Corrigé Examen pL02, Analyse Combinatoire, Maths 2 lundi 19 juin 2005
8h30-11h30

1. Déterminer les nombres naturels suivants.

a. Le nombre de sous-ensembles de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$\surd$ *C'est* $2^{10} = 1024$.

b. Le nombre de permutations possibles des lettres du mot "document".

$\surd$ *C'est* $8! = 40320$.

c. Le nombre de possibilités pour les 5 gagnants, dans l'ordre, dans une course avec 12 participants.

$\surd$ *C'est* $12^{\underline{5}} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040$.

d. Le nombre de tirages différentes possible au Loto (sans considérer le numéro complémentaire) : on tire 6 nombres différents parmi 49, et l'ordre de tirage est sans importance.

$\surd$ *C'est* $\binom{49}{6} = 49 \times 47 \times 46 \times 3 \times 44 = 13983816$.

e. Le nombre de manières différentes de ranger 7 boules identiques dans 6 urnes.

$\surd$ *C'est* $\left(\!\binom{6}{7}\!\right) = \binom{12}{5} = 792$.

f. Le nombre de chemins de réseau de $(0, 0)$ vers $(4, 10)$.

$\surd$ *C'est* $\binom{14}{10} = \binom{14}{4} = 1001$.

g. Le nombre suivant dans la progression $3, 7, 12, 21, 37, 63$, sachant qu'elle est polynomiale de degré 3: son n-ième terme est donné par une formule $an^3 + bn^2 + cn + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ (on ne vous demande pas de déterminer ces coefficients a, b, c, d).

$\surd$ *En appliquant des puissances de l'opérateur* Δ *de différences finies, on trouve les progressions suivantes:* Δ : $4, 5, 9, 16, 26$; Δ^2 : $1, 4, 7, 10$; Δ^3 : $3, 3, 3$; Δ^4 : $0, 0$. *Par l'hypothèse, le résultat de* Δ^4 *doit rester nul, d'où on peut étendre ces suites:* Δ^3 : $3, 3, 3, 3, 3, 3$; Δ^2 : $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$; Δ : $4, 5, 9, 16, 26, 39, 55, 74$, *et finalement la suite originale* $3, 7, 12, 21, 37, 63, 102, 157, 231$. *Le nombre demandé est* 102.

2. Déterminer, pour les séries formelles en X désignées par les expressions ci-dessous, les 9 premiers termes ; c'est-à-dire si la série s'écrit $A = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$, il est demandé de donner le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_8X^8$. Vous pouvez omettre les termes nuls de ce polynôme.

a. $\left(\frac{1}{1-X}\right)^5$.

$\surd$ $\left(\frac{1}{1-X}\right)^5 = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{5}{i}\!\right) X^i$, *une série formelle dont les 9 premiers termes sont* $1 + 5X + 15X^2 + 35X^3 + 70X^4 + 126X^5 + 210X^6 + 330X^7 + 495X^8$.

b. $\frac{1}{1-3X^2}$.

$\surd$ *Les premiers termes de la série* $\frac{1}{1-3X^2} = \sum_{i\in\mathbf{N}}^{4} 3^i X^{2i}$ *sont* $1 + 3X^2 + 9X^4 + 27X^6 + 81X^8$.

c. $\frac{1+2X}{1-4X^2}$.

$\surd$ *C'est la série* $\sum_{i\in\mathbf{N}} c_X^i$ *avec* $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, *et* $c_i = 4c_{i-2}$ *pour* $i \geq 2$, *donc les 9 premiers termes sont* $1 + 2X + 4X^2 + 8X^3 + 16X^4 + 32X^5 + 64X^6 + 128X^7 + 256X^8$. *Visiblement c'est* $\frac{1}{1-2X}$, *ce qui peut effectivement être obtenu à partir de* $\frac{1+2X}{1-4X^2}$ *par simplification.*

d. $\frac{1}{1-X^3} \cdot \frac{1}{1-2X}$.

$\surd$ *C'est le produit des séries* $\frac{1}{1-X^3} = \sum_{i\in\mathbf{N}} X^{3i}$ *et* $\frac{1}{1-2X} = \sum_{i\in\mathbf{N}} 2^i X^i$ *dont les 9 premiers termes sont* $1 + 2X + 4X^2 + 9X^3 + 18X^4 + 36X^5 + 73X^6 + 146X^7 + 292X^8$.

