**Examen terminal (seconde session) Combinatoire (L2)** jeudi 18 juin 2015
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice (ou de tout autre appareil électronique) est interdite. Pour les probabilités demandées, donner une expression précise, et sa valeur arrondie vers un pourcentage entier (une erreur d'arrondi est tolérée). Au cas où vous trouvez une expression arithmétique difficile à évaluer sans calculatrice, laisser cette expression comme réponse.

**1.** Déterminer le cardinal (nombre d'éléments) de chacun des ensembles suivants.

*a.* L'ensemble des sous-ensembles (parties) à 4 lettres de l'alphabet $A$ (qui en contient 26) ; c'est formellement l'ensemble $\{\, S \in \mathcal{P}(A) \mid \#S = 4 \,\}$.

*b.* $\{\, (a, b, c, d, e) \mid a, b, c, d, e \in \mathbf{N}^* : a + b + c + d + e = 13 \,\}$ (on rappelle que $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$).

*c.* L'ensemble des applications strictement croissantes $f : [4] \to [14]$, où $[n]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (on rappelle que $f$ est strictement croissante si $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$).

*d.* Avec la même notation, les parties à 4 nombres de $[10]$ qui contiennent au moins un nombre $\leq 5$ ; c'est formellement l'ensemble $\{\, S \in \mathcal{P}([10]) \mid \#S = 4,\ S \cap [5] \neq \emptyset \,\}$.

*e.* L'ensemble des possibilités pour enfiler 6 perles noires et 11 perles blanches sur un fil, en veillant à ce que chaque paire de perles noires soit sépéarée par au moins une perle blanche.

**2.** Une urne contient 18 boules, numérotées de 1 à 18. Les 6 boules $3, 6, 9, 12, 15, 18$ dont le numéro est divisible par 3 sont de couleur jaune, les 6 boules $1, 4, 7, 10, 13, 16$ dont le numéro laisse un reste 1 après division par 3 sont de couleur rouge, et les 6 boules restantes sont de couleur bleue. On prend au hasard un échantillon de 5 boules. Soit $B$ l'ensemble des 18 boules, et $\Omega = \{\, E \in \mathcal{P}(B) \mid \#E = 5 \,\}$ l'ensemble des échantillons possibles.

*a.* Quel est le cardinal $\#\Omega$ de $\Omega$ ?

*b.* Combien parmi ces échantillons ne contiennent aucune boule jaune ?

*c.* En supposant une probabilité uniforme sur $\Omega$, quel est la probabilité que toutes les trois couleurs soient représentées dans un échantillon $\omega \in \Omega$ ? [Indication : on peut utiliser inclusion-exclusion.]

**3.** *a.* Dans un jeu de cartes complet, comptant 4 enseignes (couleurs) avec chacune 13 cartes, on tire 4 fois une carte au hasard, en remettant après chaque tirage la carte tirée dans le jeu. Quelle est la probabilité que les 4 cartes tirées sont de 4 enseignes différentes ?

*b.* Si on refait l'expérience mais sans remettre les cartes tirées, quelle est alors cette probabilité ? Est-ce que cette probabilité est très différente de celle du premier cas ?

*c.* Si l'on lance 4 fois un dé (équilibré), quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois un même résultat ?

**4.** Soit $E$ un ensemble fini non vide, et $n = \#E$ son cardinal.

*a.* Quel est le cardinal $\#\mathcal{P}(E)$ de l'ensemble de parties de $E$ ?

*b.* Montrer que $E$ contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. (Comme exemple du résultat qu'on demande à démontrer : si l'on a $E = \{a, b, c\}$, alors ses parties de cardinal pair sont $\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ et ses parties de cardinal impair sont $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}$ ; il y en a le même nombre, 4, dans les deux cas.)

**Fin.**