Corrigé Examen pL02, Analyse Combinatoire, Maths 2 lundi 28 août 2006
14h00–17h00

1. Déterminer les nombres naturels suivants.

a. Le nombre de bijections $E \to E$, où $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\surd$ *Comme* $\#E = 6$, *le nombre demandé est* $6! = 720$.

b. Le nombre de chemins de réseau de $(0, 0)$ vers $(8, 8)$.

$\surd$ *C'est* $\binom{16}{8} = \frac{16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{8!} = 13 * 11 * 10 * 9 = 12870$.

c. Le nombre d'entiers n avec $0 \le n < 10\,000\,000 = 10^7$ tels que l'écriture décimale de n ne contienne que des chiffres '0' et '4' (par exemple 0, 40044, et 4444444 sont de tels entiers).

$\surd$ *Si l'on écrit ces nombres avec 7 chiffres, chaque chiffre peut être choisi indépendemment comme '0' ou '4' ; le nombre total de possibilités est donc* $2^7 = 128$.

d. Le nombre t_7 dans la suite d'entiers $t = (t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ dont les informations suivantes sont données : il s'agit d'une progression polynomiale de degré 3 (c'est-à-dire, on a $t_i = ai^3 + bi^2 + ci + d$ pour certaines constantes $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, et tout $i \in \mathbf{N}$), et $(t_1, \ldots, t_5) = (3, 4, 8, 17, 33)$. (Attention, on ne vous demande que la valeur de t_7, et non pas celles de t_6 ou des coefficients a, b, c, d dans la formule, bien que vous pouvez déterminer ces autres nombres si vous considérez cela utile).

$\surd$ *En appliquant des puissances de l'opérateur* Δ *de différences finies à la partie connue de* t*, on trouve les progressions suivantes:* $\Delta(t) : 1, 4, 9, 16$; $\Delta^2(t) : 3, 5, 7$; $\Delta^3(t) : 2, 2$; $\Delta^4(t) : 0$. *Par l'hypothèse,* $\Delta^4(t)$ *est la suite nulle, d'où on peut étendre ces suites:* $\Delta^3(t) : 2, 2, 2, 2$; $\Delta^2(t) : 3, 5, 7, 9$; $\Delta(t) : 1, 4, 9, 16, 25, 36$ *(on peut aussi voir directement que* $\Delta(t)_i = i^2$ *pour tout* i*), et finalement pour la suite originale* $(t_1, \ldots, t_7) = (3, 4, 8, 17, 33, 58, 94)$. *On trouve donc* $t_7 = 94$.

e. Le nombre de manières possibles de former un Conseil d'Administration de 5 personnes dans une association avec 16 membres (on ne distingue pas de fonctions différentes au sein du Conseil, chacun étant simplement élu ou non élu dans le Conseil).

$\surd$ *Ce nombre est* $\binom{16}{5} = \frac{16\times15\times14\times13\times12}{5!} = 2 \times 14 \times 13 \times 12 = 4386$.

f. Le nombre de classements possibles pour les 3 premières places dans une compétition avec 32 participants.

$\surd$ *C'est* $32^{\underline{3}} = 32 \times 31 \times 30 = 29760$.

g. Le nombre de 5-uplets $(a_1, \ldots, a_5)$ avec $a_i \in \mathbf{N}$ pour $i = 1, \ldots, 5$ et $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$.

$\surd$ *C'est* $\left(\!\binom{5}{20}\!\right) = \binom{24}{20} = \binom{24}{4} = \frac{24\times23\times22\times21}{4!} = 23 \times 22 \times 21 = 10626$.

2. Déterminer, pour les séries formelles en X désignées par les expressions ci-dessous, les 9 premiers termes ; c'est-à-dire si la série s'écrit $A = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$, il est demandé de donner le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_8X^8$. Vous pouvez omettre les termes nuls de ce polynôme.

a. $\frac{1}{1-2X}$

$\surd$ $\frac{1}{1-2X} = \sum_{n\in\mathbf{N}} 2^n X^n$, *d'où la réponse* $1+2X+4X^2+8X^3+16X^4+32X^5+64X^6+128X^7+256X^8$.

b. $\left(\frac{1}{1-X}\right)^4$.