3. Dans les questions ci-dessous, on décrira chaque fois une suite $(c_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers différente. Décrire dans chaque cas la série génératrice $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} c_k X^k$ de cette suite par une expression en X qui n'utilise pas l'opérateur de sommation '$\sum$' (par exemple $\frac{1+3X}{1+4X^2} + X^5$ est une expression acceptable).

a. $c_k = \binom{17}{k}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

$\surd$ $C = (1+X)^{17}$.

b. $c_k = \#\{\, (a,b,c,d) \in \mathbf{N}^4 \mid a+b+c+d = k \,\}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

$\surd$ $C = \left(\frac{1}{1-X}\right)^4$.

c. $c_k = \#\{\, (a,b,c) \in \mathbf{N}^3 \mid 2a+5b+13c = k \,\}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

$\surd$ $C = \frac{1}{1-X^2} \cdot \frac{1}{1-X^5} \cdot \frac{1}{1-X^{13}}$.

d. $c_k = k$ pour $k \in \mathbf{N}$. [Indication : si vous ne reconnaissez pas la série, vous pouvez utiliser le fait que la suite vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2]

$\surd$ $c_k = (k+1) - 1 = \left(\!\binom{2}{k}\!\right) - 1$ *donc* $C = \sum_{k\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{2}{k}\!\right) X^k - \sum_{k\in\mathbf{N}} X^k = \left(\frac{1}{1-X}\right)^2 - \frac{1}{1-X} = \frac{X}{(1-X)^2}$. *On peut aussi utiliser le fait que* $c_k = c_{k-1}+1 = c_{k-1}+(c_{k-1}-c_{k-2}) = 2c_{k-1}-c_{k-2}$ *pour* $k \geq 2$, *d'où une expression* $C = \frac{a+bX}{(1-X)^2}$ *doit exister; de* $c_0 = 0$ *et* $c_1 = 1$ *on déduit* $a = 0$ *et* $b = 1$.

4. On considère le problème suivant de dénombrement (pour lequel aucune formule présentée dans le cours ne fournit de solution immédiate). Pour les mots sur un alphabet de trois lettres, on considère que la première lettre est de longueur 1 et les deux autres lettres sont de longueur 2; la longueur d'un mot est la somme des longueurs de ses lettres. On peut prendre pour alphabet $\{\mathtt{a},\mathtt{B},\mathtt{C}\}$, où les lettres majuscules sont de longueur 2 ; alors les mots `aaaa`, `aaB`, `aCa`, `BB`, et `CB` sont tous considérés de longueur 4. Le problème consiste à trouver pour $n \in \mathbf{N}$ le nombre c_n de tels mots de longueur n.

a. Énumérer les mots de longueur au plus 4, et déterminer ainsi $c_0, \ldots, c_4$.

$\surd$ *La liste complète est le mot vide,* `a` `aa`, `B`, `C`, `aaa`, `aB`, `Ba`, `aC`, `Ca`, `aaaa`, `aaB`, `aBa`, `Baa`, `aaC`, `aCa`, `Caa`, `BB`, `BC`, `CB`, `CC`. *Ainsi* $(c_0, \ldots, c_4) = (1, 1, 3, 5, 11)$.

b. En considérant les possibilités pour la dernière lettre d'un mot de longueur n, trouver une relation de récurrence qui exprime c_n en termes de c_{n-1} et de c_{n-2}, valable pour $n \geq 2$.

$\surd$ *Une solution pour* $n \geq 2$ *ne peut pas être vide, donc sa dernière lettre est* `a`, `B`, *ou* `C`. *Dans le premier cas le reste du mot est de longueur* $n-1$, *pour lequel il y a* c_{n-1} *possibilités, et dans les deux derniers cas le reste du mot est de longueur* $n-2$ *pour lequel il y a* c_{n-2} *possibilités. On trouve ainsi la relation* $c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$.

c. Calculer c_9.

$\surd$ *On calcule facilement* $(c_0, \ldots, c_9) = (1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341)$ *donc* $c_9 = 341$.

d. Donner une expression qui décrit la série génératrice $C = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n$ de la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes en X [indication: on pourra utiliser la relation de récurrence de la question b et les termes initiaux de la question a].

$\surd$ *Le relation de récurrence dit que les coefficients de* $C(1-X-2X^2)$ *sont nuls à partir de celui de* X^2. *Alors* $C(1-X-2X^2) = (1+X+3X^2+\cdots)(1-X-2X^2) = 1$, *donc* $C = \frac{1}{1-X-2X^2}$.

e. En se servant de coefficients qui ne sont pas forcément entiers, décomposer la fraction de polynômes $\frac{P}{Q}$ comme $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de degré 1 [indication: si vous l'avez bien calculé, le polynôme Q sera divisible par $1+X$.] Utiliser cette expression pour trouver une expression explicite pour c_n valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Vérifier qu'on retrouve pour c_9 la valeur concrète calculée dans la question c.

$\surd$ *Comme* $Q = 1-X-2X^2 = (1+X)(1-2X)$, *on peut prendre* $Q_1 = 1+X$ *et* $Q_2 = 1-2X$. *Alors* P_1 *et* P_2 *seront des constantes, en on les résout facilement comme* $P_1 = \frac{1}{3}$ *et* $P_2 = \frac{2}{3}$. *Ainsi* $C = \frac{1/3}{1+X} + \frac{2/3}{1-2X} = \frac{1}{3}\sum_{i\in\mathbf{N}}(-1)^i + \frac{2}{3}\sum_{i\in\mathbf{N}} 2^i$, *et on en déduit que* $c_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$. *On vérifie que* $c_9 = \frac{2^{10}-1}{3} = \frac{1023}{3} = 341$.

 Fin.