Corrigé Examen Espaces euclidiens et hermitiens mercredi 15 mai 2019
8h30–11h30

1. *Question de cours.* Dans cette question portant sur les formes quadratiques, vous pouvez supposer les notions introduites dans le chapitre 1 (espaces euclidiens) comme connues. Vous pouvez donc utiliser ces notions sans détailler leur définition.

a. Donner la définition d'une forme quadratique sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

$\surd$ *Une forme quadratique sur E est une fonction $E \to \mathbf{R}$ qui s'écrit comme combinaison linéaire de produits fg de deux formes linéaires $E \to \mathbf{R}$, où fg est défini comme un produit de fonctions, c'est-à-dire c'est $x \mapsto f(x)g(x)$.*

b. Pour une forme quadratique Q donnée, donner une formule de polarisation (qui exprime les valeurs de sa forme polaire φ en termes de celles de Q), ainsi que sa démonstration.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$$

a. Argumenter sans calcul qu'il existe dans $\mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ une matrice *diagonale* D et une matrice *orthogonale* P telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

$\surd$ *D'après le (corollaire du) théorème spectral, toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ sur une base de diagonalisation orthonormée. Puisque A est une telle matrice, il existe $D \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ diagonale et P orthogonale (dont les colonnes forment une base orthonormée de vecteurs propres) telles que $A = PDP^{-1}$, et donc $A = PD\,{}^tP$ car $P^{-1} = {}^tP$ quand P est une matrice orthogonale.*

b. Calculer et factoriser (dans $\mathbf{R}[X]$) le polynôme caractéristique χ_A de A.

$\surd$ $\chi_A = X^3 - 7X^2 - X + 7 = (X-7)(X-1)(X+1)$

c. Déterminer des matrices D, P telles que décrites dans la question *a*.

$\surd$ *Directement de la factorisation de la question b on peut choisir*

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et en calculant les espaces propres $\ker(A - \lambda I_3)$ pour $\lambda = 7, 1, -1$ on voit qu'on peut choisir

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On considère dans $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure habituelle l'espace euclidien et orienté de telle façon que la base canonique est directe, l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est une rotation.

$\surd$ *Pour cela il faut vérifier deux choses :* ${}^tRR = I_3$ *et* $\det(R) = +1$ *(en fait* $\det(R) > 0$ *suffit). Les deux se vérifient par un simple calcul. Pour* ${}^tRR = \mathbf{1}_3$ *on est en train de vérifier que les colonnes de* R *forment une famille orthonormée des* $\mathbf{R}^3$*, et les produits scalaires sont tous calculés par une variante de* $6\times 3 - 3\times 2 - 2\times 6 = 0$ *pour le cas des deux colonnes distinctes, et* $\frac{1}{49}(2^2+6^2+3^2) = \frac{49}{49} = 1$ *pour le cas de deux colonnes identiques. Pour* $\det(R) > 0$*, on peut calculer avec la règle de Sarrus que* $\det(7R) = 3(2\times 3\times 6) - (-3^3 + 2^3 - 6^3) = 343 > 0$ *(en fait tous les termes sauf* -2^3 *sont positifs ici).*

b. Déterminer les éléments caractéristiques de f (axe, et angle orienté par rapport à une orientation qu'on spécifiera).

$\surd$ *L'axe est l'espace propre pour* $\lambda = 1$*, c'est-à-dire* $\ker(7R - 7I)$*, et c'est* $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}((0,1,-2))$*. Le choix du vecteur directeur* $(0,1,-2)$ *définit (avec l'orientation de* $\mathbf{R}^3$*) une orientation sur* $\mathcal{D}^\perp$*. L'angle orienté* θ *de la rotation vérifie* $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(R) = \frac{11}{7}$ *donc* $\cos\theta = \frac{2}{7}$*, et on aura donc soit* $\theta \equiv \mathrm{Arccos}(\frac{2}{7}) \pmod{2\pi}$ *soit* $\theta \equiv -\mathrm{Arccos}(\frac{2}{7}) \pmod{2\pi}$*. Lequel des deux est le case est déterminé par le signe de* $\sin\theta$*. On peut le déterminer en comparant*

$$R - {}^tR = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -6 \\ 12 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(cette dernière étant la matrice de l'opération $v \mapsto v \wedge d$ *où* $d = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2)$ *est le vecteur directeur normalisé) on voit que les signes sont opposés, donc* $\sin\theta$ *et* $\theta = -\mathrm{Arccos}(\frac{2}{7}) \pmod{2\pi}$ *(on peut vérifier que le facteur de proportionnalité est bien* $2\sin(\theta) = -\frac{6}{7}\sqrt{5}$*).*

4. Soit E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$. Pour $v \in E \setminus \{0\}$, on définit $\sigma_v \in \mathrm{End}(E)$ par $\sigma_v(w) = w - 2\frac{(v|w)}{(v|v)}v$; c'est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

a. Montrer que σ_v est une involution (c'est-à-dire, que σ_v est son propre inverse).

