Corrigé Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 2 novembre 2015
14h00-15h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit : A : $X = Y$, B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$), C : $Y \subset X$, D : aucun des trois précédents, c'est-à-dire on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$.

a. $X = \{0, 1, 0, 2\}$, $Y = \{1, 1, 0, 2, 2\}$

$\surd$ *A.* $X = \{0, 1, 2\} = Y$.

b. $X = \{\{0, 1, 2\}, \{10, 11\}\}$, $Y = \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{10, 11, 12, 13, 14\}\}$

$\surd$ *D. Les éléments de X et Y sont tous distincts : non seulement aucun de X, Y inclut l'autre, X et Y n'ont même pas d'éléments en commun. Le fait que les éléments de X sont chacun inclus dans un élément de Y est sans importance ; ils ne sont pas pour autant eux mêmes éléments de Y.*

c. $X = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n \text{ est impair} \,\}$, $Y = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n \text{ est un nombre premier} \,\}$.

$\surd$ *D.* $9 \in X$ *mais* $9 \notin Y$ *montre* $X \not\subseteq Y$, *et* $2 \in Y$ *mais* $2 \notin X$ *montre* $Y \not\subseteq X$.

d. $X = \{\, x \in \mathbf{R} \mid \sin(x) = \frac{1}{2} \,\}$, $Y = \{\, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$

$\surd$ *D. Puisque* $\sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$, *les deux ensembles sont disjoints (et non vide), comme dans la question b. En fait c'était une coquille dans la question, qui aurait dû avoir* $Y = \{\, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$. *Dans ce cas, la bonne réponse aurait été C: pour tout* $k \in \mathbf{Z}$ *on a* $\sin(\frac{\pi}{6} + 2k) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ *donc* $Y \subseteq X$ *; mais* $\frac{5\pi}{6} \in X$ *pendant que* $\frac{5\pi}{6} \notin Y$ *donc* $X \neq Y$.

e. $X = \emptyset$ (l'ensemble vide), $Y = \mathcal{P}(\emptyset)$ (l'ensemble de ses parties)

$\surd$ *B. X ne possède aucun élément, mais* $\emptyset \in Y$.

f. $X = \{-3, 0, 2, 3, 7\}$, $Y = f^{-1}(f(X))$ (image réciproque de l'image directe de X) où $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est donné par $f(x) = x^2$.

$\surd$ *B.* $f(X) = \{9, 0, 4, 49\}$ *et* $f^{-1}(\{9, 0, 4, 49\}) = \{-7, -3, -2, 0, 2, 3, 7\} = Y$.

g. $X = \{-9, -5, 0, 1, 3, 4, 9\}$, $Y = f(f^{-1}(X))$ (image directe de l'image réciproque de X) où $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est donné par $f(x) = x^2$.

$\surd$ *C.* $f^{-1}(X) = \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $f(\{0, 1, 2, 3\}) = \{0, 1, 4, 9\} = Y$.

h. $X = \{\{\, n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ est pair} \,\}, \{\, n \in \mathbf{Z} \mid n \text{ est impair} \,\}\}$, $Y = \{\, \{\, k + 2n \mid n \in \mathbf{Z} \,\} \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$.

$\surd$ *A. Pour chaque valeur de k on obtient l'un des deux éléments de X donc* $Y \subseteq X$ *;* $X \subseteq Y$ *est clair.*

2. On pose $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres décimaux. La représentation décimale des nombres dans l'ensemble $S = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n < 10000 \,\}$ associe à chaque $n \in S$ une suite $d(n) \in C^4$ de 4 chiffres (qui commencera avec des chiffres '0' si nécessaire ; par exemple $d(31) = (0, 0, 3, 1) \in C^4$).

a. Décrire une bijection entre S et l'ensemble $C^{\{1,2,3,4\}}$ des 10000 applications $\{1, 2, 3, 4\} \to C$ (une description informelle suffit ; on ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une bijection).

$\surd$ *La bijection peut associer à* $n \in S$ *l'application* $f : \{1, 2, 3, 4\} \to C$ *définie, après avoir posé* $d(n) = (a, b, c, d)$, *par* $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$.

b. Soit $P \subset S$ l'ensemble des nombres pour lesquels $d(n)$ contient 4 chiffres différents (par exemple $376 \in P$ car $d(376) = (0, 3, 7, 6)$, et ces 4 chiffres sont différents). Quel est le cardinal $\#P$ de cet ensemble ?

$\surd$ *Pour* $n \in P$, *le 4-uplet* $d(n)$ *est un arrangement de 4 éléments de C, dont le nombre est* $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

c. On définit sur P une relation '$\sim$' où $m \sim n$ veut dire que $d(m)$ et $d(n)$ contiennent les mêmes 4 chiffres, peut-être dans un ordre différent (par exemple $3618 \sim 8136$). On admet que cette relation est une relation d'équivalence. On fixe $n_0 \in P$ (prenez $n_0 = 3618$ pour être concret, mais ce choix n'a aucune importance), alors $\{\, m \in P \mid m \sim n_0 \,\}$ est la classe d'équivalence de n_0. Quel est le cardinal de cette classe ?

$\surd$ *On obtient let* $4! = 24$ *permutations des 4 chiffres de* $d(n_0)$, *donc ce cardinal est* 24.

d. La relation '$\sim$' définit une partition de P en classes d'équivalence. Quel est le nombre de classes d'équivalences dans cette partition ?

$\surd$ *Chaque classe ayant 24 éléments, il y a* $5040/24 = 210 = \binom{10}{4}$ *classes.*

Fin.