Corrigé Examen iL01, Mathématiques Discrètes vendredi 16 décembre 2005
9h00–12h00

1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants, pour $n \in \mathbf{N}$.

a. $\mathcal{P}([1,n])$ (l'ensemble des parties de $[1,n]$).

$\surd$ 2^n

b. L'ensemble des applications injectives $[1,n] \to [1,2n]$.

$\surd$ $(2n)^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(2n-i) = \frac{(2n)!}{n!}$.

c. $\{\, X \in \mathcal{P}([1,n]) \mid \#X = n-3 \,\}$ (les parties de $[1,n]$ de cardinal $n-3$).

$\surd$ *Si $n < 3$ l'ensemble est vide et le nombre est 0 ; si $n \geq 3$, le nombre est $\binom{n}{n-3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ (cette dernière formule donne aussi la bonne valeur pour $n < 3$).*

d. L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$ contenant n lettres $\mathtt{A}$ et n lettres $\mathtt{B}$.

$\surd$ *Les positions des $\mathtt{A}$ forment un sous-ensemble de cardinal n des $2n$ positions au total, d'où le nombre est $\binom{2n}{n}$.*

e. $\{\, (a_1, \ldots, a_5) \in \mathbf{N}^5 \mid \sum_{i=1}^{5} a_i = n \,\}$.

$\surd$ *Les compositions faibles de n en 5 parts : $\left(\!\binom{5}{n}\!\right) = \binom{n+4}{n} = \binom{n+4}{4} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{24}$.*

f. $\{\, (a_1, \ldots, a_7) \in \mathbf{Z}^7 \mid 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_7 < n \,\}$.

$\surd$ *L'ensemble $\{a_1, \ldots, a_7\}$ est un sous-ensemble de $[1, n-1]$ de cardinal 7 ; si $n > 0$ le nombre est donc $\binom{n-1}{7} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-7)}{7!}$ (pour $n = 0$ la valeur est 0, comme pour les autres $n \leq 7$).*

g. L'ensemble des permutations $\sigma \in \mathbf{S}_{2n}$ ayant n orbites de cardinal 2 (elles sont de type $(2, \ldots, 2)$).

$\surd$ *La formule du cours donne $\frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{1\times 2\times\cdots\times(2n-1)\times 2n}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \prod_{i=1}^{n}(2i-1)$.*

2. Pour $n \in \mathbf{N}$ on définit F_n comme la collection de graphes G vérifiant les 3 conditions suivantes : (1) l'ensemble de sommets $V(G)$ de G est égal à $[1,n]$; (2) G ne contient pas de cycles ; (3) pour tout $v \in V(G)$ on a $\deg(v) \leq 2$. On définit C_n comme le sous-ensemble de F_n des graphes qui vérifient en plus : (4) G est connexe. (On remarque que dans ces collections on n'identifie pas des graphes isomorphes ; par exemple C_3 contient trois graphes distincts, chacun isomorphe au chemin P_2 de longueur 2. On remarque également que F_0 contient le graphe vide, mais ce graphe n'étant pas considéré connexe par convention, C_0 ne contient aucun graphe.)

On pose $c_n = \#C_n$ et $f_n = \#F_n$ pour $n \in \mathbf{N}$, et on désigne par $F = \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n \frac{X^n}{n!}$ et $C = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n \frac{X^n}{n!}$ les séries génératrices exponentielles de ces suites de nombres.

a. Déterminer les nombres c_n pour $n \leq 4$.