$\surd$ *Soit* $w \in E$ *et* $w' = \sigma_v(w) = w - 2\frac{(v|w)}{(v|v)}v$*. Alors* $\big(v \mid w'\big) = (v \mid w) - 2\frac{(v|w)}{(v|v)}(v \mid v) = -(v \mid w)$*, et donc* $\sigma_v(w') = w' - 2\frac{(v|w')}{(v|v)}v = w' + 2\frac{(v|w)}{(v|v)}v = w$*, ce qui prouve* $\sigma_v(\sigma_v(w)) = w$ *, et comme c'est vrai pour tout* $w \in E$ *on a montré que* σ_v *est une involution.*

b. Rappeler pourquoi (ou montrer par votre propre argumentation que) σ_v est à la fois un endomorphisme symétrique et un endomorphisme orthogonal de E.

$\surd$ *Clairement* $\sigma_v(v) = v - 2v = -v$*, donc* v *est un vecteur propre de* σ_v *avec valeur propre* -1*, et tout vecteur* $w \perp v$ *vérifie* $\sigma(w) = w - 0v = w$*, et est donc (sauf si* $w = 0$*) un vecteur propre de* σ_v *avec valeur propre* 1*. Ainsi* σ_v *admet une base orthogonale, et qu'on peut rendre orthonormée, formée de vecteurs propres ; par conséquent* $\sigma_v(v)$ *est symétrique (réciproque du théorème spectral). Puisque* $\sigma_v^{-1} = \sigma_v$ *(question a), il est aussi orthogonal (*$\sigma_v^* = \sigma_v$ *entraîne alors* $\sigma_v^* = \sigma_v^{-1}$*).*

On fixe deux vecteurs non nuls $u, v \in E$, et on forme la composée $\phi = \sigma_u \circ \sigma_v$.

c. Montrer que ϕ est toujours un endomorphisme orthogonal.

$\surd$ *La composée de deux endomorphisme orthogonaux est orthogonal.*

d. Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique si et seulement si $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_v \circ \sigma_u$.

$\surd$ *Puisque σ_u et σ_v sont symétriques, on a pour tout $w_1, w_2 \in E$ que*

$$(\sigma_u \circ \sigma_v(w_1) \mid w_2) = (\sigma_v(w_1) \mid \sigma_u(w_2)) = (w_1 \mid \sigma_v(\sigma_u(w_2))),$$

et cela est égal a $(w_1 \mid \sigma_u \circ \sigma_v(w_2))$ pour tout w_1, w_2 si et seulement si $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_v \circ \sigma_u$ (pour la direction "seulement si" on a utilisé que pour v, w donnés, on a $(u \mid v) = (u \mid w)$ pour tout vecteur u seulement si $v = w$).

5. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^4$ on définit la forme quadratique $Q : E \to \mathbf{R}$ en coordonnées par rapport à la base canonique par

$$Q((x, y, z, t)) = 2x^2 + 2xy - 6xz + yt + zt - \frac{1}{2}t^2$$

pour tout $x, y, z, t \in \mathbf{R}$.

a. Donner la matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique.

$\surd$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b. Déterminer le rang r et la signature (s, t) de Q, en appliquant l'algorithme de Gauss.

$\surd$ *On trouve successivement les termes $2(x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z)^2$ et $-\frac{1}{2}(y - 3z - t)^2$ par des pas du premier type, qui contribuent à la matrice respectivement*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textit{laissant} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(forme $4zt$) qui donne lui à un pas final qui contribue deux termes $(z + t)^2 - (z - t)^2$. Les pas contribuent respectivement $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ au couple (s, t), donnant finalement signature $(s, t) = (2, 2)$, et donc rang $r = s + t = 4$.

c. Donner une expression de Q comme somme de r termes, chacun formé d'un scalaire réel non nul fois le carré d'une forme linéaire. (L'algorithme de Gauss fournit déjà cette information ; les r formes linéaires concernées seront linéairement indépendantes.)

$\surd$ $Q((x, y, z, t)) = 2(x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z)^2 - \frac{1}{2}(y - 3z - t)^2 + (z + t)^2 - (z - t)^2$.

Fin.