Corrigé Contrôle continu Espaces euclidiens et hermitiens (L2PR) vendredi 15 mars 2019
8h15–10h15

1. *Question de cours.* Montrer que si $\mathcal{F} = [f_1, \ldots, f_k]$ est une famille orthonormée dans un espace euclidien E, on a $E = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \oplus \mathcal{F}^\perp$. Si vous citez un résultat du cours, donner également une démonstration de ce résultat (ou du moins de la partie dont vous avez besoin) ; les résultats généraux d'algèbre linéaire peuvent être cités et utilisés sans démonstration.

$\surd$ *La preuve de la proposition 1.4.4 du cours qui affirme (entre autres) ceci était visiblement trop concise pour être bien comprise ; en tout cas les détails de l'argumentation sont souvent mal rendus dans vos réponses. Voici un version plus détaillée de l'argument. On commence par montrer que pour toute combinaison linéaire $v = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et tout indice i on a $(f_i \mid v) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i$. En particulier on voit que $v = 0$ entraîne $\lambda_i = (f_i \mid 0) = 0$ pour tout i, ce qui dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Ensuite on définit un endomorphisme π en par $\pi : v \mapsto \sum_{i=1}^k (f_i \mid v) f_i$ (dans la proposition 1.4.4, π est défini dans l'énoncé). On montre ainsi que π est un projecteur ($\pi^2 = \pi$). On prend $w \in E$ quelconque, et on pose $v = \pi(w) = \sum_{i=1}^k (f_i \mid w) f_i$ qui est donc de la forme $v = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j$ pour $\lambda_i = (f_i \mid w)$; montrer que $\pi^2(w) = \pi(w)$ revient à montrer $\pi(v) = v$. Cela se fait grâce à la formule $(f_i \mid v) = \lambda_i$ établie ci-dessus :*

$$\pi(v) = \sum_{i=1}^k (f_i \mid v) f_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i = v. \qquad (*)$$

Il est connu du cours d'algèbre linéaire qu'un projecteur π est diagonalisable avec $\mathrm{Spec}(\pi) \subseteq \{0, 1\}$ (car le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ est annulateur de π), ce qui veut dire que E est la somme directe des sous-espaces propres E_0 et E_1 de π. Cette somme nous donnera la décomposition $E = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \oplus \mathcal{F}^\perp$ cherchée, avec $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = E_1$ et $\mathcal{F}^\perp = E_0$. La formule $(*)$ montre $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) \subseteq E_1$ (toute combinaison linéaire des f_i est fixée par π), et $E_1 \subseteq \mathrm{Im}(\pi) \subseteq \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k)$ est aussi clair, d'où $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = E_1$. On a $E_0 = \ker(\pi)$ par définition, et puisque $\mathcal{F}$ est libre la condition $\pi(w) = 0$ est équivalent à $(f_i \mid w) = 0$ pour tout i, autrement dit $\ker(\pi) = \mathcal{F}^\perp$, ce qui montre $\mathcal{F}^\perp = E_0$. (Au lieu de s'appuyer sur les propriétés générales des projecteurs, on peut aussi aller un peu plus droit au but à partir de $\pi(v) = v$ pour $v = \pi(w)$: on a $w = v + (w - v)$ avec $v \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $w - v \in \mathcal{F}^\perp$ car $(f_i \mid w) = \lambda_i = (f_i \mid v)$ pour tout i, donc $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) + \mathcal{F}^\perp$; que la somme est directe est équivalent à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}^\perp = \{0\}$, ce qui est une conséquence de l'équation $\left(f_i \mid \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j\right) = \lambda_i$ établie au départ.)

2. Dans $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, posons $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, où $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, et $v_3 = (0, 0, 3, 1)$.

a. Montrer que $[v_1, v_2, v_3]$ est une base du sous-espace F.