$\surd$ *D'après l'introduction on a $c_0 = 0$, et pour $n = 1$ le seul graphe avec ensemble de sommets $\{1\}$ vérifie les conditions (1)–(4), donc $c_1 = 1$. Ensuite pour $n = 2$ il faut inclure l'arête $\{1,2\}$ pour vérifier (4), donc $c_2 = 1$; pour $n = 3$ il faut inclure deux arêtes parmi les trois possibles pour vérifier (4), mais pas toutes les trois à cause de (2). Finalement pour $n = 4$ c'est un peu plus de travail, mais on trouve sans problème les 12 possibilités. Donc $(c_0, \ldots, c_4) = (0, 1, 1, 3, 12)$.*

b. Pour $n > 0$, chaque graphe $G \in C_n$ est par définition un arbre sans sommet de degré ≥ 3 ; on admettra qu'un tel arbre est toujours isomorphe au chemin P_{n-1}. Par conséquent on peut obtenir, à partir d'un graphe $G_0 \in C_n$ quelconque, tout $G \in C_n$ par un changement convenable d'étiquettes des sommets de G_0 (formellement : pour tout $G \in C_n$ il existe au moins une permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ telle que σ définit un isomorphisme de graphes $G_0 \to G$). En considérant le nombre de changements d'étiquettes distincts qui produisent le même graphe $G \in C_n$, donner une expression pour c_n, valable pour $n \geq 2$.

$\surd$ *Si $n \geq 2$, il existe pour chaque $G \in C_n$ deux permutations qui réalisent un isomorphisme $G_0 \to G$ (on peut envoyer une feuille de G_0 vers l'une des deux feuilles de G, et après ce choix, le reste de la permutation est fixée). Ainsi le nombre de graphes dans C_n avec $n \geq 2$ est la moitie du nombre de permutations $\sigma \in \mathbf{S}_n$, c'est-à-dire $c_n = \frac{n!}{2}$. Un raisonnement équivalent est de dire que pour chacune des $n!$ manières d'ordonner linéairement les n points on obtient une graphe de C_n, mais le même graphe est aussi obtenu pour l'ordre inverse, et ces deux ordres sont distincts dès que $n \geq 2$.*

c. En déduire la formule suivante pour la série génératrice exponentielle : $C = \frac{2X-X^2}{2(1-X)}$.

$\surd$ $C = 0X^0 + 1X^1 + \sum_{n\geq 2} \frac{n!}{2}\frac{X^n}{n!} = X + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2} X^n = X + \frac{1}{2}\frac{X^2}{1-X} = \frac{2X-2X^2+X^2}{2(1-X)} = \frac{2X-X^2}{2(1-X)}$.

d. On fixe n, et on écrit v_0 pour le dernier élément de $[1, n+1]$ (c'est-à-dire $v_0 = n+1$, considéré comme un sommet). Pour déterminer un graphe $G \in F_{n+1}$, il suffit de spécifier les données suivantes : l'ensemble $S \subseteq [1, n]$ des sommets autre que v_0 qui sont dans la même composante connexe de G que v_0 ; la composante connexe G_1 de G contenant v_0 (c'est un graphe qui vérifie $V(G_1) = S \cup \{v_0\}$ ainsi que les conditions (2), (3) et (4) ci-dessus), et le graphe G_2 qui reste si l'on supprime la composante G_1 de G (ce graphe vérifie $V(G_2) = [1, n]\setminus S$ ainsi que les conditions (2) et (3) ci-dessus). Déduire de cette description une relation de récurrence qui exprime f_{n+1} en termes des nombres f_i pour $i \leq n$ et des nombres c_i.

$\surd$ *On regroupe tous les choix de S de la même taille k ; les valeurs possibles sont $0 \leq k \leq n$. Il y a $\binom{n}{k}$ tels choix, et pour un tel choix le nombre de possibilités pour G_1 est $\#C_{k+1} = c_{k+1}$ (car $\#V(G_1) = k+1$ et le nombre de possibilités ne dépend pas des étiquettes), et le nombre de choix pour G_2 est $\#F_{n-k} = f_{n-k}$ (car $\#V(G_2) = n-k$). On trouve ainsi $f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{k+1} f_{n-k}$.*

e. En déduire la formule $F = \exp(C)$ pour les séries génératrices exponentielles.

