Corrigé Examen pL02, Analyse Combinatoire, Maths 1 vendredi 20 mai 2005
14h00-16h00

1. Soit S l'ensemble des chemins de réseau menant de $(0,0)$ à $(6,4)$ (donc chaque élément de S est une suite $(P_0,P_1,\ldots,P_{10})$ de points dans le réseau $\mathbf{Z}^2$ avec $P_0=(0,0)$, $P_{10}=(6,4)$ et si $P_i=(a,b)$ pour $0\leq i<10$, alors soit $P_{i+1}=(a+1,b)$, soit $P_{i+1}=(a,b+1)$).

a. Dans le cours on a décrit une correspondance bijective qui existe en général entre un ensemble de chemins de réseau comme S et un ensemble de mots sur un alphabet à deux lettres. Spécifier l'ensemble de mots qui correspond ainsi à S.

$\surd$ *On prend pour les deux lettres par exemple* `A` *et* `B`*, alors l'ensemble sera celui des mots de 10 lettres dont 6 sont* `A` *et 4 sont* `B`*, donc les permutations de «* `AAAAAABBBB` *». Le mot est formé en prenant une lettre* `A` *pour chaque pas vertical* $(a,b)\to(a+1,b)$*, et une lettre* `B` *pour chaque pas horizontal* $(a,b)\to(a,b+1)$ *; autrement dit, le mot* m *qui correspond au chemin de l'introduction est défini par* $m_i=\mathtt{A}$ *si* $P_i=(a+1,b)$*, et* $m_i=\mathtt{B}$ *si* $P_i=(a,b+1)$*, où* $(a,b)=P_{i-1}$*, pour* $1\leq i\leq 10$*.*

b. Pour le dénombrement de S, ou de l'ensemble de mots indiqué dans la question précédente, on peut établir une bijection avec encore un autre ensemble E, qui est de la forme $E=\binom{[1,n]}{k}$, c'est-à-dire l'ensemble des parties à k éléments de $[1,n]=\{1,\ldots,n\}$. Indiquer quelles sont les valeurs de n et de k, et décrire la correspondance entre soit les chemins de réseau soit les mots (vous pouvez choisir) d'un côté, et les éléments de E (qui sont des parties de $[1,n]$) de l'autre côté.

$\surd$ *La partie de* $[1,n]$ *associé à un mot sera l'ensemble des positions où il contient une lettre* `A`*, donc* $n=10$ *(la longueur du mot) et* $k=6$ *(le nombre de lettres* `A`*). Pour un chemin de réseau c'est l'ensemble des indices des pas verticaux. On pourrait éventuellement aussi prendre les positions des lettres* `B` *ou des pas horizontaux, auquel cas on aura* $k=4$ *(et toujours* $n=10$*).*

c. Calculer le nombre $\#S$ d'éléments de S.

$\surd$ *C'est* $\binom{10}{6}=\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210$*.*

2. Soient $a,b,c,n\in\mathbf{N}$ des nombres naturels vérifiant $a+b+c=n$. Donner une formule qui décrit le nombre de manières différentes de colorier un ensemble de n boules numérotées avec les couleurs rouge, vert, bleu, de telle façon qu'on obtienne a boules rouges, b boules vertes, et c boules bleues.

$\surd$ *Le nombre de manières de partitionner* n *éléments distingués en 3 classes de tailles respectives* a*,* b*, et* c *est égal au coefficient multinomial* $\binom{n}{a,b,c}=\frac{n!}{a!\,b!\,c!}$*, qu'on peut également écrire comme produit de deux coefficients binomiaux de plusieurs façons, par exemple* $\binom{n}{a+b}\binom{a+b}{a}$ *ou* $\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}$ *ou* $\binom{n}{c}\binom{a+b}{b}$*.*

3. Soit S la série formelle en X dont tous les coefficients sont égaux à 1, c'est-à-dire $S=\sum_{i\in\mathbf{N}}X^i$.

a. Expliquer pourquoi on écrit aussi $S=\frac{1}{1-X}$ pour désigner cette série.

$\surd$ *En multipliant* S *par* $1-X$*, tous les coefficients deviennent* $1-1=0$*, sauf le coefficient initial (de* X^0*) que sera 1, donc on a l'équation de séries formelles* $S(1-X)=1$*. Alors* S *est l'inverse de* $1-X$ *pour la multiplication des séries formelles, et il est naturel d'écrire* $S=\frac{1}{1-X}$*.*

b. On fixe $n\in\mathbf{N}$; décrire les coefficients de la série S^n, c'est-à-dire les nombres c_i tels qu'on ait $S^n=\sum_{i\in\mathbf{N}}c_iX^i$. Commenter votre réponse.

$\surd$ *En calculant le produit de séries formelles* S^n*, on obtient une contribution* X^i *pour chaque choix de* n *monômes* $X^{a_1},X^{a_2},\ldots,X^{a_n}$ *dans chacun des* n *facteurs* S*, donc le coefficient* c_i *sera le nombre de suites* $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{N}^n$ *avec* $a_1+\cdots+a_n=i$*, ce qui donne* $c_i=\left(\!\binom{n}{i}\!\right)=\binom{n+i-1}{i}$*.*

Fin.