Contrôle continu Espaces euclidiens et hermitiens (L2PR) jeudi 20 février 2020
8h15–10h15

L'utilisation de documents ou de tout appareil électronique est interdite. Dans vos réponses aux questions autres que les questions de cours, vous pouvez citer et utiliser sans démonstration tout résultat du cours ou des TD. Les 4 parties sont indépendantes.

1. *Questions de cours.* E désigne un espace euclidien.
a. Donner la définition, pour une partie $A \subseteq E$, du complément orthogonal $A^\perp$. S'agit-il toujours d'une sous-espace de E (juste oui ou non ; pas d'argumentation demandée ici) ?
b. Si pour un endomorphisme (vectoriel) ϕ de E, il existe une base *orthonormée* de E formée de vecteurs propres pour ϕ, alors quel type d'endomorphisme ϕ est-il ?
c. Donner l'énoncé et une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<7}$ le $\mathbf{R}$-espace des polynômes de degré inférieur à 7. Sur E on définit la forme bilinéaire (on admet que c'en est une) φ par

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{7} \sum_{i=-3}^{3} P[i]Q[i]$$

où $P[a]$ pour $a \in \mathbf{R}$ désigne le résultat de substituer $X = a$ dans P (l'évaluation de P en a).
a. Montrer que la forme bilinéaire φ est un produit scalaire sur E.
b. On restreint ce produit scalaire φ au sous-espace $V = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$ de E. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi|_V)$ de cette restriction $\varphi|_V$ par rapport à la base $\mathcal{B} = [1, X, X^2]$ de V.
c. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ pour trouver une base orthonormée de V.
d. Montrer que pour $S = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4, X^6)$ et $T = \mathrm{Vect}(X, X^3, X^5)$ on a $S \perp T$.
e. Montrer que $E = S \oplus T$ et en déduire $T = S^\perp$.

3. Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, dans lequel on considère le sous-espace vectoriel (on admet que c'en est un) $V = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \,\}$.
a. Donner $\dim(V)$, et trouver une base orthonormée de V.
b. Donner $\dim(V^\perp)$, et trouver une base orthonormée de $V^\perp$.
c. Donner la matrice de la projection orthogonale (c'est-à-dire parallèlement à $V^\perp$) sur V [Indication : il peut être utile de considérer d'abord la projection orthogonale sur $V^\perp$.]

4. Soient $w_1, \ldots, w_k$ des vecteurs non nuls dans un espace euclidien E.
a. Montrer que $(w_i^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(w_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$.
b. Soit $V = w_1^\perp \cap \cdots \cap w_k^\perp$. Montrer que $V^\perp = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k)$.
[Indication : on pourra utiliser les formules pour le complément orthogonal vues en TD.]

Fin.