Corrigé Travaux dirigés iL01 : Mathématiques Discrètes, Feuille 1 vendredi 9 septembre 2005

1. Démontrer les énoncés suivants en utilisant le principe des tiroirs de Dirichlet.

a. Si S est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ avec $\#S = 101$, alors il existe $x, y \in S$ avec $x \neq y$ tels que $x - y$ soit divisible par 100.

$\surd$ *On envoie les éléments de S vers l'ensemble $\mathbf{Z}/100\mathbf{Z} = \{\, i + 100\mathbf{Z} \mid 0 \leq i \leq 99 \,\}$ des classes modulo 100, ou de façon équivalente vers l'ensemble $[0, 99]$; l'application envoie le nombre x vers la classe $i + 100\mathbf{Z} = \{\, i + 100k \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$ dont il est membre, ou vers le reste de x après division par 100 (c'est à dire le nombre formé des deux derniers chiffres de l'écriture décimale de x). Dans les deux cas l'ensemble d'arrivée est de cardinal 100, ce qui est strictement plus petit que celui de S, donc il y aura deux membres distincts de S avec la même image, et leur différence sera divisible par 100.*

b. Soit $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ une suite de nombres $x_i \in [0, 1[= \{\, x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1 \,\}$, alors il existe des indices distincts i, j tels que $|x_i - x_j| < \frac{1}{n}$.

$\surd$ *On envoie les x_i vers l'ensemble des n intervalles $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[$ de longueur $\frac{1}{n}$, pour $0 \leq i < n$, en associant à chaque nombre l'intervalle le contenant. La distance de deux nombres dans un intervalle étant toujours strictement plus petit que la longueur de l'intervalle, le principe des tiroirs établit l'existence des i, j cherchés.*

c. Soit $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n$ une suite de nombres $a_i \in \mathbf{Z}$, alors il existe des indices k, l avec $1 \leq k \leq l \leq n$ tels que $a_k + \cdots + a_l = \sum_{i=k}^{l} a_i$ soit divisible par n.

$\surd$ *On commence avec l'observation que $\sum_{i=k}^{l} a_i = (\sum_{i=0}^{l} a_i) - (\sum_{i=0}^{k-1} a_i)$ pour $1 \leq k \leq l \leq n$. Alors on envoie l'ensemble $[0, n]$ de cardinal $n + 1$ vers l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ des n classes modulo n, en envoyant m vers la classe de $\sum_{i=0}^{m} a_i$. D'après le principe des tiroirs, il existe $m, m' \in [0, n]$ avec $m < m'$ et $\sum_{i=0}^{m} a_i \equiv \sum_{i=0}^{m'} a_i \pmod{n}$. Alors on met $k = m + 1$ et $l = m'$ qui vérifient $1 \leq k \leq l \leq n$, et $\sum_{i=k}^{l} a_i$ est divisible par n.*

d. On suppose que «se connaître» est une relation symétrique : si une personne A connaît une personne B, alors B connaît aussi A. Avec cette hypothèse, il existe, dans tout groupe d'au moins deux personnes, une paire de personnes qui connaissent le même nombre d'autres personnes dans le groupe. [Indication: l'hypothèse implique que s'il existe quelqu'un qui connaît tout le monde, alors tout le monde le connaît.]

$\surd$ *On pose $n = \#A$. Chaque personne connaît un certain nombre p de personnes parmi les autres, avec $0 \leq p < n$. Comme le nombre de valeurs possible est égal au nombre de personnes, le principe de tiroirs n'exclut pas directement que tous les p soient distincts, ce qui pourrait arriver si toutes les valeurs possibles sont prises une seule fois. Mais si $p = n - 1$ la personne correspondante connaît tous les autres, et il n'y aura aucune personne qui ne connaît personne, donc les valeurs $p = 0$ et $p = n - 1$ ne peuvent pas être prises simultanément. Le nombres de valeurs distinctes de p est donc finalement au plus $n - 1$, ce qui permet le principe de tiroirs de fournir une paire avec la même valeur de p.*
(Question : l'hypothèse $\#A \geq 2$ ne peut pas être enlevée, mais où est-ce qu'on l'a utilisée ?)

