Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 6 novembre 2017
14h00-15h00

L'utilisation d'une calculatrice (ou de tout appareil électronique) est interdite. Le barème donnera des poids égaux à chacune des deux parties (la question bonus qui est hors barème).

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A ; aussi $A \setminus B$ désigne la différence ensembliste $\{\, x \in A \mid x \notin B \,\}$, et $A/\!\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour une relation d'équivalence '$\sim$' définie sur A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{0, 1, \{2, 1\}, 2, \{1, 2\}\}$, et $Y = \{0, 1, \{2, 2, 1\}, 1, 2, 0\}$
b. $X = \{\, 12n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, et $Y = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n \text{ est divisible par } 3 \,\}$
c. $X = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$, et $Y = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$.
d. $X = \{\{\, 2n \mid n \in \mathbf{Z} \,\}, \{\, 2n + 3 \mid n \in \mathbf{Z} \,\}\}$ et $Y = \mathbf{Z}/\!\sim$, où la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbf{Z}$ est définie par $a \sim b$ si et seulement si a et b ont la même parité.
e. $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \mathcal{P}(\{2\})$, et $Y = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
f. $X = [0, \sqrt{7}]$, et $Y = f^{-1}([0, 7])$ (image réciproque par f de l'intervalle $[0, 7] \subseteq \mathbf{R}$) où l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donnée par $f(x) = x^2$.
g. $X = [-3, 3]$, et $Y = g(Z)$ ou $Z = \{\, x \in \mathbf{R} \mid g(x) \leq 3 \,\}$ (Y est l'image directe par g de Z), où l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donnée par $g(x) = x^2 + x^6$.

2. Sur $\mathbf{Z}$ on définit une relation $\mathcal{E}$ par $a\mathcal{E}b \iff 6 \mid (a - b)$ (dans cette expression '$|$' désigne "divise").
a. Montrer que $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.
b. Décrire la partition de $\mathbf{Z}$ correspondant à $\mathcal{E}$; notamment, combien de parties y a-t-il ?
c. Soit Q l'ensemble des parties de cette partition (donc Q est l'ensemble quotient $\mathbf{Z}/\mathcal{E}$). Si pour $a \in \mathbf{Z}$ on désigne par $\overline{a}$ la classe dans Q à laquelle appartient a, montrer qu'on peut définir une application $f : Q \to Q$ par la condition $f(\overline{a}) = \overline{-a}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$. Décrire f par un tableau.

Fin.