Corrigé Contrôle continu Géométrie Élémentaire (L2) lundi 12 mars 2018
8h30-9h30

1. On considère un plan affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(3,8)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = 4\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', (\vec{u}, \vec{v}))$ est un autre repère cartésien de $\mathcal{E}$ (on l'admet).

a. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(-2,3)$.

$\surd$ *On a* $P = \mathcal{O}' - 2\vec{u} + 3\vec{v} = \mathcal{O} + 3\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 2(4\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}) + 3(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) = \mathcal{O} + \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ *donc les coordonnées demandées sont* $(1,3)$. *On peut aussi utiliser la "matrice de passage affine"*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{pour laquelle} \quad P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(1,7)$.

$\surd$ *Pour cette conversion il est utile d'exprimer d'abord* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *en termes de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, *ce qu'on peut faire en formant des combinaisons des équation définissant* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *; on a* $\vec{\imath} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{7}{2}\vec{v}$ *et* $\vec{\jmath} = \vec{u} - 2\vec{v}$. *Alors on calcule* $Q = \mathcal{O} + \vec{\imath} + 7\vec{\jmath} = \mathcal{O}' - (3\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}) + \vec{\imath} + 7\vec{\jmath} = \mathcal{O}' - 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = \mathcal{O}' + 3\vec{u} - 7\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{v} = \mathcal{O}' + 2\vec{u} - 5\vec{v}$ *et les coordonnées cherchées sont* $(2,-5)$. *Alternativement, on peut résoudre l'équation*

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

avec la matrice de passage affine P *ci-dessus, donnant* $(x,y) = (2,-5)$, *ou calculer son inverse*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7/2 & -3/2 & 1 \\ 11/2 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pour laquelle} \quad P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. *Dans les deux cas suivants, donner une équation pour l'ensemble indiqué, en termes des coordonnées cartésiennes* x, y *respectivement* x, y, z *de leurs points, par rapport aux repères donnés.*

a. $\mathcal{E}$ *un plan affine muni d'un repère cartésien* $(\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ *; l'ensemble est la droite passant par les points* A *de coordonnées* $(3,-5)$ *et le point* B *de coordonnées* $(-4,6)$.

$\surd$ *La formule*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & x \\ -5 & 6 & y \end{vmatrix} = 0$$

Donne après développement l'équation $-2 - 11x - 7 = 0$, *ou* $11x + 7y = -2$.

b. $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}))$; l'ensemble est le plan passant par les points P de coordonnées $(-1,2,-1)$, le point Q de coordonnées $(1,0,3)$, et le point R de coordonnées $(-2,3,-4)$

$\surd$ *La formule*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & x \\ 2 & 0 & 3 & y \\ -1 & 3 & -4 & z \end{vmatrix} = 0$$

Donne après développement l'équation $-2 + 2x + 2y + 0z = 0$, *ou* $x + y = 1$.

3. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites dans un plan affine muni d'un repère cartésien $(\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'équations respectives $ax + by = p$ et $a'x + b'y = q$.

a. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes (elles se coupent en un seul point) si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\surd$ *Un point de $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est solution du système d'équations*

$$\begin{aligned} ax + \ by &= p \\ a'x + b'y &= q \end{aligned}$$

On sait qu'un tel système, avec autant d'équations que d'inconnus, possède une solution unique si et seulement si le déterminant de la matrice de coefficients du premier membre est non nul (le système s'appelle alors un système de Cramer) ; c'est précisément la condition de l'énoncé. (Dans le cas contraire les deux droites sont parallèles ou confondues, et il y a soit aucun point commun, soit une infinitude de points communs.)

b. Soit $\mathcal{D}''$ une troisième droite dans ce plan, d'équation $a''x + b''y = r$. Montrer (indépendamment de la question précédente) que si $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont concourantes (elles passent toutes par un même point), alors la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{vmatrix} a & b & p \\ a' & b' & q \\ a'' & b'' & r \end{vmatrix} = 0.$$

$\surd$ *Cette question est assez différent de la précédente, dans laquelle les constantes p, q des équations ne jouent pas un rôle (si dans une paire de droites sécantes du plan on remplace une droite par une droite parallèle, elle sera toujours sécante avec l'autre droite). Ici ces constantes p, q, r doivent être prises en compte. Supposons que les droites passent toutes par le point de coordonnées (x_0, y_0). Cela veut dire pour la première droite que $ax_0 + by_0 = p$, ou $ax_0 + by_0 + p(-1) = 0$: le produit de la matrice à une ligne $(a\ b\ p)$ et celle à une colonne $(x_0, y_0, -1)$ est nul. Le fait que ce même point se trouve aussi sur les deux autres droites donne donc l'équation matricielle*

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ a' & b' & q \\ a'' & b'' & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elle rend manifeste que le noyau de la matrice à gauche n'est pas réduit au vecteur nul, et que cette matrice n'est donc pas inversible : cela veut dire que son déterminant est nul.

Fin.