n(1 - X)^n = (1 - X^2)^n$. *Prenant le coefficient de* X^{2k+1} *donne l'identité* $\sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{2k+1-i} = 0$ *qui n'est pas surprenante car les termes pour* $i = i_0$ *et celui pour* $i = 2k + 1 - i_0$ *s'annulent, pour toute valeur de* i_0. *Prenant le coefficient de* X^{2k} *donne l'identité* $\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n}{2k-i} = (-1)^k\binom{n}{k}$ *qui est bien plus intéressante.*

3. Soit $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'entiers définie de façon récurrente par $t_0 = t_1 = 1$ et $t_i = t_{i-1} + 2t_{i-2}$ pour $i \geq 2$.

a. Déduire de la récurrence une équation pour la série génératrice $T = \sum_{n\in\mathbf{N}} t_n X^n \in \mathbf{Z}[[X]]$.

$\surd$ *La relation de récurrence dit que pour tout $k \geq 2$ le coefficient de X^k du produit $(1 - X - 2X^2)T$ est nul. Ce produit est donc un polynôme de degré au plus 1, qu'on détermine facilement des premiers termes par un calcul modulo X^2 : on obtient la constante 1. Donc $(1 - X - 2X^2)T = 1$.*

b. Exprimer T comme un quotient de deux polynômes.

$\surd$ $T = \frac{1}{(1-X-2X^2)}$.

c. Factoriser le dénominateur de cette expression comme un produit de facteurs de la forme $(1-\lambda X)$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$. Décomposer ensuite l'expression comme une somme de termes, dont chacun est un quotient avec dénominateur de la forme $(1 - \lambda X)$ (décomposition en éléments simples).

$\surd$ *On a $1 - X - 2X^2 = (1 - 2X)(1 + X)$. On veut écrire $\frac{1}{(1-X-2X^2)} = \frac{a}{1-2X} + \frac{b}{1+X}$ avec a, b des constantes, ce qui donne l'équation $a(1+X)+b(1-2X) = 1+0X$, qui équivaut au système $a+b = 1$, $a - 2b = 0$ dont la solution est $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$. On a trouvé $T = \frac{1}{(1-X-2X^2)} = \frac{2/3}{1-2X} + \frac{1/3}{1+X}$. [En général on factorise facilement un polynôme quadratique à coefficient constant 1 : $1 - bX - cX^2 = (1-\frac{X}{2}(b+\sqrt{b^2 + 4c}))(1-\frac{X}{2}(b-\sqrt{b^2 + 4c}))$, quelle identité est analogue à la factorisation bien connue des polynômes quadratiques unitaires $X^2 - bX - c = (X - \frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2 + 4c}))(X - \frac{1}{2}(b-\sqrt{b^2 + 4c}))$.]*

d. Utiliser le résultat du point précédent pour donner une expression explicite pour les nombres t_n.

$\surd$ *En utilisant l'expansion $\frac{1}{1-\lambda X} = \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda^i X^i$ dans $\mathbf{Z}[[X]]$ pour $\lambda = 2$ et pour $\lambda = -1$, on trouve $\sum_{n\in\mathbf{N}} t_n X^n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right)$, et donc $t_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$, pour $n \in \mathbf{N}$. On vérifie que les valeurs initiales de cette formule $1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \ldots$ satisfont bien à la relation de récurrence et aux conditions initiales.*