Examen Géométrie Élémentaire (L2) mercredi 3 mai 2017
14h-16h

Choisir et traiter 4 parties parmi les 5 parties numérotées ci-dessous (elles sont indépendantes). Chaque partie sera notée sur 5 points, dans la limite de 4 parties par copie. Les calculettes ne sont pas autorisées.

1. On considère un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $(3, -1)$, et soient $\vec{u} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$; alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v})$ est un autre repère cartésien (on l'admet).

a. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(-2, 5)$.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(3, -4)$.

2. On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; les coordonnées par rapport à ce repère sont notées x, y. Soit P le point de coordonnées $(2, 7)$, $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ le vecteur de coordonnées $(-2, 3)$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 5y = -4$, et $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application affine avec $f(P) = P$ et dont $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ est la matrice par rapport à $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Décrire en coordonnées les objets géométriques suivantes (les calculs nécessaires sont indépendants) :

a. Le point d'intersection de la droite $\{\, P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$ avec $\mathcal{D}$.

b. La droite qui est image de $\mathcal{D}$ par la translation par le vecteur $\vec{v}$ (c'est-à-dire $A \mapsto A + \vec{v}$).

c. Le point $f(\mathcal{O})$ (image de l'origine $\mathcal{O}$ par f).

d. La droite $f(\mathcal{D})$ (image de $\mathcal{D}$ par f). [Il peut être utile d'écrire $\mathcal{D}$ sous forme paramétrée d'abord.]

3. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (donc $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormée).

a. Décrire par une équation cartésienne la droite passant par le point de coordonnées $(1, 7)$ et orthogonale au vecteur $3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

b. Décrire par une équation cartésienne le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A, B]$, où $A, B \in \mathcal{P}$ sont les points dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $(5, 3)$ respectivement $(1, -4)$.

4. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A, B, C)$ (un triangle). On rappelle que les coordonnées barycentriques (x, y, z) d'un point $S \in \mathcal{P}$ sont des nombres réels, soumis à la contrainte $x + y + z = 1$, pour lesquels $S = \operatorname{bar}((x, A), (y, B), (z, C))$. On abrégera cette relation $S = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$

a. Rappeler une formule donnée dans le cours qui exprime la condition que trois points $(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}}$, $(x_2, y_2, z_2)_{\mathcal{R}}$, et $(x_3, y_3, z_3)_{\mathcal{R}}$, sont alignés.

b. On choisit des points P sur la droite (BC), Q sur la droite (CA), et R sur la droite (AB), en évitant chaque fois les points A, B, C eux-mêmes (donc $\{P, Q, R\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$). Montrer que $P = (0, \lambda, 1 - \lambda)_{\mathcal{R}}$, $Q : (1 - \mu, 0, \mu)_{\mathcal{R}}$ et $R : (\nu, 1 - \nu, 0)_{\mathcal{R}}$ pour certains $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

c. Montrer que la droite (AP) est égale à $\{\, (x, y, z)_{\mathcal{R}} \mid x + y + z = 1, (\lambda - 1)y + \lambda z = 0 \,\}$

On écrira dans la suite $[a, b, c]_{\mathcal{R}}$ pour une droite ainsi définie par une équation en coordonnées barycentriques $\{\, (x, y, z)_{\mathcal{R}} \mid x + y + z = 1, ax + by + cz = 0 \,\}$. Donc $(AP) = [0, \lambda - 1, \lambda]_{\mathcal{R}}$ d'après la question précédente. De façon similaire $(B, Q) = [\mu, 0, \mu - 1]_{\mathcal{R}}$ et $(C, R) = [\nu - 1, \nu, 0]_{\mathcal{R}}$ (on l'admet).

d. On considère la question si les droites (AP), (BQ) et CR sont concourantes, c'est-à-dire s'il existe ou non un point S du plan qui est situé sur les trois droites à la fois. En posant un système d'équations linéaire, déduire une condition en λ, μ, ν équivalente à celle disant que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

e. Réorganiser (si besoin) votre condition en une équation de la forme $E_1(\lambda)E_2(\mu)E_3(\nu) = c$: le produit de trois expressions en respectivement λ, μ, et ν vaut une constate c (à détailler quelles expressions et quelle constante). Ce résultat est connu comme le théorème de Ceva.

5. Dans cet exercice on fera référence à la classification des isométries du plan euclidien $\mathcal{P}$: identité, réflections, rotations, translations, et réflections glissées.

a. De quelle nature peut être la composée de deux réflexions dans des droites distinctes ?

b. Montrer que la composée de trois réflexions par rapport à trois droites concourantes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ est une réflexion.

c. Décrire l'axe de cette réflexion composée, en terme des axes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ des réflexions initiales.

Fin.