Corrigé Examen pL02, Analyse Combinatoire, Maths 2 vendredi 20 mai 2005
14h00-17h00

1. Déterminer les nombres naturels suivants.

a. Le nombre de manières différentes de former un montant de € 3,80 avec des pièces de € 0,20 et de € 0,50.

$\surd$ *C'est le nombre de solutions de* $2a + 5b = 38$ *avec* $a, b \in \mathbf{N}$. *Dans ce cas concret la solution la plus simple est d'énumérer les solutions (où clairement* b *doit être pair) :* $(19, 0)$, $(14, 2)$, $(9, 4)$, $(4, 6)$, *donc* 4 *manières différentes. C'est aussi le coefficient de* X^{38} *dans la série formelle* $(\frac{1}{1-X^2})(\frac{1}{1-X^5})$.

b. Le coefficient du monôme $X^4Y^2Z^3$ dans le polynôme $(X + Y + Z)^9$.

$\surd$ *C'est le coefficient multinomial* $\binom{9}{4,2,3} = \frac{9!}{4!2!3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{2!3!} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260$.

c. Le nombre de sous-ensembles de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui ne sont ni vides ni égaux à S tout entier.

$\surd$ *On soustrait les deux exclus de l'ensemble des parties de* S, *donc le nombre est* $2^8 - 2 = 254$.

d. Le nombre de suites de 6 chiffres, chacun choisi parmi $\{1, 2, 3\}$.

$\surd$ *C'est* $3^6 = 729$.

e. Le nombre de suites faiblement croissantes parmi celles de la question précédente : les suites $(n_1, \ldots, n_6)$ avec $n_i \in \{1, 2, 3\}$ pour $i = 1, \ldots, 6$ et $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_6$.

$\surd$ *Une telle suite est déterminée par le nombre de fois que chaque valeur apparaît, donc c'est le nombre de multi-ensembles d'ordre* 6 *sur* $\{1, 2, 3\}$: $\left(\!\binom{3}{6}\!\right) = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6!} = \frac{7\cdot8}{2} = 28$.

f. Le nombre de suites parmi celles de la question *d.* qui contiennent une fois le chiffre '1', deux fois le chiffre '2', et trois fois le chiffre '3'.

$\surd$ *C'est* $\binom{6}{1,2,3} = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$, *le nombre de permutations du* « *mot* » 122333.

g. Le nombre de résultats différents possibles dans une élection dans laquelle il y a 4 candidats et 20 votes exprimés.

$\surd$ *C'est le nombre de multi-ensembles d'ordre* 20 *sur un ensemble à* 4 *éléments, donc* $\left(\!\binom{4}{20}\!\right) = \frac{4^{\overline{20}}}{20!} = \binom{23}{20} = \binom{23}{3} = 23 \cdot 11 \cdot 7 = 1771$.

h. Le nombre de chemins de réseau menant de $(0, 0)$ à $(6, 4)$.

$\surd$ *C'est* $\binom{6+4}{4} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!} = 210$.

2. Déterminer pour les séries formelles en X désignées par les expressions ci-dessous les 10 premiers termes, c'est-à-dire si la série est $A = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_iX^i$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$, donner le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_9X^9$. Vous pouvez omettre les termes nuls de ce polynôme.

a. $(1 + X)^6$.

$\surd$ $\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} X^i = 1 + 6X + 15X^2 + 20X^3 + 15X^4 + 6X^5 + X^6$.

b. $\frac{1}{1-X}$.

$\surd$ $\frac{1}{1-X} = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{1}{i}\!\right) X^i = \sum_{i\in\mathbf{N}} X^i$ *dont* $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^8 + X^9$ *sont les 10 premiers termes.*

c. $\frac{1+X}{1-X}$.

$\surd$ *Multiplication par* $1 + X$ *donne* $1 + 2X + 2X^2 + 2X^3 + 2X^4 + 2X^5 + 2X^6 + 2X^7 + 2X^8 + 2X^9$.

d. $\left(\frac{1}{1-X}\right)^2$.

$\surd$ $\left(\frac{1}{1-X}\right)^2 = \sum_{i\in\mathbf{N}} \left(\!\binom{2}{i}\!\right) X^i = \sum_{i\in\mathbf{N}} (i + 1)X^i$ *dont les 10 premiers termes sont* $1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4 + 6X^5 + 7X^6 + 8X^7 + 9X^8 + 10X^9$. *On pourra également trouver ce résultat en calculant le carré de la série dans la question b.*

e. $\frac{1}{1-X^3}$.

$\surd$ $\frac{1}{1-X^3} = \sum_{i\in\mathbf{N}} X^{3i}$ *dont les 10 premiers termes donnent* $1 + X^3 + X^6 + X^9$.

f. $\left(\frac{1}{1-X^2}\right)\left(\frac{1}{1-X^3}\right)$.