$\surd$ *En substituant $i = n-k$ dans la relation de récurrence trouvée, on trouve la forme alternative $f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i c_{n+1-i}$, et il a été montré dans le cours que cette relation entre les coefficients de deux séries génératrices exponentielles est équivalente à la relation $F = \exp(C)$ entre les séries.*

f. Calculer la valeur c_5 à l'aide de la formule trouvée dans la question *b* (les valeurs $c_0, \ldots, c_4$ étaient déjà déterminées), et en déduire les valeurs de f_n pour $0 \leq n \leq 5$.

$\surd$ *On a $c_5 = \frac{5!}{2} = 60$. Alors d'après la relation $F = \exp(C)$, ou plus directement la relation de récurrence $f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i c_{n+1-i}$, on trouve successivement*

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 1 \\
f_1 &= \binom{0}{0} f_0 c_1 = 1 \\
f_2 &= \binom{1}{0} f_0 c_2 + \binom{1}{1} f_1 c_1 = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 = 2 \\
f_3 &= \binom{2}{0} f_0 c_3 + \binom{2}{1} f_1 c_2 + \binom{2}{2} f_2 c_1 = 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 = 7 \\
f_4 &= \binom{3}{0} f_0 c_4 + \binom{3}{1} f_1 c_3 + \binom{3}{2} f_2 c_2 + \binom{3}{3} f_3 c_1 = 1\cdot 1\cdot 12 + 3\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 7\cdot 1 = 34 \\
f_5 &= 1\cdot 1\cdot 60 + 4\cdot 1\cdot 12 + 6\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 7\cdot 1 + 1\cdot 34\cdot 1 = 60 + 48 + 36 + 28 + 34 = 206
\end{aligned}
$$

3. Soit $V = [1,5]^4$, dont on considèrera les éléments comme des mots de longueur 4 sur l'alphabet $\{\texttt{1},\texttt{2},\texttt{3},\texttt{4},\texttt{5}\}$; ainsi un élément comme $(3,5,2,2) \in [1,5]^4$ sera abrégé `3522`. Une relation '$\sim$' entre de tels mots est définie par $abcd \sim a'b'c'd'$ si l'on a $a'b'c'd' \in \{bacd, acbd, abdc\}$ et $abcd \neq a'b'c'd'$, c'est-à-dire si $a'b'c'd'$ peut être obtenu à partir de $abcd$ par la transposition de deux lettres voisines distinctes. Par exemple pour $abcd = \texttt{3522}$ on a $\texttt{3522} \sim \texttt{5322}$ et $\texttt{3522} \sim \texttt{3252}$.

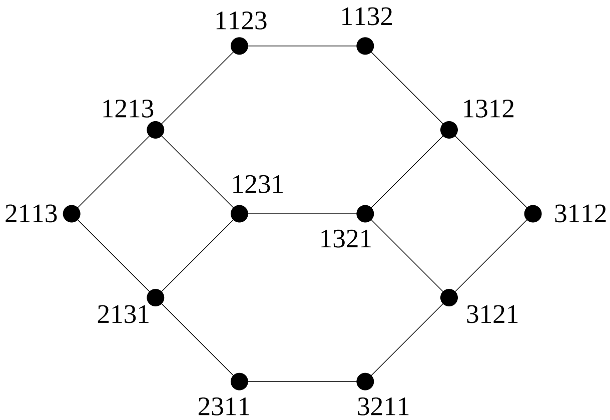
On définit le graphe $G = (V, E)$ où $E = \{\, \{v, v'\} \in \binom{V}{2} \mid v \sim v' \,\}$. Il vous est déconseillé d'essayer de dessiner ce graphe en totalité, il est trop grand.

a. Quel est le nombre $\#V$ de sommets de G ?

$\surd$ *C'est le nombre* $5^4 = 625$ *d'applications* $[1,4] \to [1,5]$.

b. Dessiner la composante connexe C de G contenant le sommet `1123`. Il ne vous est pas demandé de justifier la construction de cette composante, il suffit de décrire le sous-graphe C de G.

