Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 21 juin 2018
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, les documents ne le sont pas. Là où on demande une valeur, donner l'expression mathématique qui la décrit, ainsi que sa valeur numérique ; dans le cas des probabilités, cette dernière arrondie à 4 chiffres après la virgule.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une seule option est fausse. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\, \{k, \frac{36}{k}\} \mid k \in \mathbf{N} \text{ et } k \text{ divise } 36 \,\}$, et $Y = \{\{3, 12\}, \{6\}, \{1, 36\}, \{18, 2\}, \{9, 4\}\}$.
b. $X = \{\, (x, x^2) \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y \,\}$.
c. $X = \{\, (x, \sqrt{1 - x^2}) \mid -1 \leq x \leq 1 \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$.
d. $X = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} - \{0 + 5\mathbf{Z}\}$ (c'est-à-dire $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ privé de la classe de 0) et $Y = \{\, 2^k + 5\mathbf{Z} \mid k \in \mathbf{N} \,\}$ (la partie de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ formée des classes des puissances de 2).
e. $X = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $Y = f^{-1}(A \cap B)$ (ici $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f), où $A = [-2, 4]$ et $B = [1, 7]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$.

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs ou objets du type spécifié.
a. Les mots (chaînes de lettres) de longueur 15 qui contiennent 9 lettres A et 6 lettres B.
b. Les chemins de réseau menant du point $(1, 2)$ vers $(7, 12)$
c. Façons de composer une glace à 3 boules, choisies parmi 20 parfums (on peut avoir plusieurs boules identiques).
d. Classements (c'est-à-dire listes ordonnées) de 4 noms, choisis parmi 17 candidats.
e. Les monômes de degré 8 en les 4 variables w, x, y, z (par exemple w^2xyz^4 ou w^5y^3).

3. Dans un jeu de 52 cartes, avec 4 «couleurs» et 13 «valeurs» pour chaque couleur, on sélectionne une «main» de 4 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.
a. Combien de mains différentes y a-t-il ?
b. Parmi ces mains, quel est le nombre de mains dont les cartes ont 4 valeurs distinctes ?
c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard (avec probabilité uniforme) contienne une carte de chacune des 4 *couleurs* ?
d. Argumenter sans calcul détaillé que la probabilité d'avoir 4 couleurs distinctes (c'est celle de la question précédente) n'est par indépendante des valeurs des cartes dans la main (il suffit de trouver un évènement particulier, formulé en termes de seulement ces valeurs, qui n'est pas indépendant de l'évènement d'avoir 4 couleurs distinctes).
e. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'une main choisie au hasard (avec probabilité uniforme) contienne une carte de chacune des 4 couleurs, sachant qu'elle montre 4 valeurs distinctes ?

4. Pour deux évènements A, B définis sur une espace probabilisé, il est donné que $\Pr(A) = 0{,}7$, que $\Pr(B) = 0{,}4$ et que $\Pr(A \mid B) = 0{,}7$. Calculer la probabilité $\Pr(A^c \cap B^c)$ qui ni A ni B se produise (ici A^c désigne l'événement complémentaire de A). Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

5. On considère une variable aléatoire X dont la loi est la suivante ; elle prend l'une des valeurs $0, 1, 2, 3, 4$, avec probabilités respectivement (0): 0,0016, (1): 0,0256, (2): 0,1536, (3): 0,4096, et (4): 0,4096. Calculer pour X : l'espérance $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart-type $\sigma(X)$.

Fin.