Corrigé Examen Géométrie Élémentaire (L2) jeudi 23 juin 2016
14h-16h

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (donc en particulier $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme une base *orthonormée* de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{P}}$). Pour les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point $P \in \mathcal{P}$ on écrit (x, y). Soit C le point de coordonnées $(-2, 3)$.

a. Donner une équation pour le cercle de centre C et de rayon 7.

$\surd$ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 49$

b. Décrire l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $x^2 - 10x + y^2 + 4y = 45$.

$\surd$ *C'est le cercle de centre* $(5, -2)$ *et de rayon* $\sqrt{45 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{74}$.

c. Soient A, B le point de coordonnées $(1, 2)$ respectivement $(7, 4)$. Donner une équation pour l'ensemble des points P tels que $\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2$, et décrire l'ensemble de façon géométrique.

$\surd$ *L'équation* $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y-4)^2$ *se simplifie à* $3x + y = 15$. *Il s'agit de la droite médiatrice des points* A, B, *passant par leur milieu de coordonnées* $(4, 3)$ *et de vecteur normal* $\overrightarrow{AB}$ *de coordonnées* $(6, 2)$.

2. On considère un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(-3, 4)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

a. Montrer que $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v})$ est un autre repère cartésien.

$\surd$ *Il suffit pour cela que* $(\vec{u}, \vec{v})$ *soit une base de* $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ *(aucune restriction est imposée à l'origine d'un repère). Or* $\vec{u}, \vec{v}$ *sont clairement deux vecteurs indépendants, donc une base dans l'espace* $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ *qui est de dimension* 2. *On pourra éventuellement exprimer explicitement* $\vec{\imath} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$ *et* $\vec{\jmath} = \frac{1}{9}(5\vec{u} - 2\vec{v})$ *pour montrer que* $\vec{u}, \vec{v}$ *engendrent bien tout* $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(2, 2)$.

$\surd$ *Ce point est* $\mathcal{O}' + 2\vec{u} + 2\vec{v}$ *soit* $\mathcal{O} - 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 6i = \mathcal{O} + 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ *donc ces coordonnées sont* $(3, 4)$.

c. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(-1, 3)$.

$\surd$ *Ici les expressions pour* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *en termes de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *mentionnées dans la réponse à la question a seront utiles. Le point est* $\mathcal{O} - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} = \mathcal{O}' + 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} = \mathcal{O}' + 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = \mathcal{O}' + \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{9}(5\vec{u} + 2\vec{v}) = \mathcal{O}' + \frac{1}{9}\vec{u} + \frac{4}{9}\vec{v}$ *donc les coordonnées demandées sont* $(\frac{1}{9}, \frac{4}{9})$. *On pourra également trouver ce résultat par la résolution de l'équation* $\mathcal{O}' + x'\vec{u} + y'\vec{v} = \mathcal{O} - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ *qui donne le système linéaire* $-2x' + 5y' = 2$, $3x' - 3y' = -1$ *dont l'unique solution est donnée par* $x = \frac{1}{9}$ *et* $y' = \frac{4}{9}$.

d. On désigne par $x, y \in \mathbf{R}$ les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point P du plan, et par x', y' ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$. Soit $\mathcal{D}$ la droite donnée par rapport à $\mathcal{R}$ par l'équation $x + 3y + 5 = 0$. Donner une équation pour cette droite $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{R}'$, qui sera donc en termes des coordonnées x', y'. [Indication: la méthode des questions précédentes permet d'exprimer (x, y) en termes de (x', y') ; il suffit de substituer le résultat dans l'équation de $\mathcal{D}$.]

$\surd$ *Comme dans la question b, un point de coordonnées* (x', y') *par rapport à* $\mathcal{R}'$ *aura coordonnées* $(5 - x' - 2y', -8 + 3x' + y')$ *par rapport à* $\mathcal{R}$ *; en détail, cela découle du calcul* $\mathcal{O}' + x'\vec{u} + y'\vec{v} = \mathcal{O} - 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + x'(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) + y'(5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) = \mathcal{O} + (-3 - 2x' + 5y')\vec{\imath} + (4 + 3x' - 3y')\vec{\jmath}$. *Ceci permet d'écrire* $x = -3 - 2x' + 5y'$ *et* $y = 4 + 3x' - 3y'$. *En substituant ces expressions, l'équation* $x + 3y + 5 = 0$ *devient* $7x' - 4y' + 14 = 0$, *ce qui est (une forme possible de) l'équation cherchée.*

3. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. En termes des coordonnées (x, y) par rapport à $\mathcal{R}$, on définit une droite $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{P}$ par l'équation $5x + 12y = 28$.

a. Soit P l'image du point A de coordonnées $(4, 5)$ par la projection orthogonal sur la droite $\mathcal{D}_1$. Trouver le coordonnées de P.