$\surd$ *Puisque $[v_1, v_2, v_3]$ est par définition une famille génératrice de $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, il suffit de montrer que c'est un une famille libre. Or, d'une relation $x(1, 1, 0, 0) + y(0, 2, 1, 0) + z(0, 0, 3, 1) = (0, 0, 0, 0)$ on déduit facilement (première composante) $x = 0$ et (dernière composante) $z = 0$, et ensuite (seconde composante) $y = 0$, montrant que la famille est libre.*

b. Trouver une base orthonormée $[b_1, b_2, b_3]$ de F telle qu'on ait en plus $\mathrm{Vect}(b_1) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $\mathrm{Vect}(b_1, b_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

$\surd$ *Il convient d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $[v_1, v_2, v_3]$, car cela assure toutes les conditions demandées. Pour cela on commence par faire l'orthogonalisation $v_2' = v_2 - \frac{(v_1|v_2)}{(v_1|v_1)}v_1 = v_2 - \frac{2}{2}v_1 = (-1, 1, 1, 0)$ et*

$$v_3' = v_3 - \frac{(v_1 \mid v_3)}{(v_1 \mid v_1)}v_1 - \frac{\left(v_2' \mid v_3\right)}{\left(v_2' \mid v_2'\right)}v_2' = v_3 - \frac{0}{2}v_1 - \frac{3}{3}v_2' = (1, -1, 2, 1),$$

et on finit par normaliser $b_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $b_2 = \frac{1}{\|v_2'\|}v_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0)$, et $b_3 = \frac{1}{\|v_3'\|}v_3' = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -1, 2, 1)$.

c. Déterminer la projection orthogonale de $(1, 0, 0, 0)$ sur $F^\perp$.

$\surd$ *Deux approches sont possible ici. On peut projeter $w = (1, 0, 0, 0)$ et soustraire le résultat de w, comme si on continuait le procédé de Gram-Schmidt pour la famille $[v_1, v_2, v_3, w]$, ce qui donne*

$$w - \frac{(v_1 \mid w)}{(v_1 \mid v_1)}v_1 - \frac{\left(v_2' \mid w\right)}{\left(v_2' \mid v_2'\right)}v_2' - \frac{\left(v_3' \mid w\right)}{\left(v_3' \mid v_3'\right)}v_3'$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 42 - 21 - 14 - 6 \\ -21 + 14 + 6 \\ 14 - 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi d'abord déterminer un vecteur non nul v de la droite $F^\perp$ et l'utiliser pour calculer la projection $\frac{(v|w)}{(v|v)}v$ de w sur $F^\perp$. En résolvant un système de 3 équations (le plus simple est d'utiliser les générateurs v_1, v_2, v_3 de F, bien que les vecteurs b_1, b_2, b_3 donnent un système équivalent) on trouve par exemple $v = (-1, 1, -2, 6)$, et ensuite la projection $\frac{-1}{42}v = \frac{1}{42}(1, -1, 2, -6)$.

3. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<4}$ le $\mathbf{R}$-espace des polynômes de degré inférieur à 4. Sur E on définit la forme bilinéaire φ par

$$\varphi(P, Q) = P[0]Q[0] + \int_0^1 P'[t]Q'[t]\mathrm{d}t$$

où $P[a]$ pour $a \in \mathbf{R}$ désigne le résultat de substituer $X = a$ dans P, et P' désigne le polynôme dérivé par rapport à X de P.

a. En admettant que φ est une forme bilinéaire, montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

$\surd$ *Pour la symétrique de la forme, on a $\varphi(Q, P) = Q[0]P[0] + \int_0^1 Q'[t]P'[t]\mathrm{d}t = \varphi(P, Q)$. Pour montrer que φ est définie positive, observons que $\varphi(P, P) = P[0]^2 + \int_0^1 P'[t]^2\mathrm{d}t \geq 0$ pour tout $P \in E$, et pour qu'on ait égalité il faut à la fois $P[0]^2 = 0$ et $\int_0^1 P'[t]^2\mathrm{d}t = 0$. L'intégrale sur un intervalle I d'une fonction f continue et positive sur I ne peut être nulle que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, donc comme P' est un polynôme, $\int_0^1 P'[t]^2\mathrm{d}t = 0$ entraîne $P' = 0$, autrement dit P est un polynôme constant, mais dans ce cas $P[0]^2 = 0$ veut dire que $P = 0$, donc on a $\varphi(P, P) = 0$ seulement pour $P = 0$. Donc φ est un produit scalaire.*

b. Déterminer la matrice de φ par rapport à la base canonique $[1, X, X^2, X^3]$ de E.