$\surd$ $\left(\frac{1}{1-X}\right)^4 = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{4}{i}\!\right) X^i$, *une série formelle dont les 9 premiers termes sont* $1 + 4X + 10X^2 + 20X^3 + 35X^4 + 56X^5 + 84X^6 + 120X^7 + 165X^8$.

c. $\left(\frac{1}{1-X^2}\right)^3$

$\surd$ $\left(\frac{1}{1-X^2}\right)^3 = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{3}{i}\!\right) X^{2i}$, *dont les premiers termes sont* $1 + 3X^2 + 6X^4 + 10X^6 + 15X^8$.

d. $\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)}$

$\surd$ *Le calcul le plus simple est de multiplier les séries* $\frac{1}{(1-X^2)} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + \cdots$ *et* $\frac{1}{(1-X^3)} = 1 + X^3 + X^6 + \cdots$, *ce qui donne pour les termes jusqu'à celui de* X^8 *le polynôme* $1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7 + 2X^8$. *Il est aussi possible de déterminer la suite des coefficients de* $\frac{1}{(1-X^2)(1-X^3)} = \frac{1}{1-X^2-X^3+X^5}$ *comme la solution d'une relation de récurrence (à savoir* $c_i = c_{i-2} + c_{i-3} - c_{i-5}$ *pour* $i \ge 5$*), mais cette méthode est sans doute plus difficile.*

3. Dans les questions ci-dessous, on décrira chaque fois une série formelle différente $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} c_k X^k$ avec coefficients entiers. Réécrire dans chaque cas C comme une expression finie en X (par exemple formée par addition, multiplication, ou division de polynômes explicites) qui n'utilise ni l'opérateur de sommation '$\sum$', ni '$\cdots$' (donc une expression comme $\frac{(1+3X)^2}{1-X}$ est permise, mais des expressions comme $\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}X^i$ ou $1-X+X^2-X^3+X^4-X^5+\cdots$ sont interdites).

a. $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} \binom{8}{k} 2^k X^k$.

$\surd$ $C = (1+2X)^8 = 1+16X+112X^2+448X^3+1120^4+1792X^5+1792X^6+1024X^7+256X^8$*, la première expression étant bien sûr préférée.*

b. $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{5}{k}\!\right) X^k$.

$\surd$ $C = \left(\frac{1}{1-X}\right)^5 = \frac{1}{(1-X)^5} = \frac{1}{1-5X+10X^2-10X^3+5X^4-X^5}$*, la première expression étant préférée.*

c. $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{4}{k}\!\right) 3^k X^k$.

$\surd$ $C = \left(\frac{1}{1-3X}\right)^4 = \frac{1}{(1-3X)^4} = \frac{1}{1-12X+54X^2-108X^3+64X^4}$*, la première expression étant préférée (ici il a fallu reconnaître la formule générale* $\left(\frac{1}{(1-cX)}\right)^d = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{d}{i}\!\right) c^i X^i$*, avec* $c=3$ *et* $d=4$*).*

d. $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} c_k X^k$, où $c_k = \#\{\,(a,b)\in\mathbf{N}^2 \mid 2a+7b=k\,\}$ pour $k\in\mathbf{N}$.

$\surd$ $C = \frac{1}{1-X^2}\cdot\frac{1}{1-X^7} = \frac{1}{1-X^2-X^7+X^9}$*, la première expression étant préférée.*

4. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, soit E_n l'ensemble des mots formés de n "lettres" pris dans l'ensemble $\{0,1\}$, tels que trois lettres successives dans le mot ne sont jamais toutes égales (le mot ne contient ni une séquence '000' ni une séquence '111'); par exemple le mot '010010011011' appartient à E_{12}. On pose $c_n = \#E_n$. On définit également b_n comme le nombre de mots dans E_n dont la dernière lettre est précédée d'une lettre identique (autrement dit, dont les deux dernières lettres sont égales), et a_n comme le nombre de mots dans E_n dont la dernière lettre *n'est pas* précédée d'une lettre identique (donc '10011' contribue à b_5 mais '11001' contribue à a_5); on convient que $a_0=b_0=b_1=0$, mais les mots de longueur 1 contribuent à a_1. On forme les séries génératrice des ces suites de nombres : $C_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n$, $B_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n X^n$, et $A_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^n$.