√ *En multipliant* $\left(\frac{1}{1-X^2}\right) = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + X^8 + \cdots$ *par* $\left(\frac{1}{1-X^3}\right) = 1 + X^3 + X^6 + X^9 + \cdots$ *on trouve* $1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7 + 2X^8 + 2X^9 + \cdots$. *On pourra également écrire* $\left(\frac{1}{1-X^2}\right)\left(\frac{1}{1-X^3}\right) = \frac{1}{1-X^2-X^3+X^5}$ *et trouver le résultat ci-dessus en résolvant une récurrence, comme il est illustré dans la réponse à question suivante.*

g. $\frac{1}{1-X-2X^3}$ [on pourra calculer les coefficients à partir de la relation $(1 - X - 2X^3)A = 1$].

√ *Si l'on écrit* $\frac{1}{1-X-2X^3} = \sum_{i\in\mathbf{N}} a_i X^i$, *l'identité* $(1-X-2X^3)(\sum_{i\in\mathbf{N}} a_i X^i) = 1$ *donne les équations* $a_0 = 1$, $a_1 - a_0 = 0$, $a_2 - a_1 = 0$, *et* $a_{i+3} - a_{i+2} - 2a_i = 0$ *pour* $i \in \mathbf{N}$; *on trouve* $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ *et ensuite successivement pour* $(a_3, \ldots, a_9)$ *les valeurs* 3, 5, 7, 13, 23, 37, 63, *d'où la réponse* $1 + X + X^2 + 3X^3 + 5X^4 + 7X^5 + 13X^6 + 23X^7 + 37X^8 + 63X^9$.

3. On définit pour $n \in \mathbf{N}$ le nombre c_n comme le nombre de parties S de $[1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ ne contenant pas deux nombres voisins (donc si $i, j \in S$ on a $i - j \neq 1$) ; la partie vide est admise.

a. Vérifier que $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, et $c_2 = 3$.

√ *L'ensemble des parties cherché est* $\{\emptyset\}$ *pour* $n = 1$ *(une seule partie), pour* $n = 1$ *cet ensemble est* $\{\emptyset, \{1\}\}$ *(deux parties), et pour* $n = 1$ *cet ensemble est* $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ *(trois parties).*

b. Donner une relation de récurrence qui exprime c_n en termes de c_{n-1} et de c_{n-2} quand $n \geq 2$ (distinguer les cas $n \notin S$ et $n \in S$).

√ *Si* $n \notin S$, *alors* S *est une partie de* $[1, n-1]$ *avec la même propriété, et si* $n \in S$ *alors* $S \setminus \{n\}$ *est une partie de* $[1, n-2]$ *avec la même propriété, d'où* $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.

c. Calculer c_{10}.

√ *On calcule facilement* $(c_0, \ldots, c_{10}) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144)$ *donc* $c_{10} = 144$.

d. Donner une expression qui décrit la série génératrice $C = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n$ de la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ [on pourra utiliser la relation de récurrence de la question *b* et les termes initiaux de la question *a*].

√ *Le relation de récurrence dit que les coefficients de* $C(1-X-X^2)$ *sont nuls à partir de celui de* X^2. *Alors* $C(1 - X - X^2) = (1 + 2X + 3X^2 + \cdots)(1 - X - X^2) = 1 + X$, *donc* $C = \frac{1+X}{1-X-X^2}$.

e. Si S est une partie de $[1, n]$ ne contenant pas deux nombres voisins, alors la suite $(a_1, \ldots, a_l)$ des éléments de S en ordre croissant vérifie $a_i \in [1, n]$ pour $i \in [1, l]$, ainsi que $a_{i+1} \geq a_i + 2$ pour $i < l$. En mettant cet ensemble de suites en bijection avec un autre ensemble de suites, montrer que

$$c_n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n+1-l}{l}$$

(dans cette somme on a $\binom{n+1-l}{l} = 0$ dès que $l > \frac{n+1}{2}$).

√ *En posant* $b_i = a_i - (i-1)$ *pour* $i \in [1, l]$ *on obtient une suite strictement croissante de longueur* $l \leq l$ *d'éléments de* $[1, n+1-l]$ *(car* $b_l = a_l - (l-1) \leq n + 1 - l$ *si* $l > 0$*). Réciproquement, une telle suite* $(b_1, \ldots, b_l)$ *permet de reconstruire* $(a_1, \ldots, a_l)$ *et donc* S, *en posant* $a_i = b_i + (i-1)$. *Le nombre de telles suites* $(b_1, \ldots, b_l)$ *pour* l *fixé est égal au nombre* $\binom{n+1-l}{l}$ *de parties de* $[1, n+1-l]$ *à* l *éléments, et en laissant varier* l *on trouve* $c_n = \sum_{l\in\mathbf{N}} \binom{n+1-l}{l}$.

Fin.