Corrigé Contrôle continu Espaces euclidiens et hermitiens (L2PR) mercredi 3 mars 2021
10h30–12h30

1. *Questions de cours.* Soit E un espace euclidien.

a. Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal de E.

$\sqrt{}$ *Un endomorphisme ϕ de E est orthogonal si pour tout $v, w \in E$ on a $(v \mid w) = (\phi(v) \mid \phi(w))$.*

b. Donner une formule pour la projection orthogonale sur un sous-espace V de E, en termes de données (de votre choix) qui décrivent V.

$\sqrt{}$ *Si $[b_1, \ldots, b_k]$ est une base orthonormée de V (une telle base existe pour tout (sous-)espace euclidien), la projection est donnée par la formule $v \mapsto (b_1 \mid v)\, b_1 + \cdots + (b_k \mid v)\, b_k$.*

c. Montrer que, si ϕ est un endomorphisme diagonalisable de E dont les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, alors ϕ est un endomorphisme symétrique.

$\sqrt{}$ *Pour un tel endomorphisme ϕ, choisissons une base orthonormée dans chaque sous-espace propre E_λ (avec $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$) ; en combinant ces base on obtient une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres unitaires. Puisque $E_\lambda \perp E_\mu$ dès que $\lambda \neq \mu$, il s'agit aussi d'une famille orthogonale, et donc d'une base orthonormée de E. Comme $\mathcal{B}$ es une base de diagonalisation pour ϕ, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ est diagonale es donc symétrique. Le fait que sa matrice, par rapport à une base orthonormée particulière de E, est symétrique, prouve que ϕ est un endomorphisme symétrique.*

2. Soit E un espace euclidien. On rappelle que pour $v \in E$ on a défini $v^\perp = \{\, w \in E \mid v \perp w \,\}$.

a. Montrer (en établissant des inclusions dans les deux sens) que $(v^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(v)$.

$\sqrt{}$ *On a $\{v\} \subseteq \mathrm{Vect}(v)$ et donc (inversion du sens d'inclusion entre parties au passage de A vers $A^\perp$, vue en TD) $v^\perp \supseteq \mathrm{Vect}(v)^\perp$ et donc $(v^\perp)^\perp \subseteq (\mathrm{Vect}(v)^\perp)^\perp$, et (double complément d'un sous-espace redonne ce sous-espace, résultat du même exercice) $(\mathrm{Vect}(v)^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(v)$, ce qui montre $(v^\perp)^\perp \subseteq \mathrm{Vect}(v)$. D'autre côté tout vecteur de $\mathrm{Vect}(v)$ s'écrit λv avec $\lambda \in \mathbf{R}$, et pour tout $w \in v^\perp$ on a alors $(\lambda v \mid w) = \lambda\,(v \mid w) = \lambda 0 = 0$ et donc $\lambda v \perp w$; puisque c'est vrai pour tout $w \in v^\perp$ on conclut $\lambda v \in (v^\perp)^\perp$, ce qui établit $\mathrm{Vect}(v) \subseteq (v^\perp)^\perp$.*

b. Montrer plus généralement pour $v_1, \ldots, v_k \in E$ que $(v_1^\perp \cap \cdots \cap v_k^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.

$\sqrt{}$ *La règle que, pour sous-espaces V, W on a $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$, s'étend (par en argument par récurrence sur le nombre de facteurs) à la situation de $k > 0$ facteurs: $(V_1 \cap \cdots \cap V_k)^\perp = V_1^\perp + \cdots + V_k^\perp$. En appliquant cela avec $V_i = v_i^\perp$, on obtient l'égalité $(v_1^\perp \cap \cdots \cap v_k^\perp)^\perp = (v_1^\perp)^\perp + \cdots + (v_k^\perp)^\perp$, et avec le résultat de le point a cela devient $\mathrm{Vect}(v_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(v_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.*

3. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<4}$ le $\mathbf{R}$-espace des polynômes de degré inférieur à 4. Sur E on définit la forme bilinéaire φ par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{4} P[i]Q[i]$$

où $P[a]$ pour $a \in \mathbf{R}$ désigne le résultat de substituer $X = a$ dans P.

a. En admettant que φ est une forme bilinéaire, montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

