Examen terminal Combinatoire (L2) mercredi 7 janvier 2015
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice (ou de tout autre appareil électronique) est interdite. Toutefois si dans votre réponse vous obtenez une expression arithmétique qui est difficile à évaluer sans calculatrice, vous pouvez donner cette expression comme réponse.

1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants.
a. $\{ (a,b,c,d) \in \mathbf{N}^4 \mid a+b+c+d=9 \}$
b. $\{ f{:}\{1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid f \text{ est injectif} \}$
c. L'ensemble de "mains" à 3 cartes (sans ordre) pouvant être choisies dans un jeu de 52 cartes (4 enseignes et 13 valeurs) telles que la main contient cartes d'au moins deux enseignes différentes.
d. L'ensemble des "mots" formés de 10 lettres `A` et 5 lettres `B`, mais sans occurrence de `BB` (c'est-à-dire de deux lettres `B` adjacentes). [Indication: on pourra traduire le problème en un problème équivalent qui est plus facile à résoudre.]

2. Dans cette question on considère des chemins sur un réseau $\mathbf{Z}^2$ de points, un chemin étant formé d'une suite de pas qui peuvent avancer dans l'une de deux directions (à partir d'un point (i,j) un pas peut avancer ou bien vers le point $(i+1,j)$, ou bien vers le point $(i,j+1)$).
a. Donner une formule pour le nombre de tels chemins qui mènent du point $(0,0)$ au point (a,b), avec $a,b \in \mathbf{N}$, ainsi qu'une justification informelle de cette formule.
b. Combien de chemins mènent du point $(-2,-6)$ au point $(3,3)$?
c. Parmi les chemins de la question précédente, un chemin est choisi au hasard selon une loi uniforme. Donner la probabilité de l'événement A que ce chemin passe par le point $(0,0)$.
d. Pour la même expérience aléatoire, donner la probabilité de l'événement B que le chemin ne contient aucun point (x,y) avec $x>0$ et $y<0$. [Indication : on peut décrire B comme une réunion d'événements comme l'événement A ci-dessus, et qui sont deux à deux incompatibles.]

3. Une urne contient 18 boules, dont 6 de chacune des couleurs jaune, rouge, bleue. On prend au hasard un échantillon de 5 boules. Soit B l'ensemble des boules, donc $\#B = 18$ (les boules individuelles sont identifiables) et $\Omega = \{ E \in \mathcal{P}(B) \mid \#E = 5 \}$ l'ensemble des échantillons possibles.
a. Quel est le cardinal (nombre d'éléments) $\#\Omega$ de l'ensemble des échantillons ?
b. Combien parmi ces échantillons ne contiennent aucune boule jaune ?
c. En supposant une probabilité uniforme sur Ω, quel est la probabilité que toutes les trois couleurs sont représentées dans un échantillon $\omega \in \Omega$? [Indication : on peut utiliser inclusion-exclusion.]

4. Soit E un ensemble fini non vide. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ contient autant d'éléments (qui sont donc des parties de E) qui sont de cardinal pair que d'éléments de cardinal impair.

Fin.