$\surd$ *Le vecteur* $\vec{n}$ *de coordonnées* $(5, 12)$ *est un vecteur normal à la droite, et* $P \in \mathcal{D}_1$ *est tel que* $\overrightarrow{PA}$ *soit un multiple* $\lambda\vec{n}$ *(avec* $\lambda \in \mathbf{R}$*) ; pour ses coordonnées* (x, y) *cela donne* $(4 - x, 5 - y) = \lambda(5, 12)$. *On résout* $x = 4 - 5\lambda$ *et* $y = 5 - 12\lambda$, *et si on substitue cela dans l'équation* $5x + 12y = 28$ *on trouve* $52 = 169\lambda$ *qui donne* $\lambda = \frac{4}{13}$ *et donc* $(x, y) = (\frac{32}{13}, \frac{17}{13})$ *pour les coordonnées de* P.

b. Quelle est la distance du point A à la droite $\mathcal{D}_1$?

$\surd$ *C'est* $\|\lambda\vec{n}\| = |\lambda|\sqrt{5^2+12^2} = \frac{4}{13}\times 13 = 4$. *On peut aussi, mais c'est un peu plus fastidieux, calculer cette distance comme* $\sqrt{(4-\frac{32}{13})^2+(5-\frac{17}{13})^2} = \sqrt{\frac{2704}{169}} = \sqrt{16} = 4$.

c. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $5x+12y=80$. Vérifier que $A \in \mathcal{D}_2$ et argumenter que la distance de tout point de $\mathcal{D}_2$ à la droite $\mathcal{D}_1$ est égale à celle pour A trouvée dans la question précédente.

$\surd$ *On vérifie en calculant* $5\times 4+12\times 5 = 80$ *que* $P \in \mathcal{D}_2$. *La droite* $\mathcal{D}_2$ *est parallèle à* $\mathcal{D}_1$ *(par exemple parce que leurs équations ne permettent manifestement aucune solution commune), donc pour chaque* $B \in \mathcal{D}_2$ *sa projection sur* $\mathcal{D}_1$ *est* $Q = B - \overrightarrow{PA} \in \mathcal{D}_1$, *et la distance* $\|QB\| = \|PA\| = 4$.

d. Si l'on fixe $a \in \mathbf{R}$ quelconque, l'argument de la question précédente montre que tous les points de la droite d'équation $5x+12y=a$ ont la même distance à la droite $\mathcal{D}_1$, laquelle distance ne dépend donc que de la valeur de a. Exprimer cette distance en fonction de a.

$\surd$ *Avec* $P \in \mathcal{D}_1$ *de coordonnées* $(p,q) = (\frac{32}{13},\frac{17}{13})$ *(par exemple), le point* $P+\lambda\vec{n}$ *est de coordonnées* $(x,y) = (p+5\lambda, q+12\lambda)$, *ce qui vérifie* $5x+12y=a$ *si* $a = 5(p+5\lambda)+12(q+12\lambda) = 28+169\lambda$ *(car* $5p+12q=28$*), donc pour* $\lambda = \frac{1}{169}(a-28)$. *Dans ce cas la distance est* $\|\lambda\vec{n}\| = 13|\lambda| = |\frac{a-28}{13}|$, *ce qui est la formule demandée.*

4. Si $\mathcal{P}$ est un plan affine, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$, alors le triangle $\mathcal{S} = (\mathcal{O}+\vec{\imath},\mathcal{O}+\vec{\jmath},\mathcal{O})$ est une repère affine. Les coordonnées barycentriques (x,y,z) d'un point $P \in \mathcal{P}$ sont des nombres tels que $x+y=z=1$ et $P = \operatorname{bar}((x,\mathcal{O}+\vec{\imath}),(y,\mathcal{O}+\vec{\jmath}),(z,\mathcal{O}))$ (donc P s'écrit comme barycentre des sommets du triangle avec poids respectifs (x,y,z) ; en fait (x,y) sont les coordonnées cartésiens de P par rapport à $\mathcal{R}$, auxquelles on a simplement rajouté la coordonnée $z = 1-x-y$).

a. Montrer que pour $a,b,c \in \mathbf{R}$, pas tous égaux, l'équation $ax+by+cz=0$ en termes des coordonnées barycentriques définit une droite du plan.

