Corrigé Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 6 novembre 2017
14h00-15h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A ; aussi $A \setminus B$ désigne la différence ensembliste $\{ x \in A \mid x \notin B \}$, et $A/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour une relation d'équivalence '$\sim$' définie sur A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{0, 1, \{2, 1\}, 2, \{1, 2\}\}$, et $Y = \{0, 1, \{2, 2, 1\}, 1, 2, 0\}$

$\surd$ *A.* $X = \{0, 1, 2, \{1, 2\}\} = Y$.

b. $X = \{ 12n \mid n \in \mathbf{N} \}$, et $Y = \{ n \in \mathbf{N} \mid n$ est divisible par $3 \}$

$\surd$ *B. Chaque multiple de* 12 *est divisible par* 3*, donc* $X \subseteq Y$*, mais pas réciproquement (par exemple* $15 \in Y \setminus X$*) donc* $X \neq Y$.

c. $X = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$, et $Y = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}\}$.

$\surd$ *D. Les deux ensembles n'ont même pas d'éléments en commun (et sont non vide).*

d. $X = \{\{ 2n \mid n \in \mathbf{Z} \}, \{ 2n + 3 \mid n \in \mathbf{Z} \}\}$ et $Y = \mathbf{Z}/\sim$, où la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbf{Z}$ est définie par $a \sim b$ si et seulement si a et b ont la même parité.

$\surd$ *A. La relation admet deux classes d'équivalence, les entiers pairs et les entiers impairs, et* X *est l'ensemble de ces deux classes.*

e. $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \mathcal{P}(\{2\})$, et $Y = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

$\surd$ *C. Chaque élément de* Y *est bien une partie de* $\{1, 2, 3\}$ *mais pas une partie de* $\{2\}$*, donc* $Y \subseteq X$*. Mais d'autre part un ensemble comme* $\{1, 2\}$ *est une partie de* $\{1, 2, 3\}$ *sans être une partie de* $\{2\}$*, donc il appartient à* X*, mais il n'appartient pas a* Y.

f. $X = [0, \sqrt{7}]$, et $Y = f^{-1}([0, 7])$ (image réciproque par f de l'intervalle $[0, 7] \subseteq \mathbf{R}$) où l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donnée par $f(x) = x^2$.

$\surd$ *B. Car* $f^{-1}([0, 7]) = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$

g. $X = [-3, 3]$, et $Y = g(Z)$ ou $Z = \{ x \in \mathbf{R} \mid g(x) \leq 3 \}$ (Y est l'image directe par g de Z), où l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donnée par $g(x) = x^2 + x^6$.

$\surd$ *C. Pour* $z \in Z$ *on a par définition* $g(z) \leq 3$*, et aussi* $g(x) \geq 0$ *car* $z^2 \geq 0$ *et* $z^6 \geq 0$ *; on conclut* $Y = g(Z) \subseteq [0, 3] \subset [-3, 3] = X$.

2. Sur $\mathbf{Z}$ on définit une relation $\mathcal{E}$ par $a\mathcal{E}b \iff 6 \mid (a - b)$ (dans cette expression '$|$' désigne "divise").

a. Montrer que $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.

$\surd$ $a\mathcal{E}a \iff 6|0$ *ce qui est vrai, donc* $\mathcal{E}$ *est réflexif;* $a\mathcal{E}b$ *veut dire* $a - b = 6k$ *pour un certain* $k \in \mathbf{Z}$*, alors* $b - a = 6(-k)$ *donc* $b\mathcal{E}a$ *ce qui montre que* $\mathcal{E}$ *est symétrique; finalement* $a\mathcal{E}b\mathcal{E}c$ *veut dire qu'il existe* $k, l \in \mathbf{Z}$ *avec* $a - b = 6k$ *et* $b - c = 6l$*, alors* $a - c = 6k + 6l = 6(k + l)$ *et donc* $a\mathcal{E}c$ *ce qui établit transitivité.*

b. Décrire la partition de $\mathbf{Z}$ correspondant à $\mathcal{E}$; notamment, combien de parties y a-t-il ?

$\surd$ *Il y a* 6 *classes d'équivalence* $\{ 6k \mid k \in \mathbf{Z} \}, \{ 6k + 1 \mid k \in \mathbf{Z} \}, \ldots, \{ 6k + 5 \mid k \in \mathbf{Z} \}$*, donc* 6 *parties.*

c. Soit Q l'ensemble des parties de cette partition (donc Q est l'ensemble quotient $\mathbf{Z}/\mathcal{E}$). Si pour $a \in \mathbf{Z}$ on désigne par $\overline{a}$ la classe dans Q à laquelle appartient a, montrer qu'on peut définir une application $f : Q \to Q$ par la condition $f(\overline{a}) = \overline{-a}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$. Décrire f par un tableau.

$\surd$ *Le point essentiel est que quand* $\overline{a} = \overline{a'}$ *and* $\overline{b} = \overline{b'}$ *les valeurs (classes)* $\overline{a + b}$ *and* $\overline{a' + b'}$ *obtenues pour* $p(\overline{a}, \overline{b})$ *et* $p(\overline{a}', \overline{b}')$ *sont les mêmes. Dans ce cas il existe* $k, l \in \mathbf{Z}$ *avec* $a' = a + 6k$ *et* $b' = b + 6l$*, et donc* $a' + b' = a + 6k + b + 6l = a + b + 6(k + l)$ *donc* $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ *comme voulu. Le tableau est celui d'addition modulo* 6.

Fin.