Corrigé Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 31 octobre 2016
14h00-15h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à « on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$ ».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{3, 1, 0, 3\}$, $Y = \{1, 1, 0, 3, 0\}$

$\surd$ *A.* $X = \{0, 1, 3\} = Y$.

b. $X = \{\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$, $Y = \{\{0, 1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$.

$\surd$ *D. L'ensemble $\{0, 1, 2\}$ est élément de X mais pas de Y, pendant que $\{0, 1\}$ est élément de Y mais pas de X.*

c. $X = \mathcal{P}(\{1, 2\})$, $Y = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$

$\surd$ *C. Chaque élément de Y est bien une partie de $\{1, 2\}$ et donc élément de X, mais la partie $\emptyset$ (qui est élément de X) n'est pas élément de Y.*

d. $X = \{\, 2n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, $Y = \{\, 6n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$

$\surd$ *C. Chaque multiple de 6 est aussi multiple de 2, donc $Y \subseteq X$, mais pas réciproquement : $X \nsubseteq Y$.*

e. $X = \emptyset$ (l'ensemble vide), $Y = \{\emptyset\}$.

$\surd$ *B. X ne possède aucun élément, donc $X \subseteq Y$ de façon triviale, mais $\emptyset \in Y$ donc $Y \nsubseteq X$.*

f. $X = \{\, \{n, -n\} \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, $Y = \{\, \{\, n \in \mathbf{Z} \mid n^2 = a^2 \,\} \mid a \in \mathbf{Z} \,\}$.

$\surd$ *A. (Les deux sont égaux à $\mathbf{Z}/\sim$ où $a \sim b \equiv |a| = |b|$, donc $\{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \ldots\}$)*

g. $X = [-1, 3]$, $Y = f(f^{-1}(X))$ (image directe de l'image réciproque de X) où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donné par $f(x) = x^4 + x^2$.

$\surd$ *C. On a toujours $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$, et $-1 \notin Y$ car déjà $-1 \notin f(\mathbf{R})$.*

h. $X = [-1, 3]$, $Y = f^{-1}(f(X))$ (image réciproque de l'image directe de X) où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est donné par $f(x) = x^4 + x^2$.

$\surd$ *B. On a toujours $X \subseteq f^{-1}(f(X))$, mais aussi par exemple $-2 \in Y$ car $f(-2) = f(2) \in f(X)$.*

2. Dans cet exercice on construit, à partir de l'ensemble $\mathbf{N}$ et son opération d'addition, un ensemble Z qui modélise $\mathbf{Z}$, avec son opération d'addition ; c'est analogue à la « construction de $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{Z}$ » vue en cours, mais plus simple. On utilisera, comme dans cette autre construction, une relation d'équivalence sur un produit cartésien. Ici on prend $P = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, et on considère la relation $\sim$ sur P définie par $(a, b) \sim (c, d) \equiv a + d = b + c$. (L'idée est que la classe du couple $(a, b) \in P$ va correspondre à $a - b \in \mathbf{Z}$, en observant qu'on a $a - b = c - d$ dans $\mathbf{Z}$ si et seulement si $a + d = b + c$ dans $\mathbf{N}$. Mais si cette idée motive notre construction, elle est inutile pour répondre aux questions.)

a. Montrer que la relation $\sim$ est réflexive et symétrique.

$\surd$ *Réflexivité : Pour $a, b \in \mathbf{N}$ on a $a + b = b + a$ donc $(a, b) \sim (a, b)$. Symétrie : Si $(a, b) \sim (c, d)$ on a $a + d = b + c$ donc $c + b = d + a$ et $(c, d) \sim (a, b)$.*

b. Montrer que la relation $\sim$ est transitive : si $(a, b) \sim (c, d)$ et $(c, d) \sim (e, f)$, alors $(a, b) \sim (e, f)$.

$\surd$ *Sous ces hypothèses on a $a+d = b+c$ et $c+f = d+e$. En rajoutent f à la première équation et b à la seconde on obtient $a+d+f = b+c+f = b+d+e$. Ensuite on peut simplifier $a+d+f = b+d+e$ par le terme commun d pour obtenir $a + f = b + e$, soit $(a, b) \sim (e, f)$.*

On a montré que $\sim$ est une relation d'équivalence sur P, ce qui nous autorise à former l'ensemble quotient $Z = P/\sim$, dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\sim$. On notera $\overline{(a, b)}$ la classe de $\sim$ qui contient l'élément $(a, b) \in P$.

c. Faire un dessin d'une portion de P, où chaque élément (a,b) est le point du plan avec coordonnées (a,b), et indiquer quelles sont les classes de $\sim$.

$\surd$ *Le dessin doit montrer que les classes d'équivalence sont constituées de points sur une même diagonale, par exemple* $\{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\} = \{\, (a+1,a) \mid a \in \mathbf{N} \,\}$ *ou la diagonale principale* $\{\, (a,a) \mid a \in \mathbf{N} \,\} = \{(0,0),(1,1),\ldots\}$ *ou encore* $\{\, (a,a+2) \mid a \in \mathbf{N} \,\} = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}$.

d. On veut définir une opération d'addition $+ : Z \times Z \to Z$ qui vérifie $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$. Argumenter l'existence d'une telle opération (ce qui revient à montrer que la définition donnée ne dépend pas du choix des représentants).

$\surd$ *On suppose que* $(a,b) \sim (a'+b')$ *et* $(c,d) \sim (c',d')$, *alors pour qu'on puisse « définir »* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c,b+d)}$ *il faut que* $\overline{(a+c,b+d)} = \overline{(a'+c',b'+d')}$ *(sinon la définition contredirait elle-même). L'hypothèse donne* $a+b' = b+a'$ *et* $c+d' = d+c'$, *et on cherche la conclusion* $(a+c,b+d) \sim (a'+c',b'+d')$ *c'est-à-dire* $a+c+b'+d' = b+d+a'+c'$. *Elle est obtenue en rajoutant les deux équations qui sont les hypothèse (après une légère permutation des termes).*

e. (bonus) Montrer que pour toute paire $p,q \in Z$ il existe $x \in Z$ tel que $x+p=q$ (ceci en contraste avec l'addition dans $\mathbf{N}$, où par exemple l'équation $x+5=3$ n'a pas de solution).

$\surd$ *Posons* $p = \overline{(a,b)}$ *et* $q = \overline{(c,d)}$, *alors on a la solution* $x = \overline{(b+c,a+d)}$ *convient, car on a alors* $x+p = \overline{(b+c+a,a+d+b)} = \overline{(c,d)} = q$ *(l'équation au milieu dit* $(b+c+a,a+d+b) \sim (c,d)$, *ce qui est vrai car* $(b+c+a)+d = (a+d+b)+c$*).*

 Fin.