2. Soient A, B deux ensembles finis. On va étudier le nombre d'applications $A \to B$, ainsi que les nombres de telles applications qui soient injectives, bijectives, ou surjectives.

a. Expliquer pourquoi ces réponses ne dépendront que des cardinaux $k = \#A$ et $n = \#B$ de A, B.

$\surd$ *En composant des applications $A \to B$ avec des bijections choisies une fois pour toutes $B \to [1, \#B]$ et $[1, \#A] \to A$, on trouve des applications $[1, \#A] \to [1, \#B]$ de la même nature (injective ou non, surjective ou non). En plus cette correspondance est bijective (son inverse peut être obtenu par composition avec les bijections inverses de celles choisies), d'où le nombre de ces applications est le même pour $A \to B$ que pour $[1, \#A] \to [1, \#B]$.*

b. Quel est le nombre d'applications $A \to B$ si $k = 0$? Et si $n = 0$? On exclut désormais ces cas extrêmes.

$\surd$ *Si $k = 0$ on considère des applications définies sur l'ensemble vide. Comme il n'y a rien à définir, il en existe une, quel que soit l'ensemble d'arrivée. Donc ne nombre est 1 dans ce cas. Si $n = 0$, tous les éléments de A doivent avoir leur image dans l'ensemble vide, ce qui est impossible. La réponse sera donc 0 pour $n = 0$, dès que A est non-vide, c'est à dire $k > 0$ (le cas $k = 0$ est déjà traité).*

c. Pour les cas des injections, des surjections et des bijections, donner des conditions nécessaires pour l'existence d'au moins une telle application. Est-ce ces conditions sont aussi suffisantes ? On suppose désormais ces conditions vérifiées.

$\surd$ *Pour avoir une injection il faut que $k \leq n$ (principe des tiroirs), pour avoir une surjection il faut que $k \geq n$, et pour avoir une bijection il faut que $k = n$. Ces conditions sont aussi suffisantes, qu'on peut montrer en se ramenant (comme dans le point a) au cas $A = [1, k]$ et $B = [1, n]$. La correspondance $i \mapsto i$ définit une injection $[1, k] \to [1, n]$ si $k \leq n$ et c'est une bijection si $k = n$. Pour une surjection $[1, k] \to [1, n]$ quand $k > n$ on pourra prendre par exemple $i \mapsto \min(i, n)$.*

d. Déterminer le nombre $N(k, n)$ d'applications $f : A \to B$. (On pourra établir une relation de récurrence en k, et la résoudre par une formule explicite.)

$\surd$ *$N(k+1, n) = nN(k, n)$, les n choix pour $f(k+1)$ étant indépendants de $f|_{[1,k]}$. Donc $N(k, n) = n^k$.*

e. Déterminer le nombre $N'(k, n)$ d'applications injectives $f : A \to B$. (Même indication.)

$\surd$ *$N'(k+1, n) = nN'(k, n-1)$ car pour chaque choix de $f(k+1)$, la restriction $f|_{[1,k]}$ est une injection $[1, k] \to [1, n] \setminus \{f(k + 1)\}$ quelconque. La solution s'écrit $N'(k, n) = n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$.*

f. Déterminer le nombre $N''(k, n)$ d'applications bijectives $A \to B$.

$\surd$ *Si $k \neq n$ on a $N''(k, n) = 0$, comme on a vu. Si $k = n$ c'est le même nombre que le nombre d'injections, donc le point précédent fournit la réponse $N''(n, n) = N'(n, n) = n(n - 1) \cdots 1 = n!$, ce qui colle pour le cas $A = B = [1, n]$ avec le nombre de permutations de n.*

g. Pour le nombre de surjections, c'est plus difficile, et il va falloir se contenter d'une formule récurrente. Montrer d'abord que si $f : [1, k + 1] \to [1, n]$ est une surjection, alors l'image $f([1, k])$ de la restriction de f aux premiers k éléments est soit égal à $[1, n]$ (c'est à dire la restriction reste surjective) soit elle vérifie $\#f([1, k]) = n - 1$ (il manque un élément à l'image).

