Contr. cont. 4 (combinatoire) Combinatoire et Géométrie (L2) vendredi 8 janvier 2021
14h-16h

Les documents sont interdits, l'utilisation d'une calculatrice autorisée.
Pour un ensemble X, la notation $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X, et $\#X$ désigne le nombre d'éléments de X.
Barème indicatif : 7+8+2+3

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D. Une motivation n'est pas demandée ; une bonne réponse contient une et une seule de ces lettres.

Pour les points a à e cette lettre signifie que, pour les ensembles X, Y mentionnés

A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucune de ces trois possibilités s'applique, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

a. $X = \{\, n^2 \mid n \in \mathbf{Z}, -2 \leq n \leq 2 \,\}$, et $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
b. $X = \{\, A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \mid 2 \notin A \,\}$, et $Y = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.
c. $X = \{\{0, 3, 6\}, \{1\}, \{2, 5, 7\}, \{4\}\}$ et $Y = \{\{0, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 7\}\}$.
d. $X = \{\, P \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \mid \#P = 3 \,\}$, et $Y = \{\, \{a, b, c\} \mid a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}, c \in \mathbf{N} \,\}$.
e. $X = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \,\}$, et $Y = \{\, (2a + 3b, -a, -b) \mid a, b \in \mathbf{R} \,\}$.

Pour les points f et g, on décrit chaque fois une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{N}^2$; indiquer si cette relation est

A : symétrique et transitive,
B : symétrique mais pas transitive,
C : anti-symetrique et transitive,
D : aucune de ces trois possibilités s'applique

f. $(i, j)\mathcal{R}(k, l)$ si $k = i + 1$ et $l = j + 1$.
g. $(i, j)\mathcal{R}(k, l)$ si $2i - j = 2k - l$.

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/objets du type spécifié.

a. Évolutions de score dans un match de foot menant au score final 7–4.
b. Manières de distribuer 11 bonbons à 4 enfants (pour chaque enfant compte seulement le nombre de bonbons qu'il reçoit, car tous les bonbons sont pareils).
c. Des parties de l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ des diviseurs positifs de 30 (c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\})$).
d. Les suites faiblement croissantes $a_1 \leq \cdots \leq a_7$ avec $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ pour tout i.
e. Commandes de 7 pizzas, choisies dans un menu qui compte 12 différents types de pizza.
f. Mots formés en utilisant (seulement) 9 lettres "A" et 6 lettres "B".
g. Chemins de réseau de $(-3, -4)$ vers $(4, 7)$ qui passent par l'origine $(0, 0)$.
h. Les classements des trois gagnants (première, seconde, troisième place ; aucun "ex aequo" n'est possible) dans une compétition avec 22 participants.

3. Une association sportive propose 3 activités : le tennis, l'escalade, et la voile. Il y a 143 personnes qui sont inscrites pour le tennis, 78 pour l'escalade et 105 pour la voile. Mais les listes d'inscription du tennis et de l'escalade ont 27 noms en commun, celles du tennis et de la voile 45 noms en commun, et celles de l'escalade et la voile 20 noms en commun ; finalement 8 personnes sont inscrites aux 3 activités à la fois. Combien de personnes sont inscrites à au moins une de ces activités ?

4. Dans un jeu de 32 cartes, formé de 4 couleurs contentant chacune 8 cartes numérotées, on considère des "mains" (c'est-à-dire sous-ensembles) de 5 cartes. Parmi les $\binom{32}{5}$ mains possible, combien contiennent une carte au moins de chacune des 4 couleurs ? [Indication : l'ensemble des mains à exclure est la réunion de 4 ensembles de mains, chacun défini par l'absence dans la main d'une couleur C.]

Fin.