$\surd$ *Il faut vérifier que φ est symétrique et positive définie. La symétrie est facile : $\varphi(Q,P) = \sum_{i=0}^{4} Q[i]P[i] = \sum_{i=0}^{4} P[i]Q[i] = \varphi(P,Q)$. Pour la positivité il suffit de calculer $\varphi(P,P) = \sum_{i=0}^{4} P[i]^2 \geq 0$, et pour renchérir à "positive définie" on suppose $\varphi(P,P) = 0$; cela donne $P[i] = 0$ pour $i = 0,1,2,3,4$, et un polynôme de degré < 4 qui s'annule sous 5 évaluations distincts (en fait 4 aurait suffi) est nulle, donnant la conclusion $P = 0$ cherchée.*

b. Déterminer la matrice de la restriction de φ au sous-espace $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$, par rapport à la base $[1, X, X^2]$ de F.

$\surd$ *Après avoir calcule $\sum_{i=0}^{4} i^0 = 5$, $\sum_{i=0}^{4} i = 10$, $\sum_{i=0}^{4} i^2 = 30$, $\sum_{i=0}^{4} i^3 = 100$, ainsi que $\sum_{i=0}^{4} i^4 = 354$, on voit que*

$$\mathrm{Mat}_{[1,X,X^2]} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 254 \end{pmatrix}$$

c. Soit $V = \mathrm{Vect}(1, X)$; montrer que parmi les vecteurs $v \in V$, la valeur $\varphi(X^2 - v, X^2 - v)$ est minimale quand v est égale à la projection orthogonale v_0 de X^2 sur V.

$\surd$ *Pour $v \in V$ quelconque, on a $v_0 - v \in V$ et (par définition de la projection orthogonale) $X - v_0 \in V^\perp$, et donc $v_0 - v \perp X - v_0$. Le théorème de Pythagore s'applique, donnant $\varphi(X^2 - v, X^2 - v) = \varphi(v_0 - v, v_0 - v) + \varphi(X^2 - v_0, X^2 - v_0)$, une valeur qui est $\geq \varphi(X - v_0, X - v_0)$ car $\varphi(v_0 - v, v_0 - v) \geq 0$ (d'après la positivité de φ). Ainsi $\varphi(X^2 - v, X^2 - v)$ est minimal quand $v = v_0$.*

d. Trouver cette valeur minimale de $\varphi(X^2 - v_0, X^2 - v_0)$, et détailler le vecteur (polynôme) $v_0 \in \mathrm{Vect}(1, X)$ pour lequel cette valeur est obtenue.

$\surd$ *Dans ce qui précède, $X^2 - v_0$ est la projection orthogonale de X^2 sur $V^\perp$, et il s'agit de déterminer sa norme au carré. Une manière de calculer cette projection est d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt sans normalisation à la base $[1, X, X^2]$ de V, pour trouver une base orthogonale disons $[b_0, b_1, b_2]$, dont b_2 sera cette projection. On a $b_0 = 1$, ensuite $b_1 = X - \frac{(1|X)}{(1|1)}1 = X - \frac{10}{5}1 = X - 2$, et $b_2 = X^2 - \frac{(1|X^2)}{(1|1)}1 - \frac{(b_1|X^2)}{(b_1|b_1)}b_1 = X^2 - \frac{30}{5}1 - \frac{100-2\times 30}{30-20}b_1 = X^2 - 6 - 4b_1 = X^2 - 4X + 2$ On a finalement $\varphi(b_2, b_2) = \varphi(X^2, b_2) = 2\times 30 - 4\times 100 + 354 = 14$, la valeur minimale, atteinte pour $v_0 = X^2 - (X^2 - v_0) = 4X - 2 \in V$. Une façon plus facile pour calculer cette valeur, vue en cours, est de faire des opérations de gauche à droite sur $\mathrm{Mat}_{[1,X,X^2]}$ pour la rendre triangulaire supérieure:*

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 254 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 40 \\ 30 & 40 & 174 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 30 & 40 & 14 \end{pmatrix},$$

le dernier coefficient (14) de al dernière matrice étant $\varphi(X^2, b_2) = \varphi(b_2, b_2)$. Pour connaître es coordonnées des vecteurs représentés par les colonnes par rapport à la base initiale $[1, X, X^2]$, on fait les mêmes opérations de colonnes sur une matrices initialement I_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

montrant que la projection $X^2 - v_0$ en question (dernière colonne) est $2 \times 1 - 4X + X^2$.