$\surd$

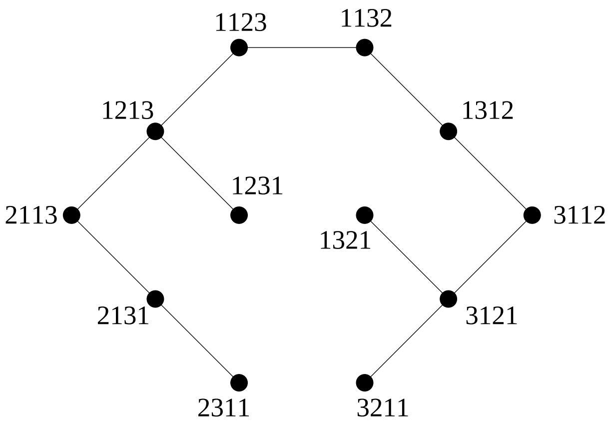


c. Donner le score de C (le multi-ensemble des degrés de ses sommets).

$\surd$ *Il y a six sommets de degré* 3 *et six de degré* 2, *d'où le score de* C *est* $\{\!\{2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3\}\!\}$.

d. Spécifier un arbre couvrant de C.

$\surd$ *Par exemple*



e. Déterminer le nombre d'automorphismes de C (le nombre d'isomorphismes de graphes $C \to C$).

$\surd$ *Parmi les sommets de degré* 3 *il y a deux dont tous les voisins sont aussi de degré* 3, *à savoir* `1231` *et* `1321`. *L'image de* `1231` *par un automorphisme est donc l'un des deux sommets, et les deux sont possibles car l'opération* $abcd \mapsto dcba$ *définit un automorphisme de* C *qui envoie* $\texttt{1231} \mapsto \texttt{1321}$ *(dans le dessin ci-dessus, c'est la réflexion dans un axe vertical). Un automorphisme qui fixe* `1231` *fixera aussi* `1321`, *mais les deux autres voisins de* `1231` *(à savoir* `2131` *et* `1213`*) peuvent être échangés : l'opération* $abcd \mapsto \pi(d)\pi(c)\pi(b)\pi(a)$, *où* $\pi \in \mathbf{S}_5$ *est la transposition de 2 et 3, réalise un tel automorphisme (dans le dessin ci-dessus, c'est la réflexion dans un axe horizontal). Or on voit qu'un automorphisme qui fixe* `1231` *et ses trois voisins est forcément l'identité (on raisonne successivement pour* `2113`, `2311`, `1123`, `3211`, `1132`, `3121`, `1312`, *et* `3112` *qu'ils sont aussi fixes). Au total* C *possède donc* $2 \times 2 = 4$ *automorphismes.*

f. Pour un sommet $abcd \in V$, appelons le «poids» du sommet le multi-ensemble $\{\!\{a,b,c,d\}\!\}$. Montrer que deux sommets appartiennent à la même composante connexe de G si et seulement si leur poids sont égaux.

$\surd$ *Une transposition de deux lettres dans un mot ne change pas le poids de ce mot, donc pour que deux mots appartiennent à la même composante connexe de G il est nécessaire que leur poids soient égaux. Or, en itérant des transpositions de lettres voisines, on peut mettre les lettres d'un mot dans n'importe quel ordre ; en particulier chaque mot peut être transformé en un mot faiblement croissant. Comme pour chaque multi-ensemble M de lettres il n'existe qu'un seul mot faiblement croissant avec poids M (qui liste les éléments de M en ordre croissant, en répétant chaque lettre selon sa multiplicité dans M), la condition $\{\!\{a,b,c,d\}\!\} = \{\!\{a',b',c',d'\}\!\}$ assure que $abcd$ et $a'b'c'd'$ peuvent être transformés, chacun en le même mot faiblement croissant, d'où ils appartiennent à la même composante connexe, et la condition donnée est aussi suffisante.*

g. Quel est le nombre de composantes connexes de G ?

$\surd$ *D'après le point précédent, c'est le nombre de multi-ensembles d'ordre 4 sur $[1,5]$, c'est-à-dire $\left(\!\binom{5}{4}\!\right) = \binom{8}{4} = \frac{5\times6\times7\times8}{4!} = 70$.*

h. [bonus] Déterminer le score de G.