a. Déterminer (par exemple par une énumération de $E_0,\ldots,E_4$) les premiers coefficients $c_0,\ldots,c_4$, ainsi que les coefficients $a_1,\ldots,a_4$ et b_2,b_3,b_4 (ces valeurs concrètes pourront servir plus tard pour une vérification des relations générales qu'on va établir ci-dessous).

$\surd$ *Le mot vide contribue à* E_0*, donc* $c_0=1$*, puis* $E_1=\{0,1\}$*,* $E_2=\{00,01,10,11\}$*,* $E_3=\{001,010,011,100,101,110\}$*, et* $E_4=\{0010,0011,0100,0101,0110,1001,1010,1011,1100,1101\}$*. Alors on trouve* $(c_0,\ldots,c_4)=(1,2,4,6,10)$*,* $(a_1,\ldots,a_4)=(2,2,4,6)$*, et* $(b_2,b_3,b_4)=(2,4,6)$*.*

b. Expliquer pourquoi les séries génératrices vérifient la relation $C=1+A+B$.

$\surd$ *Pour* $n>0$ *on a* $c_n=a_n+b_n$ *car chaque mot dans* E_n *contribue soit à* a_n*, soit à* b_n*. Ainsi les coefficients de* X^n *dans l'équation* $C=1+A+B$ *sont égales pour* $n>0$*, et pour le coefficient de* X^0 *on a* $c_0=1=1+a_0+b_0$

c. Expliquer de façon similaire les relations $B=XA$ et $A=X(C+1)$ [Indication: considérer les possibilités pour la dernière lettre d'un mot.]

$\surd$ *Pour chaque mot contribuant à* a_n *on peut ajouter une autre copie de la dernière lettre pour trouver un mot qui contribue à* b_{n+1}*, donc* $a_n=b_{n+1}$ *; ceci est valable pour tout* $n\in\mathbf{N}$*, donc* $B_n=\sum_{n\geq 2} b_n X^n = \sum_{n\geq 1} a_n X^{n+1} = XA$*. Or, pour chaque mot contribuant* E_n *on peut ajouter une lettre opposée après la dernière lettre, pour trouver un mot contribuant à* a_{n+1}*, sauf que pour* $n=0$ *il y a deux possibilités pour étendre le mot vide à un mot de* E_1 *(qui contribue à* a_1*. Donc on a* $a_{n+1}=c_n$ *pour* $n>0$ *tandis que* $a_1=2=c_0+1$ *; les deux relations se résument par* $A=XC+X=X(C+1)$*.*

d. Déduire de façon algébrique des relations mentionnées une expression pour la série génératrice C.

$\surd$ *On peut réécrire la relation de la question b successivement*

$$C=1+A+B=1+A+XA=1+A(1+X)=1+(C+1)X(1+X)=1+X+X^2+C(X+X^2),$$

et donc $C(1-X-X^2)=1+X+X^2$*. Alors on trouve* $C=\frac{1+X+X^2}{1-X-X^2}$*, ce qu'on peut éventuellement simplifier à* $C=-1+\frac{2}{1-X-X^2}$*.*

e. Trouver une relation de récurrence pour les coefficients c_n, et déterminer le coefficient c_9.

$\surd$ *Du dénominateur de l'expression* $C=\frac{1+X+X^2}{1-X-X^2}$ *on déduit la relation de récurrence* $c_i=c_{i-1}+c_{i-2}$ *(comme dans la suite de Fibonacci), qui est valable ici pour* $i\geq 3$ *(à cause du numérateur). On calcule alors facilement* $(c_0,\ldots,c_9)=(1,2,4,6,10,16,26,42,68,110)$*, d'où* $c_9=110$*.*

Fin.