4. Dans $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, considérons les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (0, -1, -4, 1)$ et $v_3 = (-2, -5, 4, 1)$; on pose $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

a. Donner une base du sous-espace $V^\perp$.

$\surd$ *Le système des équations en $w \in E$ données par $(v_i \mid w) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ est homogène, donc a pour solution un sous-espace vectoriel. Par la méthode du pivot de Gauss on trouve que ce sous-espace est de dimension 1 (le système échelonné a 3 pivots, et donc une seule colonne sans pivot), et engendré par exemple par la solution $w = (-2, 1, 0, 1)$. Ainsi $[(-2, 1, 0, 1)]$ est une base de $V^\perp$.*

b. Trouver une base orthonormée $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ de F adaptée à la décomposition $E = V \oplus V^\perp$, donc avec $[b_1, b_2, b_3]$ une base orthonormée de V et $[b_4]$ une base orthonormée de $V^\perp$.

$\surd$ *Le vecteur b_4 peut être trouvé en rendant $(-2, 1, 0, 1)$ unitaire, donnant $b_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 0, 1)$ (la seule autre possibilité pour b_4 est le vecteur unitaire opposé). Pour trouver $[b_1, b_2, b_3]$ une possibilité est d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $[v_1, v_2, v_3]$. Cela donne en normalisant v_1, $v_2 + \frac{14}{14}v_1 = (1, 1, -1, 1) = w_2$ et $v_3 - 0v_1 - \frac{10}{4}w_2 = \frac{1}{2}(1, -5, 2, 7)$, les vecteurs $b_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3, 0)$, $b_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$ et $b_3 = \frac{1}{\sqrt{84}}(1, -5, 3, 7)$. Mais on peut ne pas se baser sur les générateurs donnés : puisque $V = (v^\perp)^\perp$, le sous espace V est donné par une seule équation $V = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -2x + y + t = 0 \,\}$. Il n'est pas trop difficile d'y trouver une base orthonormée directement : on peut choisir $b_1 = (0, 0, 1, 0)$ et ensuite $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$ et finalement $b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1)$. Plein d'autre bases sont possibles.*

c. Décrire, pour un vecteur $w = (x, y, z, t)$ quelconque de E, ses projections orthogonales w_1 sur V et w_2 sur $V^\perp$, c'est-à-dire donner $w_1 \in V$ et $w_2 \in V^\perp$ tels que $w = w_1 + w_2$. [Comme les expressions explicites en termes de x, y, z, t peuvent être compliquées, il peut être pratique de les représenter sous forme d'une matrice opérant par multiplication sur le vecteur w.]

$\surd$ *Avec le bases de la question précédente, on peut écrire $w_1 = (b_1 \mid w)\, b_1 + (b_2 \mid w)\, b_2 + (b_3 \mid w)\, b_3$, et $w_2 = (b_4 \mid w)\, b_4$. Ainsi avec la seconde base (plus simple) on trouve*

$$w_1 = \left(\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} (0\ 0\ 1\ 0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ -1) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1 \end{pmatrix} (1\ 1\ 0\ 1) \right) \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix},$$

et la matrice entre parenthèses est

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2&2&0&2\\2&5&0&-1\\0&0&6&0\\2&-1&0&5 \end{pmatrix},$$

et

$$w_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2\\1\\0\\1 \end{pmatrix} (\,-2\quad 1\quad 0\quad 1\,) \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4&-2&0&-2\\-2&1&0&1\\0&0&0&0\\-2&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix}.$$

Mais on peut éviter le calcule détaillé de la matrice pour w_1 en calculant d'abord celle pour w_2 et en utilisant

$$w_1 = w - w_2 = \left(\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4&-2&0&-2\\-2&1&0&1\\0&0&0&0\\-2&1&0&1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix}$$

ce qui donne la même matrice trouvée ci-dessus.

Fin.