$\surd$ *Avec $p = f(k + 1)$ on a $k + 1 \in f^{-1}[p]$, donc $\#f^{-1}[p] > 0$. Si en effet $\#f^{-1}[p] = 1$, alors p n'est pas dans l'image de la restriction de f à $[1, k]$, et $f([1, k]) = [1, n] \setminus \{p\}$ donc $\#f([1, k]) = n - 1$; si $\#f^{-1}[p] > 1$ la restriction mentionnée reste surjective sur $[1, n]$ (l'image est $[1, n]$).*

h. Si l'on désigne le nombre de surjections $[1, k] \to [1, n]$ par $P(k, n)$, montrer qu'on a la relation de récurrence $P(k + 1, n) = nP(k, n) + nP(k, n - 1)$ pour $k \geq n > 0$, ainsi que $P(k, 0) = 0$ pour $k > 0$ et $P(n, n) = n!$ pour $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *Chaque surjection $f : [1, k + 1] \to [1, n]$ vérifie soit $\#f^{-1}[p] > 1$ soit $\#f^{-1}[p] = 1$, où $p = f(k + 1)$. On a n possibilités pour p ; dans le premier cas la description de f est complétée par la donnée de la restriction surjective $f|_{[1,k]} : [1, k] \to [1, n]$, et dans le second cas par la donnée de la restriction surjective $f|_{[1,k]} : [1, k] \to [1, n] \setminus \{p\}$. Au total on trouve $P(k + 1, n) = nP(k, n) + nP(k, n - 1)$ si $n > 0$ (cette relation reste valable même si $k < n$, mais dans ce cas $P(k, n) = 0$). Pour $n = 0$ et $k > 0$ il n'y aucune application $[1, k] \to [1, n]$, et si $k = n$, on compte les $n!$ bijections $[1, k] \to [1, n]$.*

i. Montrer que $P(k, n)$ est toujours divisible par $n!$, et que si l'on pose $P(k, n) = n!S(k, n)$, alors la fonction S vérifie la relation de récurrence $S(k + 1, n) = nS(k, n) + S(k, n - 1)$ pour $k \geq n > 0$, ainsi que $S(k, 0) = 0$ pour $k > 0$ et $S(k, k) = 1$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *On pose $S(k, n) = \frac{P(k,n)}{n!}$, et on montrera la relation de récurrence, qui entraînera $S(k, n) \in \mathbf{N}$, par récurrence sur k, et pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'après ce qu'on sait déjà, on a $S(k, k) = 1$ et $S(k, n) = 0$ quand $n > k$ (ce qui couvre déjà le cas initial $k = 0$), ainsi que $S(k, 0) = 0$ pour $k > 0$. Il reste le cas $0 < n < k$, où $n!S(k + 1, n) = P(k + 1, n) = nP(k, n) + nP(k, n - 1) = n\,n!S(k, n) + n(n - 1)!S(k, n - 1) = n!(nS(k, n) + S(k, n - 1))$, et après division par $n!$ on conclut.*

j. Déterminer $S(k, n)$ pour $0 \leq k \leq 6$ et $0 \leq n \leq k$. Utiliser ce tableau pour déterminer le nombre de surjections $[1, 6] \to [1, 3]$.

$\surd$

k	$n = 0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$P(6, 3) = 3! \times S(6, 3) = 6 \times 90 = 540$.

3. On demande quelque calculs explicites avec des permutations. On suppose connue la décomposition d'une permutation en cycles. Le cycle $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_l)$ envoie $a_i \mapsto a_{i+1}$ pour $i < l$ et $a_l \mapsto a_1$.

a. Calculer la composée $(1\ 3\ 5) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ (1\ 3\ 4\ 6\ 2\ 5)$ dans $\mathbf{S}_6$.

$\surd$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

b. Déterminer la décomposition en cycles de $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.

$\surd$ $(1\ 3\ 4) \circ (2\ 5\ 7) \circ (6\ 10\ 9\ 8)$.

c. Calculer σ^{100} pour la même permutation σ.

$\surd$ *Comme les cycles commutent, on peut exercer chacun individuellement* 100 *fois. Pour le deux* 3*-cycles les premiers* 99 *itérations valent l'identité (il en reste une), et pour le* 4*-cycle tous les* 100 *itérations valent l'identité. Le résultat est donc* $\sigma^{100} = (1\ 3\ 4) \circ (2\ 5\ 7)$.