$\surd$ *On peut calculer séparément $\varphi(1, Q) = Q[0]$ pour tout Q et $\varphi(X^k, X^l) = kl \int_0^1 t^{k+l-2} \mathrm{d}t = \frac{kl}{k+l+1}$ pour $k, l > 0$, pour obtenir*

$$\mathrm{Mat}_{[1,X,X^2,X^3]}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 9/5 \end{pmatrix}$$

c. Trouver la valeur minimale de la norme (pour ce produit scalaire) d'un polynôme de E dont le coefficient de X^3 est 1 (c'est-à-dire d'un polynôme unitaire de degré 3, mais cela sans rapport avec la notion de "unitaire" pour un vecteur d'un espace euclidien).

$\surd$ *Le résultat peut être obtenu comme la norme du dernier vecteur de la base obtenue à partir de $[1, X, X^2, X^3]$ par le procédé de Gram-Schmidt. La manière la plus simple d'effecteur ce procédé ici est d'interpréter la matrice de la question précédente comme $\big((b_i \mid v_j)\big)_{i,j=0,1,2,3}$ pour la base de départ $[b_0, b_1, b_2, b_3] = [1, X, X^2, X^3]$ et une base "modifiée" $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ (mais qui commence avec $v_i = b_i$). Selon le procédé on ne fait que des opérations sur les colonnes strictement de gauche à droit, et le but est de rendre la matrice triangulaire supérieure (en fait il suffit ici $(b_i \mid v_3) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$, mais pour l'obtenir on cherche la forme triangulaire). Ici on augmentera la matrice avec 4 lignes donnant les coordonnées des v_j dans la base $[b_0, b_1, b_2, b_3]$, mais ce n'est pas nécessaire pour répondre à la question.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 9/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La norme cherchée est la racine carrée de $(b_3 \mid v_3) = 1/20$ (coefficient qui a été trouvé comme le résultat de $\frac{4}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$), autrement dit c'est $\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. (La deuxième partie de la matrice montre que le polynôme dont c'est la norme est $\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}X^2 + X^3$.)

4. Dans un espace euclidien E de dimension n, soit $\mathcal{F} = [v_1, \ldots, v_k]$ une famille de vecteurs non nuls. Pour $1 \leq i \leq k$ on pose $H_i = v_i^\perp$.

a. Montrer que chaque H_i est une hyperplan vectoriel de E (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$).

$\surd$ *Puisque $v_i \neq 0$ on a $\dim(\mathrm{Vect}(v_i)) = 1$, et on déduit de $E = \mathrm{Vect}(v_i) \oplus v_i^\perp = \mathrm{Vect}(v_i) \oplus H_i$ que $\dim(E) = 1 + \dim(H_i)$, c'est-à-dire que $\dim(H_i) = n - 1$.*

b. Montrer que $\bigcap_{i=1}^k H_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k)$, où $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k)$ est le rang de la famille $\mathcal{F}$ (dimension du sous-espace qu'elle engendre).

$\surd$ *Posons $V = \bigcap_{i=1}^k H_i$. D'abord c'est une intersection de sous-espaces vectoriels, donc un sous-espace vectoriel. Ensuite on a*

$$V = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Vect}(v_i)^\perp = \big(\mathrm{Vect}(v_1) + \cdots + \mathrm{Vect}(v_k)\big)^\perp = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)^\perp$$

(la seconde égalité est vue en TD ; on peut aussi sans difficulté montrer les deux inclusions directement). On a donc donc $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k) \oplus V$; comme dans le premier point on en déduit $\dim(V) = n - \dim \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k) = n - \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_k)$.

Fin.