$\surd$ *En posant* $z = 1-x-y$, *l'équation est équivalent à* $(a-c)x+(b-c)y+c=0$, *ce qui est bien l'équation d'une droite. (Elle ne le serait pas si* $a-c=0$ *et* $b-c=0$, *c'est-à-dire si* $a=b=c$, *raison pour laquelle mais c'est justement (plutôt dans le sujet distribué: aurait dû être) exclus.)*

b. Montrer que toute droite du plan s'écrit sous cette forme.

$\surd$ *Toute droite du plan peut être écrit en coordonnées cartésiennes sous la forme* $a'x+b'y=c'$ *avec* $(a',b') \neq (0,0)$. *Il suffit de prendre* $a = a'-c'$, $b = b'-c'$, *et* $c = -c'$ *pour que cette équation s'obtienne à partir de* $ax+by+cz=0$, *on on n'aurait* $a=b=c$ *que si* $a'=b'=0$, *le cas exclus.*

c. Montrer que deux triples (a,b,c) et (a',b',c') déterminent la même droite si et seulement si l'un est multiple de l'autre : $(a',b',c') = \lambda(a,b,c)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

$\surd$ *Multiplier une équation par une constante non nulle produit toujours une équation équivalente : la validité de l'ancienne entraîne la validité de la nouvelle, et réciproquement car on peut multiplier par la constante inverse. Or si deux équations ne sont pas ainsi liées, on peut facilement trouver une solution a l'une qui ne soit pas solution de l'autre. Par exemple si l'un à un coefficient nul à un endroit ou l'autre a un coefficient non nul, le point avec coordonnée* 1 *à cet endroit et* 0 *ailleurs est solution de la première sans l'être de la seconde. Sinon, si* $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ *alors* $(x,y,z) = (b,-a,0)$ *est solution de la première sans l'être de la seconde, et c'est pareil dans les autres positions.*

d. On considère maintenant trois triples (a,b,c), (a',b',c'), (a'',b'',c''), déterminant chacun une droite. Montrer que si les trois droites sont concourantes (c'est-à-dire ont un point commun aux trois) alors

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

$\surd$ *Le fait que les trois équations ont une solution commune que est non nulle (car la somme des coordonnées barycentriques d'un point est toujours* 1*) veut dire que le système des trois équations n'est pas de Cramer (il n'a pas une solution unique, qui serait nulle), ce qui pour un système* 3×3 *veut dire que le déterminant des coefficients est nul.*

e. Appelons (P_1, P_2, P_3) les sommets du triangle $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{D}_1$ une droite passant par P_1 et coupant le côté opposé du triangle $\mathcal{S}$ (la droite qui passe par P_2, P_3) en un point de coordonnées barycentriques $(0, \lambda, 1-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. De façon similaire soit $\mathcal{D}_2$ une droite passant par P_2 et coupant le côté opposé en un point de coordonnées barycentriques $(1-\mu, 0, \mu)$, et $\mathcal{D}_3$ une droite passant par P_3 et coupant le côté opposé en un point de coordonnées barycentriques $(\nu, 1-\nu, 0)$. On suppose qu'aucune des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ ne coïncide avec un côté du triangle $\mathcal{S}$. Montrer que si les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes, alors $\frac{\lambda}{1-\lambda} \times \frac{\mu}{1-\mu} \times \frac{\nu}{1-\nu} = 1$ (théorème de Ceva).

$\surd$ *Des coefficients (a, b, c) de $\mathcal{D}_1$ vérifient les équations $a = 0$ et $b\lambda + c(1-\lambda) = 0$ d'après les conditions que $\mathcal{D}_1$ contient les points P, de coordonnées $(1, 0, 0)$, et le point de coordonnées $(0, \lambda, 1-\lambda)$. On peut prendre $a = 0$, $b = \lambda - 1$ et $c = \lambda$ (et tout autre triple que décrit la même droite en est un multiple). De façon similaire on peut décrire $D\mathbf{2}$ par le triple $a' = \mu$, $b' = 0$ et $c' = \mu - 1$, ainsi que $\mathcal{D}_3$ par le triple $a'' = \nu - 1$, $b'' = \nu$ et $c' = 0$. Si les droites sont concourantes, alors d'après la question précédente*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 & \lambda \\ \mu & 0 & \mu - 1 \\ \nu - 1 & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne $\lambda\mu\nu + (\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1) = 0$. L'hypothèse que les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont distinctes des côtés du triangle veut dire que λ, μ, ν sont chacun distinct de 0 et de 1, donc les deux termes sont non nuls; l'égalité $\lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)$ donne $\frac{\lambda}{1-\lambda} \times \frac{\mu}{1-\mu} \times \frac{\nu}{1-\nu} = 1$, comme voulu.

Fin.