Corrigé Examen Espaces euclidiens et hermitiens mardi 11 mai 2021
8h30–11h30

1. *Questions de cours.*

a. Donner une description explicite du groupe $\mathbf{O}(2)$ des matrices 2×2 orthogonaux, et indiquer parmi ces matrices lesquelles forment le groupe $\mathbf{SO}(2)$.

2 $\surd$ *Le groupe $\mathbf{O}(2)$ est formé de toutes les matrices ci-dessous pour $\theta \in_R$ (ou pour $\theta \in [0, 2\pi[$, ce qui suffit):*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe $\mathbf{SO}(2)$ est formé des matrices du premier type seulement.

b. Pour une forme quadratique réelle Q avec forme polaire φ, donner les définitions des vecteurs φ-orthogonaux, des vecteurs isotropes, et du noyau de la forme.

2 $\surd$ *Deux vecteurs v, w sont φ-orthogonaux si $\varphi(v, w) = 0$, ce qui est une relation symétrique. Un vecteur v est isotrope si $Q(v) = 0$, ce qui est équivalent à la condition que v est φ-orthogonal à lui-même : $\varphi(v, v) = 0$. Le noyau de la forme est formé des vecteurs v tels que v soit φ-orthogonal à tous les vecteurs : $\forall w \in V : \varphi(v, w) = 0$ (c'est un sous-espace).*

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$$

a. Argumenter sans calcul qu'il existe dans $\mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ une matrice *diagonale* D et une matrice *orthogonale* P telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

1 $\surd$ *D'après le (corollaire du) théorème spectral, toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ sur une base de diagonalisation orthonormée. Puisque A est une telle matrice, il existe $D \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ diagonale et P orthogonale (dont les colonnes forment une base orthonormée de vecteurs propres) telles que $A = PDP^{-1}$, et donc $A = PD\,{}^tP$ car $P^{-1} = {}^tP$ quand P est une matrice orthogonale.*

b. Calculer et factoriser (dans $\mathbf{R}[X]$) le polynôme caractéristique χ_A de A. (On utilisera la définition $\det(XI - A)$ du polynôme caractéristique, qui est donc toujours unitaire.)

1 $\surd$ $\chi_A = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$

c. Déterminer des matrices D, P telles que décrites dans la question *a.*

3 $\surd$ *Directement de la factorisation de la question b on peut choisir*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et en calculant les espaces propres $\ker(A - \lambda I_3)$ pour $1, -2$ on trouve des espaces propres $E_1 = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0 \,\}$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}(((1, -1, 1)$. Pour obtenir une base orthonormée de vecteur propres il faut choisir une base orthonormée de chaque sous-espace propre. Pour E_1 qui est de dimension 2 on a beaucoup de choix; une base possible est $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2]$. Pour E_{-2} on ne peut choisir que $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ ou son opposé. Avec cela on trouve par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On considère dans $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure habituelle l'espace euclidien et orienté de telle façon que la base canonique est directe, l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est une rotation.

2 $\surd$ *Pour cela il faut vérifier deux choses :* ${}^tRR = I_3$ *(ce qui prouve que R est une matrice orthogonale) et* $\det(R) = +1$ *(en fait* $\det(R) > 0$ *suffit). Les deux se vérifient par un simple calcul. Vérifier que* ${}^tRR = \mathbf{I}_3$ *revient à vérifier que les colonnes de R forment une famille orthonormée dans* $\mathbf{R}^3$ *(chaque paire de colonnes est orthogonale, et chaque colonne est de norme au carré* $\frac{1}{3^2}(2^2+2^2+1^2) = \frac{9}{9} = 1$. *Pour* $\det(R) > 0$, *on peut calculer avec la règle de Sarrus que* $\det(3R) = 8+8-1-(-4-4-4) = 27 > 0$. *Une méthode alternative est de vérifier que* $\dim(\ker(R-I)) = 1$ *(car pour une rotation* $\ker(R-I)$ *est son axe, et un théorème dit que chaque* $\Omega \in \mathbf{O}(n)$ *peut s'écrire comme produit de* $n - \dim(\ker(\Omega - I))$ *réflexions, donc si on avait* $\Omega \in \mathbf{O}^-(3)$, *le sous-espace* $\dim(\ker(\Omega - I))$ *serait de dimension paire) ; on voit facilement que* $\ker(R-I) = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$, *donc ce noyau est de dimension* 1.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de f (axe, et angle orienté par rapport à une orientation qu'on spécifiera).