$\surd$ *Le score est $\{\!\{0^{(5)}, 1^{(60)}, 2^{(240)}, 3^{(320)}\}\!\}$. On peut le déterminer en classifiant les composantes connexes de G par leur «type», qui est déterminé par le multi-ensemble des multiplicités (!) dans leur poids et qui détermine leur score (car on peut montrer que des composantes du même type sont toutes isomorphes), et ensuite combiner les résultats. (Par exemple* `1123` *est de poids $\{\!\{1,1,2,3\}\!\} = \{\!\{1^{(2)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}, 4^{(0)}, 5^{(0)}\}\!\}$, avec multi-ensemble des multiplicités $\{\!\{2,1,1,0,0\}\!\}$; pour* `4525` *on trouve le poids $\{\!\{2,4,5,5\}\!\} = \{\!\{1^{(0)}, 2^{(1)}, 3^{(0)}, 4^{(1)}, 5^{(2)}\}\!\}$ avec le même multi-ensemble des multiplicités $\{\!\{0,1,0,1,2\}\!\} = \{\!\{2,1,1,0,0\}\!\}$, donc sa composante est du même type ; au total il y a $\binom{5}{1,2,2} = \frac{5!}{1!2!2!} = 30$ tels composantes.) Ainsi on peut dresser le tableau suivant:*

type	*exemple*	*nombre de composantes*	*score composante*	*score cumulé*
$\{\!\{1,1,1,1,0\}\!\}$	`1234`	$\binom{5}{4,1} = 5$	$\{\!\{3^{(24)}\}\!\}$	$\{\!\{3^{(120)}\}\!\}$
$\{\!\{2,1,1,0,0\}\!\}$	`1123`	$\binom{5}{1,2,2} = 30$	$\{\!\{2^{(6)}, 3^{(6)}\}\!\}$	$\{\!\{2^{(180)}, 3^{(180)}\}\!\}$
$\{\!\{2,2,0,0,0\}\!\}$	`1122`	$\binom{5}{2,3} = 10$	$\{\!\{1^{(2)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}\}\!\}$	$\{\!\{1^{(20)}, 2^{(20)}, 3^{(20)}\}\!\}$
$\{\!\{3,1,0,0,0\}\!\}$	`1112`	$\binom{5}{1,1,3} = 20$	$\{\!\{1^{(2)}, 2^{(2)}\}\!\}$	$\{\!\{1^{(40)}, 2^{(40)}\}\!\}$
$\{\!\{4,0,0,0,0\}\!\}$	`1111`	$\binom{5}{1,4} = 5$	$\{\!\{0\}\!\}$	$\{\!\{0^{(5)}\}\!\}$

En prenant la somme des multiplicités dans la dernière colonne on trouve le score annoncé. Toutefois il existe une méthode plus simple de trouver le résultat, en comptant uniquement les sommets individuels. D'après la définition de '$\sim$', le degré d'un sommet est $3-e$ où e est le nombre d'occurrences d'une égalité parmi les trois paires de lettres voisines. Pour chaque modèle, par exemple $a = b \neq c \neq d$ (où on a $e = 1$) ou $a = b \neq c = d$ (où $e = 2$), le nombre de tels sommets est $5\times4^{3-e}$, car on a toujours 5 choix pour a, et puis 4 choix pour chaque lettre qui est précédée par '$\neq$' (et une seule choix pour chaque lettre précédée par '$=$', qui doit être égale à son prédécesseur). Alors pour le nombre de sommets de degré d on compte le nombre $\binom{3}{3-d} = \binom{3}{d}$ de modèles avec $e = 3-d$ égalités et donc degré $e-3 = d$, et on multiplie ce nombre par le nombre 5×4^d de sommets pour chaque modèle. On trouve ainsi

d	$\binom{3}{d}$	5×4^d	$\#\{$*sommets de degré* $d\}$
0	1	5	5
1	3	20	60
2	3	80	240
3	1	320	320

Fin.