Contrôle continu Arithmétique et algèbre commutative mercredi 21 février 2013
10h00–12h00

Le polycopié ou un résumé du cours sont autorisés comme documents.

1. Dans cet exercice on étudiera quelques propriétés de l'anneau $A = \mathbf{Z}[\sqrt{7}] = \{\, a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbf{Z}\,\}$.

a. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbf{R}$, et que c'est le plus petit tel sous-anneaux qui contient $\sqrt{7}$ (c'est-à-dire tout sous-anneau de $\mathbf{R}$ aussi contient $\sqrt{7}$ contient aussi tous les éléments de A). Vous pouvez utiliser sans preuve que tout sous-anneaux de $\mathbf{R}$ contient $\mathbf{Z}$.

b. Montrer que pour $r \in A$ fixé, le couple $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $r = a + b\sqrt{7}$ (qui existe d'après la définition de A) est *unique*. Vous pouvez utiliser sans preuve que $\sqrt{7}$ est un nombre irrationnel.

c. On définit l'application $n : A \to \mathbf{Z}$ par $n(a + b\sqrt{7}) = a^2 - 7b^2$ (une valeur qu'on pourra aussi écrire comme le produit $(a+b\sqrt{7})(a-b\sqrt{7})$ dans A). Montrer que n (qui n'est pas un morphisme d'anneaux) vérifie l'équation $n(xy) = n(x)n(y)$ pour tout $x, y \in A$.

d. En déduire que, pour que $r \in A$ soit inversible dans A, il est nécessaire que $n(r) \in \{-1, +1\}$.

e. Montrer que cette condition est aussi suffisante : si $n(r) \in \{-1, +1\}$, alors r est inversible dans A. [Indication : utilisez l'égalité $n(a + b\sqrt{7}) = (a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7})$ dans A.]

f. Trouver un élément inversible de A de la forme $r = a + b\sqrt{7}$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$, et $1 \leq b \leq 5$, et donner son inverse r^{-1} dans A.

g. En utilisant cet élément r, montrer que le nombre d'éléments inversibles de A est infini.

2. Dans cet exercice A est un anneau commutatif. Un élément $a \in A$ est appelé nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a^n = 0$.

a. Décrire les éléments nilpotents de l'anneau $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$. Combien en y a-t-il ?

b. Dans le cas où A est un anneau intègre, quels sont alors les éléments nilpotents de A ?

c. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A forme un idéal N de A.

d. Montrer que dans l'anneau quotient A/N, l'élément $0 \in A/N$ est le seul élément nilpotent.

e. [Hors barème] Montrer que si I est une idéal premier de A, alors $I \supseteq N$, c'est-à-dire I contient tous les éléments nilpotents de A. L'idéal N lui-même, est-il forcément un idéal premier ?

Fin.