2 $\surd$ *L'axe est l'espace propre pour* $\lambda = 1$, *c'est-à-dire* $\ker(3R-3I)$, *et c'est* $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$. *Le choix du vecteur directeur* $(1,-1,1)$ *définit (avec l'orientation de* $\mathbf{R}^3$*) une orientation sur* $\mathcal{D}^\perp$. *L'angle orienté θ de la rotation vérifie* $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(R) = \frac{6}{3} = 2$ *donc* $\cos\theta = \frac{1}{2}$. *Comme* $\mathrm{Arccos}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, *on aura donc soit* $\theta \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ *soit* $\theta \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. *Lequel des deux est le case est déterminé par le signe de* $\sin\theta$. *On peut le déterminer en comparant*

$$R - {}^tR = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice de l'opération $v \mapsto v \wedge d$ *où* $d = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ *est le vecteur directeur normalisé de l'axe. On voit que les signes sont opposés, donc* $\sin\theta < 0$ *et* $\theta = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. *On peut vérifier qu'on a bien* $R - {}^tR = 2\sin(-\frac{\pi}{3})M = -\sqrt{3}M$, *comme le dit la théorie.*

4. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^4$ on définit la forme quadratique $Q : E \to \mathbf{R}$ en coordonnées par rapport à la base canonique par

$$Q((x,y,z,t)) = -x^2 + 2xz - 4xt + yz - 2yt - z^2 + 3zt - 4t^2$$

pour tout $x, y, z, t \in \mathbf{R}$.

a. Donner la matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique.

1 $\surd$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -1 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

b. En utilisant le procédé de Gauss, écrire $Q((x,y,z,t)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i(x,y,z,t)^2$, pour $k \leq 4$ et des scalaires non nuls $\lambda_i \in \mathbf{R}$ et des formes linéaires $\alpha_1(x,y,z,t),\ldots,\alpha_k(x,y,z,t)$ (des combinaisons linéaires des coordonnées x,y,z,t) qui sont linéairement indépendantes.

3 $\surd$ *On trouve d'abord le termes $-(x-z+2t)^2$ par un pas du premier type, qui contribuent à la matrice*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \textit{laissant} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ici seulement un pas du second type s'applique. Si on le choisit pour produire les seconde et troisième lignes et colonnes, le coefficient est $\lambda = \frac{1}{2}$, et donne une contribution $\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 - \frac{1}{4}(\alpha-\beta)^2$ où $\alpha(x,y,z,t) = z-2t$ et $\beta(x,y,z,t) = y-t$ sont tels que $\lambda\alpha$ et $\lambda\beta$ correspondent respectivement à la second et troisième ligne. Ce pas contribuent la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{laissant} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Finalement un dernier pas de type 1 contribue $-2t^2$, et on trouve

$$Q((x,y,z,t)) = -(x-z+2t)^2 + \frac{1}{4}(y+z-3t)^2 - \frac{1}{4}(y-z+t)^2 - 2t^2.$$

c. En déduire la signature de la forme quadratique Q, et son rang.

1 $\surd$ *Comme parmi les coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_4 = (-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -2)$, un coefficient est positif et trois coefficients sont négatifs, la signature de A est $(s,t) = (1,3)$ et son rang est $s+t = 4$ (c'est donc une forme non dégénérée).*

5. Soit E un espace euclidien, V un sous-espace vectoriel de E, $w \in E$ un vecteur que n'appartient pas à V, et $v \in V$ sa projection orthogonale sur V (on a donc $w - v \perp V$). Montrer que $\|w-v\| \leq \|w-v'\|$ pour tout $v' \in V$.

3 $\surd$ *Pour un tel vecteur $v' \in V$ on a $v-v' \in V$ et donc $v-v' \perp w-v$. Alors le théorème de Pythagore s'applique et donne pour $w-v' = (w-v)+(v-v')$ que $\|w-v'\|^2 = \|w-v\|^2 + \|v-v'\|^2$, et donc en particulier $\|w-v'\|^2 \geq \|w-v\|^2$. En prenant des racine carrées dans cette inégalité entre nombres réels positifs, on obtient $\|w-v'\| \geq \|w-v\|$ comme voulu.*